

## 考虑 $T$ 应力及裂隙参数的岩体压剪断裂准则

刘红岩<sup>1</sup>, 祝凤金<sup>2</sup>, 周月智<sup>1</sup>, 郑秀华<sup>1</sup>

(1. 中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083; 2. 浙江大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310028)

**摘要:** 针对压剪作用下裂隙面将发生闭合及摩擦滑移的特点, 首先基于 Muskhelishvili 复变函数理论, 建立了压剪作用下裂隙岩体的 Kolosoff-Muskhelishvili 应力函数, 并求得考虑裂隙3类参数(即几何参数、摩擦强度参数和变形参数)的裂隙尖端应力强度因子  $K$  和3个  $T$  应力分量的计算公式; 其次, 将其代入经典的最大周向应力准则, 得到考虑裂隙尖端  $T$  应力及裂隙3类参数的修正最大周向应力准则; 同时该准则认为裂隙法向及切向刚度与裂隙面受力特征密切相关, 而非定值, 并给出了不同裂隙倾角时的裂隙变形参数. 最后, 基于压剪作用下翼裂纹起裂角试验结果对该准则的合理性进行了初步验证, 结果说明考虑裂隙变形参数是有必要的.

**关键词:**  $T$  应力; 裂隙变形参数; 岩体压剪断裂准则; Kolosoff-Muskhelishvili 应力函数; 翼裂纹起裂角  
**中图分类号:** TU 443 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2024)06-0874-09

## Compression-Shear Fracture Criterion for the Rockmass Considering $T$ -Stress and Crack Parameter

LIU Hong-yan<sup>1</sup>, ZHU Feng-jin<sup>2</sup>, ZHOU Yue-zhi<sup>1</sup>, ZHENG Xiu-hua<sup>1</sup>

(1. School of Engineering & Technology, China University of Geosciences (Beijing), Beijing 100083, China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China. Corresponding author: LIU Hong-yan, E-mail: lhyan1204@126.com)

**Abstract:** For the mechanical characteristic of the crack surface closure and friction sliding under compression-shear load, Kolosoff-Muskhelishvili stress function of the cracked rockmass subjected to compression and shear load is firstly established based on Muskhelishvili complex function theory. Then the calculation formulae of the stress intensity factor  $K$  and three  $T$ -stress components at the crack tip considering three kinds of crack parameters (namely geometry parameter, friction strength parameter and deformation parameter) are proposed. Secondly, a revised maximum tangential stress criterion is obtained by incorporating  $T$ -stress at the crack tip and three kinds of crack parameters into the classic maximum tangential stress (MTS) criterion. Meanwhile this proposed criterion assumes that the crack deformation parameter such as crack normal and shear stiffness is not a constant and is closely related to the stress characteristic on the crack face. Additionally, the crack deformation parameters for different crack dip angles are given. Finally, the experiment results of the wing-crack initiation angle under compression and shear load are adopted to preliminarily valid the revised criterion. It indicates that it is necessary to consider the crack deformation parameter.

**Key words:**  $T$ -stress; crack deformation parameter; compression-shear fracture criterion for the rockmass; Kolosoff-Muskhelishvili stress function; wing-crack initiation angle

裂隙岩体在压剪荷载下的起裂与扩展是导 致岩体工程如岩质边坡及地下硐室等失稳破坏

收稿日期: 2023-02-24

基金项目: 北京市自然科学基金资助项目(8222031); 国家重点研发计划项目(2019YFC1509701); 新疆维吾尔自治区“天池英才”领军人才计划资助项目(2023); 国家自然科学基金资助项目(42172342).

作者简介: 刘红岩(1975-), 男, 河南扶沟人, 中国地质大学(北京)教授, 博士生导师; 郑秀华(1965-), 女, 辽宁康平人, 中国地质大学(北京)教授, 博士生导师.

的根本原因<sup>[1-2]</sup>,因此对岩体压剪断裂准则的研究不但有助于进一步深化对裂隙岩体压剪断裂机理的认识,而且还可以很好地指导相关岩体工程的设计与施工。

经典断裂力学起源于Griffith断裂理论,该理论没有直接考虑裂隙尖端的应力场分布,而是以包含裂隙的整个物体为研究对象,从能量释放和守恒的角度分析裂隙的起裂和扩展。Muskhelishvili<sup>[3]</sup>首先将复分析引入到平面弹性理论中,对于弹性力学平面问题,应力场可以用2个复变量函数 $\Phi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 来表示,该复变量函数通常称为Kolossoff-Muskhelishvili应力函数(以下简称K-M应力函数),这为研究裂隙尖端应力场奠定了理论基础。

然而,经典断裂力学是以拉剪作用下的裂隙为研究对象,而岩体往往处于压剪作用下,此时裂隙面会发生完全或部分闭合,进而产生摩擦力以阻碍岩体沿裂隙面的相对滑动。由于拉剪作用下裂隙面彼此之间没有相互作用;而压剪作用下,裂隙面闭合,导致裂隙面的应力条件发生改变,此时根据拉剪作用下建立的全场应力函数不再适用于描述压剪作用下的闭合裂隙,即经典断裂力学无法直接用于分析裂隙岩体的压剪断裂<sup>[4]</sup>。而许多学者在分析压剪破坏时,往往直接引用经典断裂力学的修正结果<sup>[5-6]</sup>,或者在推导时将岩体简化为弹性介质<sup>[7]</sup>,忽略了裂隙面强度或变形参数对岩体应力场的影响,因此其理论预测结果往往与裂隙岩体的物理力学性质无关,如Nemat-Nasser等<sup>[8]</sup>认为压剪作用下裂隙尖端翼裂纹起裂角恒为 $70.5^\circ$ ,而与裂隙参数(如裂隙倾角、摩擦强度等)和岩石力学参数(如岩石弹性模量和泊松比等)均无关,这显然是不合理的。学者们对大理岩<sup>[9]</sup>、花岗岩<sup>[10]</sup>等不同类型岩石的压缩试验结果表明,其翼裂纹起裂角均存在较大差异,而非定值。上述理论并不能很好地解释这种现象,因此目前的压剪破坏理论仍存在一定不足,甚至一些错误认识,亟待改进。

裂隙岩体压剪断裂与拉剪断裂的区别主要表现在两个方面。首先,与拉剪作用不同,在压剪作用下裂隙面将受压闭合,进而产生摩擦力以阻碍裂隙面间的相对滑移,因此裂隙性质将对岩体压剪断裂产生显著影响,为此引入裂隙3类参数对其上述力学行为进行描述,即:①几何参数,对于单裂隙,通常包括裂隙长度和倾角;对于多裂隙,则需同时考虑其条数和间排距等;②摩擦

强度参数,即裂隙面摩擦系数(或摩擦角)和黏聚力;③变形参数,对于无充填裂隙,为裂隙面法向和切向刚度;对于充填裂隙,则为裂隙充填物的弹性模量及泊松比。已有研究多聚焦于裂隙几何参数及摩擦强度参数的影响<sup>[11-12]</sup>,而Prudencio等<sup>[13]</sup>对裂隙岩体的压缩实验以及夏才初等<sup>[14]</sup>对裂隙岩体的直剪试验均表明岩体的峰值强度随裂隙变形参数的增大而提高,说明裂隙变形参数对岩体力学特性及裂隙尖端应力场亦有重要影响。为此,Liu<sup>[15]</sup>提出了同时考虑了裂隙面变形参数的应力强度因子计算方法,并由此对经典的周向应力准则进行了修正。但是进一步研究发现,Liu<sup>[15]</sup>提出的方法仍存在两个方面的不足:①该方法缺乏严格的理论证明,因此导致其正确性值得商榷;②该方法虽然考虑了裂隙变形参数即裂隙法向及切向刚度的影响,但是其认为二者恒为定值,即与裂隙面上的法向及切向应力无关,然而王芝银等<sup>[16]</sup>和Bandis等<sup>[17]</sup>的研究均认为裂隙法向及切向刚度正比于裂隙面上的法向压应力,而非定值。其次,与拉剪作用不同,不少学者认为压剪裂隙的起裂不仅受裂隙尖端奇异应力项即应力强度因子的控制,而且还受非奇异项即 $T$ 应力的影响,并提出了考虑 $T$ 应力的压剪裂隙最大周向应力准则<sup>[18-19]</sup>。然而目前学者们对 $T$ 应力的认识还存在较大差异,如Williams等<sup>[20]</sup>认为裂隙尖端仅存在 $T_x$ 一个应力分量,而Tang<sup>[18]</sup>则认为存在 $T_x$ 和 $T_y$ 两个应力分量,而赵彦琳等<sup>[19]</sup>则认为同时存在 $T_x$ 、 $T_y$ 和 $T_{xy}$ 三个应力分量。另外上述研究均未考虑裂隙变形参数对 $T$ 应力的影响。因此对 $T$ 应力的研究仍需进一步深化。

为此,本文针对上述不足,采用复变函数理论首先对压剪裂隙尖端应力场展开研究,提出考虑裂隙3类参数的裂隙尖端应力强度因子 $K$ 和 $T$ 应力计算方法;其次,基于上述研究成果对经典的周向应力准则进行修正,提出考虑裂隙3类参数的修正最大周向应力准则;最后,采用相关试验数据对该准则的合理性进行验证。

## 1 翼裂纹起裂的最大周向应力准则

图1为单轴压缩下的裂隙岩体试件,在裂隙 $AB$ 的尖端 $A$ 点建立极坐标系,对于距裂隙尖端 $r$ 处的某一点 $D$ ,当考虑3个 $T$ 应力分量即 $T_x$ 、 $T_y$ 和 $T_{xy}$ 时,其应力分量用极坐标表示为<sup>[19]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) + \\ &\quad T_x \cos^2 \theta + T_y \sin^2 \theta + T_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) - \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} 3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \\ &\quad T_x \sin^2 \theta + T_y \cos^2 \theta - T_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) - \\ &\quad \frac{1}{2} (T_x - T_y) \sin 2\theta + T_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由式(1)可知,由于裂隙尖端应力分量中均含有  $T$  应力,因此其将对翼裂纹的起裂角度、起裂强度及扩展路径等均产生重要影响.

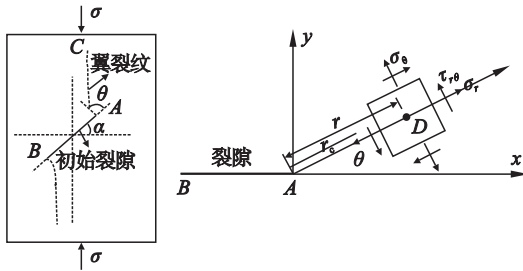


图1 单轴压缩下的裂隙岩体试件及裂隙尖端应力场  
Fig. 1 Cracked rockmass sample under uniaxial compression and the stress field at the crack tip

本文采用最大周向应力(maximum tangential

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3}{4\sqrt{2\pi r_c}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] + \\ (T_x - T_y) \sin 2\theta - 2T_{xy} \cos 2\theta = 0, \\ \frac{3}{8\sqrt{2\pi r_c}} \sin \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] - \frac{3}{4\sqrt{2\pi r_c}} \cos \frac{\theta}{2} \times \\ [K_I \cos \theta - 3K_{II} \sin \theta] + 2(T_x - T_y) \cos 2\theta + 4T_{xy} \sin 2\theta < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由此可知,翼裂纹起裂角  $\theta$  与裂隙尖端应力强度因子  $K(K_I, K_{II})$ 、 $T$  应力 ( $T_x, T_y, T_{xy}$ ) 和裂隙尖端临界尺寸  $r_c$  (其为材料常数,与岩石类型有关,可由试验测得) 均相关. 因此下面重点讨论压剪应力下裂隙尖端  $K$  和  $T$  应力的计算方法.

## 2 基于弹性断裂理论的压剪裂隙尖端 $K$ 和 $T$ 应力

### 2.1 单轴压缩下的裂隙岩体应力场

由 Muskhelishvili 复变函数理论可知,平面弹性条件下,应力分量 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) 可由 2 个复变应

力函数,MTS) 准则作为翼裂纹起裂准则,即裂隙尖端最大周向应力达到岩石抗拉强度时,翼裂纹将沿与最大周向拉应力垂直的方向起裂,设翼裂纹起裂角为  $\theta$ ,则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} &< 0, \\ (\sigma_\theta)_{\max} &= \sigma_t = \sigma_{\theta_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中:  $\sigma_t$  为岩石抗拉强度;  $\sigma_{\theta_1}$  为  $\theta = \theta_1$  方向上的周向拉应力.

将式(1)中的  $\sigma_\theta$  代入式(2)中,可得翼裂纹起裂角  $\theta$  应满足:

力函数  $\Phi(z)$  和  $\Omega(z)$  表示为<sup>[20]</sup>

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}\Phi(z), \quad (4)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \quad (5)$$

式中:  $z = x + iy$ , 表示一个任意复变量;  $\bar{z}$  为  $z$  的共轭复变量.

图2所示模型为单轴压缩下含一条倾角为  $\alpha$  的平面裂隙的试件,其为①~④中4个模型的线性叠加,其中  $p$  为远场压缩载荷,  $\alpha$  为裂隙走向与水平方向夹角,  $a$  为裂隙半长,  $L^+, L^-$  分别表示裂隙上、下表面. 下面分别研究仅考虑裂隙面几何参数和摩擦强度参数及同时考虑裂隙面几何参数、摩擦强度参数和变形参数时的裂隙尖端应力场.

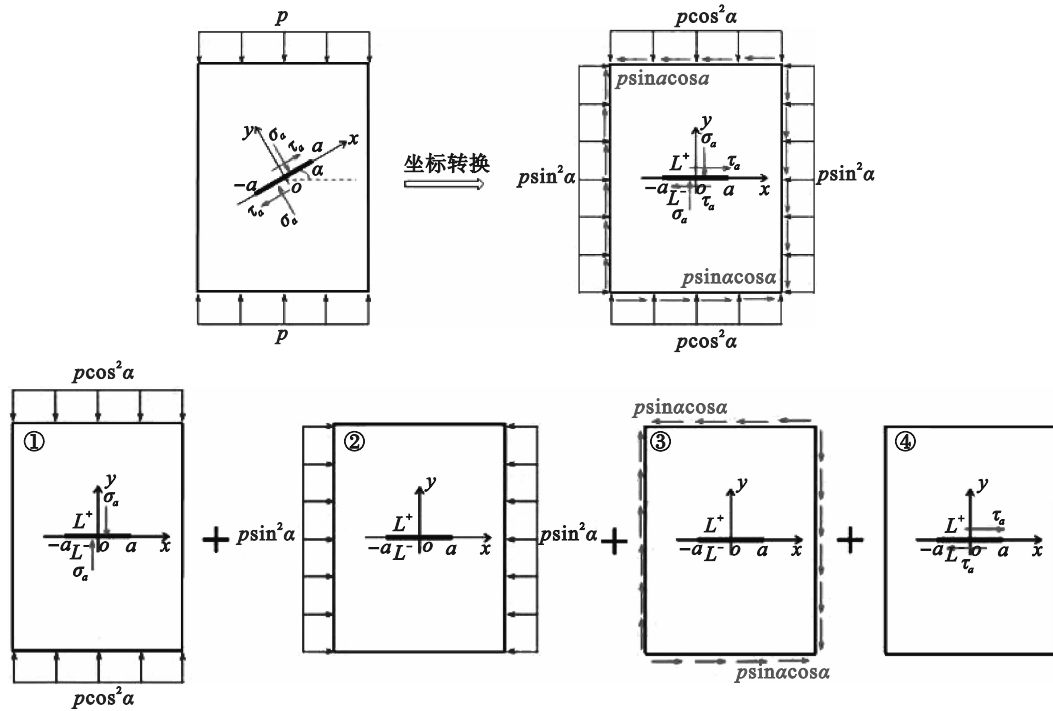


图 2 单轴压缩下的裂隙试件

Fig. 2 Cracked sample under uniaxial compression

2.2 压剪裂隙尖端  $K$  及  $T$  应力

2.2.1 仅考虑裂隙面几何参数及摩擦强度参数

下面分别求出图 2 中①~④的 4 个模型的 K-M 应力函数, 首先易知①和②所示应力状态下的 K-M 应力函数分别为

$$\Phi(z)_{\text{①}} = -\frac{1}{4} p \cos^2 \alpha, \Omega(z)_{\text{①}} = -\frac{3}{4} p \cos^2 \alpha, \quad (6)$$

$$\Phi(z)_{\text{②}} = -\frac{1}{4} p \sin^2 \alpha, \Omega(z)_{\text{②}} = \frac{1}{4} p \sin^2 \alpha. \quad (7)$$

将式(6)代入式(4)和式(5)可得

$$\sigma_y^{\text{①}} = -p \cos^2 \alpha, \sigma_x^{\text{①}} = \tau_{xy}^{\text{①}} = 0. \quad (8)$$

图 2①中模型内部和边界上均满足该解.

同理, 将式(7)代入式(4)和式(5)可得

$$\sigma_x^{\text{②}} = -p \sin^2 \alpha, \sigma_y^{\text{②}} = \tau_{xy}^{\text{②}} = 0. \quad (9)$$

图 2②中模型内部和边界上均满足该解.

对于图 2③中远场剪切载荷作用下, 其 K-M 应力函数为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z)_{\text{③}} &= i \frac{p \sin \alpha \cos \alpha}{2} \times \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - i \frac{p \sin \alpha \cos \alpha}{2} \\ \Omega(z)_{\text{③}} &= i \frac{p \sin \alpha \cos \alpha}{2} \times \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + i \frac{p \sin \alpha \cos \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

下面求解图 2④所示问题的 K-M 应力函数. Lee 等<sup>[21]</sup>对压剪作用下含闭合裂隙的 PMMA 平板进行了光弹性实验研究, 当裂隙面摩擦系数  $f$  由 0.7 减小到 0.38 时, 光弹性条纹图发生显著改

变, 这说明裂隙摩擦强度对试件压剪力学特性有显著影响, 必须予以考虑. 因此, 许多学者<sup>[15, 18-19]</sup>对此展开研究, 认为裂隙面摩擦强度  $\tau_f$  可表示为 (由于裂隙面的黏聚力一般较小, 因此这里仅考虑由裂隙面摩擦力提供的摩擦强度):

$$\tau_f = f \sigma_a = f p \cos^2 \alpha. \quad (11)$$

这里暂不考虑裂隙面变形参数的影响.

对于图 2④所示裂隙岩体模型, 其裂隙面应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^+ - i \tau_{xy}^+ &= i \tau_f, L^+; \\ \sigma_y^- - i \tau_{xy}^- &= i \tau_f, L^- \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

令  $t$  表示裂隙  $L$  上除端点外的任意一点, 当  $z \rightarrow t$  时, 由式(4)和式(5)有

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(t)_{\text{④}} + \Omega^-(t)_{\text{④}} &= \sigma_y^+ - i \tau_{xy}^+, \\ \Phi^-(t)_{\text{④}} + \Omega^+(t)_{\text{④}} &= \sigma_y^- - i \tau_{xy}^- \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由式(12)和式(13)可得

$$\left. \begin{aligned} [\Phi(t)_{\text{④}} + \Omega(t)_{\text{④}}]^+ + [\Phi(t)_{\text{④}} + \Omega(t)_{\text{④}}]^- &= 2i \tau_f = 2p(t), \\ [\Phi(t)_{\text{④}} - \Omega(t)_{\text{④}}]^+ - [\Phi(t)_{\text{④}} - \Omega(t)_{\text{④}}]^- &= 0 = 2q(t). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中,  $p(t)$  和  $q(t)$  为裂隙  $L$  上关于  $t$  的某个函数, 由此可将接触裂隙平板问题转化为 Riemann-Hilbert 边界值问题, 并根据 Plemelj-Sokhozki 公式获得该问题的通解为<sup>[22]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z)_{\text{④}} &= \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)}{t-z} dt + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}', \\ \Omega(z)_{\text{④}} &= \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)}{t-z} dt + \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}'. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} X(z) &= \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{\frac{1}{2}} (z-b_k)^{\frac{1}{2}}, \\ P_n(z) &= C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中:  $n$  表示裂隙条数; 多项式  $P_n(z)$  的系数可由式(17)给出.

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \Gamma + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}', \\ \int_L \frac{P_n(t)}{X(t)} dt &= 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中:  $\bar{\Gamma}'$  为  $\Gamma'$  的共轭形式, 为与远场载荷有关的复变量, 而对于该问题, 远场载荷为 0, 即

$$C_0 = \Gamma = \bar{\Gamma}' = 0. \quad (18)$$

当裂隙条数为 1, 即  $n=1$  时, 令  $a_1=a, b_1=-a$ , 结合式(14)~式(18)化简可得

$$\Phi(z)_{\text{④}} = \Omega(z)_{\text{④}} = \frac{\tau_f}{2\pi \sqrt{z^2-a^2}} \int_L \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t-z} dt. \quad (19)$$

式(19)中沿裂隙面  $L$  的积分可转化为如图 3 所示围绕包含接触裂隙  $L$  的闭合曲线  $C$  的积分:

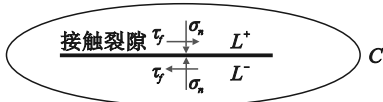


图 3 包含接触裂隙  $L$  的闭合曲线  $C$

Fig. 3 Closed curve  $C$  including the contact crack  $L$

$$\oint_C \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t-z} dt = (1-g) \int_L \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t-z} dt. \quad (20)$$

式中:  $g$  为联系裂隙上下表面应力关系之间的函数, 且  $\sigma_{ij}^+ = g\sigma_{ij}^- (i, j=x, y)$ . 此时在裂隙上下表面上应力大小相等, 方向相反, 故  $g=-1$ . 令  $f(t) = \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t-z}$ , 根据留数定理, 式(20)可转化为

$$\oint_C f(t) dt = 2\pi i \{ \text{Re} s [f(t), z] + \text{Re} s [f(t), \infty] \} = 2\pi i (\sqrt{z^2-a^2} - z). \quad (21)$$

结合式(19)~式(21), 可得图 2④所示裂隙平面问题的 K-M 应力函数为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z)_{\text{④}} = \Omega(z)_{\text{④}} &= \frac{i\tau_f}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} \right) = \\ &= \frac{ifp \cos^2 \alpha}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

由此, 可得图 2 所示模型的 K-M 应力函数即

为①~④所示 4 个模型的 K-M 应力函数之和, 即

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi(z)_{\text{①}} + \Phi(z)_{\text{②}} + \Phi(z)_{\text{③}} + \Phi(z)_{\text{④}} = \\ &= i \frac{p \cos \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2} \times \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} - \frac{1}{4} p - \\ &= i \frac{p \cos \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2}, \\ \Omega(z) &= \Omega(z)_{\text{①}} + \Omega(z)_{\text{②}} + \Omega(z)_{\text{③}} + \Omega(z)_{\text{④}} = \\ &= i \frac{p \cos \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2} \times \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} + \frac{1}{4} p \sin^2 \alpha - \\ &= \frac{3}{4} p \cos^2 \alpha + i \frac{p \cos \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

将式(23)代入式(4)和式(5), 并在裂隙尖端进行泰勒展开, 由此可得裂隙尖端附近应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) + T_x, \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta + T_y, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) + T_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= 0, K_{II} = -p \cos \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha) \sqrt{\pi a}, \\ T_x &= -p \sin^2 \alpha, T_y = -p \cos^2 \alpha, T_{xy} = -fp \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由此可知, 当沿裂隙面分布均匀摩擦力时, 压剪作用下的闭合斜裂隙为特殊的 II 型裂隙, 裂隙尖端不存在 I 型奇异性. 且摩擦效应的存在, 会降低裂隙尖端 II 型奇异性, 当  $f \geq \tan \alpha$  时, 裂隙尖端奇异性会消失, 同时裂隙尖端存在 3 个  $T$  应力分量, 即  $T_x, T_y$  和  $T_{xy}$ .

### 2. 2. 2 同时考虑裂隙面变形参数时

刘红岩等<sup>[15, 23-24]</sup>首先将裂隙变形参数引入到应力强度因子的计算中, 并得到压剪作用下裂隙尖端应力强度因子计算公式为

$$K_{II} = [(1-C_s)\tau_\alpha - f(1-C_n)\sigma_\alpha] \sqrt{\pi a}. \quad (26)$$

式中:  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  分别为对应完整岩石试件在倾角为  $\alpha$  的斜面上的正应力和剪应力;  $C_n, C_s$  分别为裂隙面传压和传剪系数<sup>[25]</sup>:

$$C_n = \frac{\pi a}{\pi a + \frac{E}{(1-\nu^2)k_n}}, C_s = \frac{\pi a}{\pi a + \frac{E}{(1-\nu^2)k_t}}. \quad (27)$$

式中:  $k_n$  和  $k_t$  分别为裂隙面法向刚度和切向刚度;

$E$  和  $\nu$  分别为相应完整岩石的弹性模量和泊松比. 当为完整岩石, 即  $a=0$  时, 此时  $C_n=C_s=0$ .

然而该模型是否合理, 并没有得到理论上的证明. 对图 1 所示压剪闭合裂隙平面模型, Liu<sup>[15]</sup> 假定裂隙面上的应力状态为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ &= \sigma_a - i\tau_{\text{eff}}, & L^+; \\ \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- &= \sigma_a - i\tau_{\text{eff}}, & L^- \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= (1 - C_n) p \cos^2 \alpha, \\ \tau_{\text{eff}} &= (1 - C_s) p \sin \alpha \cos \alpha - f(1 - C_n) p \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

结合式(28)、式(29)和式(11)~式(25)可得相应 K-M 应力函数, 进而得到压剪作用下闭合裂隙尖端 I 型应力强度因子为

$$K_I = -C_n p \cos^2 \alpha \sqrt{\pi a}. \quad (30)$$

显然此时  $K_I \leq 0$ , 这与 I 型应力强度因子的定义相矛盾, 李世愚等<sup>[26]</sup>指出, 负  $K_I$  意味着闭合裂隙面两侧物质会互相侵入, 这与实际相违背, 同时由前述推导可知, 压剪作用下闭合裂隙尖端不

存在 I 型奇异性. 因此由分析可知 Liu<sup>[15]</sup> 所提模型存在不足, 需进一步改进.

为此, 下面将建立考虑裂隙 3 类参数的压剪断裂模型, 并从数学上保证此时裂隙尖端  $K_I=0$ . 首先, 仍然采用图 2 所示的计算模型, 由于裂隙变形参数会影响裂隙面上的应力状态, 而由图 2④所示模型可知, 此时裂隙面上的剪应力为摩擦力, 因此引入裂隙面传压和传剪系数, 可得图 2④所示模型中裂隙面上的剪应力为

$$\tau_a^* = (1 - C_n) fp \cos^2 \alpha. \quad (31)$$

用  $\tau_a^*$  替换式(22)中的  $\tau_r$ , 并由式(11)~式(14)可得图 2④所示模型的 K-M 应力函数为

$$\Phi(z)_{\text{④}} = \Omega(z)_{\text{④}} = i(1 - C_n) fp \cos^2 \alpha \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right). \quad (32)$$

综合式(17)和式(32)以及线性叠加原理, 可得压剪作用下考虑裂隙 3 类参数的裂隙试件全场 K-M 应力函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= i \frac{p \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha - (1 - C_n) f \cos \alpha]}{2} \times \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \\ &\frac{1}{4} p - i \frac{p \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha - (1 - C_n) f \cos \alpha]}{2}, \\ \Omega(z) &= i \frac{p \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha - (1 - C_n) f \cos \alpha]}{2} \times \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \\ &\frac{1}{4} p \sin^2 \alpha - \frac{3}{4} p \cos^2 \alpha + \\ &i \frac{p \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha + (1 - C_n) f \cos \alpha]}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

将式(33)代入式(4)和式(5), 可得如式(24)所示的裂隙尖端应力场, 并由此可得

$$\left. \begin{aligned} K_I &= 0, \\ K_{II} &= -p \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha - (1 - C_n) f \cos \alpha] \sqrt{\pi a}, \\ T_x &= -p \sin^2 \alpha, \\ T_y &= -p \cos^2 \alpha, \\ T_{xy} &= -(1 - C_n) fp \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

同时结合式(27)和式(34), 得到压剪荷载下考虑裂隙 3 类参数的裂隙尖端应力场. 该方法与 Liu<sup>[15]</sup> 提出的方法相比, 能够从数学上保证压剪闭合裂隙尖端  $K_I=0$ .

由式(34)可知, 裂隙变形参数既对裂隙尖端应力强度因子  $K_{II}$  有影响, 又对  $T$  应力有影响(注: 仅对第 3 个  $T$  应力分量  $T_{xy}$  有影响).

将式(34)代入式(1)~式(3)可得到考虑裂隙 3 类参数和  $T$  应力的最大周向拉应力准则, 即

$$\left. \begin{aligned} &\frac{3}{4\gamma} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha - (1 - C_n) f \cos \alpha] + \\ &\cos 2\alpha \sin 2\theta + 2(1 - C_n) f \cos^2 \alpha \cos 2\theta = 0, \\ &-\frac{3}{8\gamma} \cos \alpha [(1 - C_s) \sin \alpha - (1 - C_n) f \cos \alpha] \left( (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} + 6 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) + \\ &2 \cos 2\alpha \cos 2\theta - 4(1 - C_n) f \cos^2 \alpha \sin 2\theta < 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式中,  $\gamma = \sqrt{2r_j a}$ , 其余参数同前.

由此可求得翼裂纹起裂角. 同时需要说明的是裂隙法向及切向刚度  $k_n, k_t$  在本研究中非定值, 而是随裂隙面上应力状态发生变化.

### 3 模型验证

采用 Ling<sup>[27]</sup> 试验结果对本文提出的翼裂纹起裂准则进行验证, 并与 Tang<sup>[18]</sup>、赵彦琳等<sup>[19]</sup>、Williams 等<sup>[20]</sup> 所提出的模型及经典模型进行对比验证, 其中 Williams 模型仅考虑了 1 个  $T$  应力分量即  $T_x$ , Tang 模型仅考虑了 2 个  $T$  应力分量即  $T_x$  和  $T_y$ , 而赵彦琳等<sup>[19]</sup> 模型则同时考虑了 3 个  $T$  应力分量即  $T_x, T_y$  和  $T_{xy}$ , 而经典解则没有考虑  $T$  应力. Ling<sup>[27]</sup> 的试验采用 PMMA 制作含预置单条中心闭合斜裂隙的试样, 并进行单轴压缩, 相关物理力学参数见表 1, 相应试验值与不同模型的理论计算值的对比如图 4 所示.

表 1 PMMA 试件物理力学参数<sup>[27]</sup>  
Table 1 Physical and mechanical parameters of PMMA sample<sup>[27]</sup>

$E/\text{GPa}$	$\nu$	$r_j/\text{mm}$	$2a/\text{mm}$	$f$	$\gamma$
3.16	0.32	0.01	4	0.15	0.1

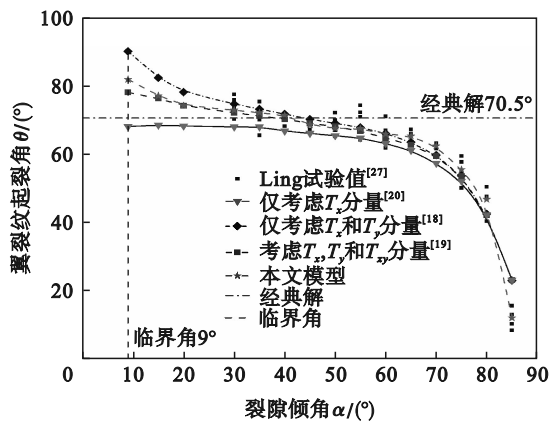


图 4 翼裂纹起裂角理论值与试验值的比较

Fig. 4 Comparison of the wing-crack initiation angle between the theoretical results and test ones

本文在裂隙尖端应力场计算中引入了裂隙变形参数, 下面对其取值方法进行说明. 如前所述, 由于裂隙法向及切向刚度并非定值, 而是与其受到的法向压应力相关, 但是其随法向压应力的变化规律比较复杂, 很难得到一个具体的函数表达式. 为此, 本文给出裂隙法向及切向刚度选取的 2 条原则: ①裂隙法向刚度一般是随着裂隙面上法向应力的增加而增加, 因此当裂隙起裂, 裂隙面上的法向应力较大时, 此时的裂隙面法向

刚度应取大值; 然而裂隙切向刚度的变化规律则较为复杂, 一般靠经验选取; ②在符合上述总体规律的前提下, 裂隙刚度取值仍存在一定范围, 此时以使计算出的翼裂纹起裂角与试验值的误差最小为标准来选取裂隙刚度值. 基于上述 2 条原则, 对不同裂隙倾角的试件, 由本文方法计算出的翼裂纹起裂角及相应的裂隙法向与切向刚度取值如表 2 所示.

表 2 单轴压缩下翼裂纹起裂角  $\theta$  试验值与理论值对比  
Table 2 Comparison of the wing crack initiation angle  $\theta$  between the test results and theoretical ones under uniaxial compression

裂隙倾角 $\alpha$ (°)	起裂角 $\theta$ /(°)		$k_n$ $\text{GPa} \cdot \text{cm}^{-1}$	$k_s$ $\text{GPa} \cdot \text{cm}^{-1}$
	试验值 <sup>[27]</sup>	理论值		
30	72.9	72.8	4.05	4.39
35	69.6	72.0	5.88	8.87
40	69.7	71.3	5.18	4.96
45	68.1	68.5	4.76	4.51
50	68.3	68.3	4.05	5.39
55	67.4	67.4	3.74	5.17
60	65.8	65.8	3.59	3.59
65	65.2	65.2	4.97	3.74
70	62.3	62.3	2.82	3.74
75	55.4	55.4	1.70	4.39
80	46.0	46.7	0.92	4.39
85	11.7	12.1	0.47	8.54

由图 4 和表 2 可以看出: ①与仅考虑  $T_x$  分量的 Williams 模型<sup>[20]</sup> 和仅考虑  $T_x$  和  $T_y$  分量的 Tang 模型<sup>[18]</sup> 相比, 由同时考虑  $T_x, T_y$  和  $T_{xy}$  分量的赵彦琳模型<sup>[19]</sup> 和本文模型计算得到翼裂纹起裂角理论值与 Ling<sup>[27]</sup> 的试验结果最为吻合. 其中前三种理论模型在  $9^\circ \sim 65^\circ$  之间有较为明显的差别, 考虑  $T_x$  的理论模型预测结果偏低, 考虑  $T_x$  和  $T_y$  的理论模型预测结果偏高, 同时考虑  $T_x, T_y$  和  $T_{xy}$  三项的理论模型预测结果居中也最接近试验结果的平均值, 三者都在  $65^\circ \sim 90^\circ$  有较好的一致性, 但是均较试验结果的平均值有一定偏差. 而本文模型由于引入了裂隙面传压及传剪系数  $C_n$  和  $C_s$ , 使得其在  $65^\circ \sim 90^\circ$  的理论预测值较前三者更接近试验值, 同时在  $9^\circ \sim 65^\circ$  区间上与考虑  $T_x, T_y$  和  $T_{xy}$  的赵彦琳模型也有很好的一致性, 同时本文也给出了较为合理的  $k_n, k_s$  取值. ②本文根据  $k_n, k_s$  取值确定了在  $9^\circ$  附近有效剪应力  $\tau_{\text{eff}}$  会达到临界值, 当  $\alpha < 9^\circ$  时,  $\tau_{\text{eff}} < 0$ , 因此不会发生起裂; 当  $\alpha > 9^\circ$  时,  $\tau_{\text{eff}} > 0$ , 故会产生起裂. 因此本文考虑裂隙尖端 3 个  $T$  应力分量以及裂隙变形参数影响的裂隙岩体压

剪断裂理论是合理有效的,其不仅能从数学上保证受压闭合裂隙尖端不存在I型奇异性,而且还能提高初始倾角 $\alpha$ 的预测范围和翼裂纹起裂角预测结果的准确性.③同时由式(35)可知,本文模型不仅全面考虑了裂隙的3类参数,同时还考虑了岩石弹性模量 $E$ 和泊松比 $\nu$ 等岩石力学参数,因而也更为合理.

## 4 结 论

1) 针对压剪作用下裂隙面受力特征,基于复变函数理论,建立了压剪荷载下裂隙岩体的Kolossoff-Muskhelishvili应力函数,并由此求得考虑裂隙3类参数(即几何参数、摩擦强度参数和变形参数)的裂隙尖端应力强度因子 $K$ 和3个 $T$ 应力分量的计算公式,从理论上证明了压剪作用下 $K_I=0$ ,并首次给出了 $T_{xy}$ 的理论表达式,证明了裂隙3类参数对其尖端应力场均有影响.

2) 将考虑裂隙3类参数的 $K$ 和 $T$ 应力计算公式代入最大周向应力准则,得到了考虑裂隙尖端 $T$ 应力及裂隙参数的修正最大周向应力准则,同时认为裂隙变形参数并非恒定值,该准则能够全面反映裂隙3类参数及岩石弹性模量和泊松比对压剪裂隙力学特性的影响.

3) 采用单轴压缩下翼裂纹起裂角试验结果对本模型的合理性进行了初步验证,结果表明同时考虑裂隙3类参数的压剪裂隙起裂准则能够更好地刻画翼裂纹的起裂特性,相应的翼裂纹起裂角计算结果与试验结果也更为吻合.

### 参考文献:

- [1] Zhang W, Wang J, Xu P H, et al. Stability evaluation and potential failure process of rock slopes characterized by non-persistent fractures [J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2020, 20(11): 2921–2935.
- [2] Wang L Y, Chen W Z, Tan X Y, et al. Numerical investigation on the stability of deforming fractured rocks using discrete fracture networks: a case study of underground excavation [J]. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 2020, 79(1): 133–151.
- [3] Muskhelishvili N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity [M]. Holland: Noordhoff Press, 1953: 105–166.
- [4] Ji P Q, Zhang X P, Zhang Q. A new method to model the non-linear crack closure behavior of rocks under uniaxial compression [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2018, 112: 171–183.
- [5] Zhou Z H, Cao P, Ye Z Y. Crack propagation mechanism of compression-shear rock under static-dynamic loading and seepage water pressure [J]. *Journal of Central South University*, 2014, 21(4): 1565–1570.
- [6] Alneasan M, Behnia M, Bagherpour R. Applicability of the classical fracture mechanics criteria to predict the crack propagation path in rock under compression [J]. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2020, 24(11): 1761–1784.
- [7] Fan Y, Zhu Z M, Zhao Y L, et al. Analytical solution of  $T$ -stresses for an inclined crack in compression [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2021, 138: 104433.
- [8] Nemat-Nasser S, Horii H. Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1982, 87(8): 6805–6821.
- [9] Li Y, Yang S Q, Li Y. Experiment and numerical simulation on cracking behavior of marble containing double elliptical holes under uniaxial compression [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, 112: 102928.
- [10] Tian W L, Yang S Q, Xie L X, et al. Cracking behavior of three types granite with different grain size containing two non-coplanar fissures under uniaxial compression [J]. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2018, 18(4): 1580–1596.
- [11] Li N, Chen W, Zhang P, et al. The mechanical properties and a fatigue-damage model for jointed rock masses subjected to dynamic cyclical loading [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2001, 38(7): 1071–1079.
- [12] Liu H Y, Zhang L M. A damage constitutive model for rock mass with nonpersistently closed joints under uniaxial compression [J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2015, 40(11): 3107–3117.
- [13] Prudencio M, Jan M V S. Strength and failure modes of rock mass models with non-persistent joints [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2007, 44(6): 890–902.
- [14] 夏才初, 喻强锋, 钱鑫, 等. 常法向刚度条件下岩石节理剪切-渗流特性试验研究 [J]. *岩土力学*, 2020, 41(1): 57–66, 77.  
(Xia Cai-chu, Yu Qiang-feng, Qian Xin, et al. Experimental study of shear-seepage behaviour of rock joints under constant normal stiffness [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020, 41(1): 57–66, 77.)
- [15] Liu H Y. Wing-crack initiation angle: a new maximum tangential stress criterion by considering  $T$ -stress [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, 199: 380–391.
- [16] 王芝银, 段品佳. 基于岩体三轴压缩试验的节理力学参数确定方法 [J]. *岩土力学*, 2011, 32(11): 3219–3224.  
(Wang Zhi-yin, Duan Pin-jia. A new method for determining mechanical parameters of joints based on triaxial compressive test for rock mass [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(11): 3219–3224.)
- [17] Bandis S C, Lumsden A C, Barton N R. Fundamentals of rock joint deformation [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1983, 20(6): 249–268.
- [18] Tang S B. The effect of  $T$ -stress on the fracture of brittle rock under compression [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2015, 79(10): 86–98.
- [19] 赵彦琳, 范勇, 朱哲明, 等.  $T$ 应力对闭合裂纹断裂行为的理论和实验研究 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(6): 1340–1349.  
(Zhao Yan-lin, Fan Yong, Zhu Zhe-ming, et al. Analytical and experimental study on the effect of  $T$ -stress on behavior of closed cracks [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(6): 1340–1349.)
- [20] Williams J G, Ewing P D. Fracture under complex stress:

