doi:10.12068/j.issn.1005-3026.2024.02.017

区间粗糙数群组G1法的随机聚合求解及应用

梁媛媛，刘　军，易平涛，李伟伟
(东北大学 工商管理学院，辽宁 沈阳　110169)

摘　　要：针对复杂不确定环境下的群体评价问题,采用区间粗糙数表征专家偏好,在G1法的基础上,结合蒙特卡洛仿真技术,提出了一种随机模拟聚合算法．首先,通过随机抽样的方式模拟权重系数,并依据序相关性和区间粗糙数贴近度确定专家权重．其次,综合所有专家意见得到指标的最终权重,并将其与预处理后的指标值线性集结,求得一次模拟的综合评价值,据此判断被评价对象间的优劣．通过充分模拟得出优胜度矩阵,并从中推导出包含优胜概率的可能性排序,弥补了不确定信息环境下绝对排序呈现的不足．最后,通过算例说明了方法的有效性,并与现有方法对比阐述了所提方法的优势．

关　键　词：综合评价;群组G1法;权重系数;区间粗糙数;随机模拟
中图分类号：C 934　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-3026(2024)02-0282-07

Stochastic Integrated Solution of Interval Rough Number Group G1 Method and Its Application

LIANG Yuan-yuan, *LIU Jun*, *YI Ping-tao*, *LI Wei-wei*
(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110169, China. Corresponding author: LIANG Yuan-yuan, E-mail: yyliang0729@163.com)

Abstract: For the problem of group evaluation in complex uncertain environments, an interval rough number is used to characterize experts' preferences, and a stochastic simulation integrated algorithm is proposed based on the G1 method combined with Monte Carlo simulation techniques. Firstly, the weighting coefficients are simulated by random sampling and the weighting of experts are determined based on ordinal correlation and interval rough number closeness. Secondly, the final weights of indicators can be obtained by combining all the experts' opinions, and they are linearly aggregated with the pre-processed indicator values to obtain the comprehensive evaluation value of one simulation, which can be used to assess the advantages and disadvantages of the evaluated objects. Through full simulation, the preference ratio matrix is calculated, and the probability ranking with the probability of superiority is derived from it, which makes up for the deficiency of absolute ranking in the uncertain information environment. Finally, the effectiveness of the method is illustrated by an example and the advantages of the method are described in comparison with the existing methods.

Key words: comprehensive evaluation; group G1 method; weighting coefficients; interval rough number; stochastic simulation

综合评价是指对被评价对象作出全面、客观的评价[1],通常包括指标体系构建、指标数据处理、指标权重确定和信息集结等基本环节,其核心问题是如何确定权重系数．美国运筹学家Saaty提出的层次分析法(AHP)[2-3],已在诸多领域得到广泛关注．然而在实际应用中,AHP面临着两个难点:1) 难以一次性构造满足一致性检验的判断矩阵;2) 一致性检验标准的科学性无法衡量．针对这些问题,文献[1]提出了无需一致性检验的序关系分析(G1)法,已取得丰硕成果[4-5]．进一步,在面对复杂或重要的评价问题时,为兼顾评价的民主性和公平性,众多学者拓展出了群组

收稿日期：2022-10-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目(72171040,72171041)．
作者简介：梁媛媛(1997-),女,江苏苏州人,东北大学硕士研究生;易平涛(1981-),男,湖南永州人,东北大学教授,博士生导师．

G1法[6-7]. Qu等[8]以实数作为相邻指标的重要程度比值,通过循环修正建立一种新的两阶段评价体系,用于确定最优的应急处理方案. 以实数作为比值,虽然计算简单、结果直观,但在面对评价环境的不确定性和信息的不完备性时,专家难以给出明确的判断. 因此,为了贴合专家的真实判断情况,指标重要性标度由实数向区间数形式发展. 张发明[9]将点赋值的G1法拓展至区间数情形,给出了一种以区间数作为指标重要性标度的群组G1法;程砚秋[10]为了体现指标序关系位置对专家权重的影响,通过序列比对和区间相似度对指标的重要程度序列和比值进行研究,提出了区间标度群组G1法. 虽然区间数在一定程度上避免了实数的缺陷,但其假设前提为指标重要性标度在区间内是均匀分布的. 在现实问题中,不同区间段取值的概率密度存在差异,并非处处相等. 随着专家对问题认识的深入和更多信息的补充,可以将比值缩减到一个可能性更大且范围更小的区间内.

粗糙集由上、下近似集组成,是一种处理不完整、不精确信息的数学工具[11]. 由于大多数专家使用不精确的信息来表达他们的感知,现有的经典粗糙集的上、下近似集可以拓展为区间值来表达现实问题,由此形成的区间粗糙数更适合描述现实世界的不确定性[12]. 针对上述以实数和区间数确定比值的不足,吕跃进等[13]提出了区间粗糙数层次分析法,以带参数的区间粗糙数$\left([a,b],[c,d],\beta\right)$作为方案比较判断的媒介. 假设某专家给出的重要性比值是$\left([0.2,0.3],[0.1,0.4],0.6\right)$,表示该比值位于[0.1,0.4]区间,但是以60%的概率位于[0.2,0.3]区间,说明比值落入区间[0.2,0.3]的概率要大于区间[0.1,0.2]和[0.3,0.4]. 此外,从评价结论来看,已有的以区间数或区间粗糙数作为指标间重要程度比值的研究,均以被评价对象绝对排序的形式呈现,排序结论的绝对性与比值的不确定性在逻辑上存在一定的矛盾,这促使绝对排序结论向相对评价结论发展.

本文根据群体评价的现实需求,提出一种基于区间粗糙数的群组G1法,并通过蒙特卡洛仿真技术,获取贴合不确定信息环境的相对评价结论. 论文的主要特点体现在:1) 将现有群组G1法仅以实数或区间数赋予相邻指标重要程度的比值拓展至区间粗糙数情形;2) 基于序相关性和区间粗糙数贴近度确定专家权重,体现了专家意见越接近群体共识其权重越大的思想;3) 从优胜度矩阵中得出含概率特征的可能性排序,以一种柔性的方式提升了评价结论对复杂评价问题的解释性.

1　基本概念

在群体评价问题中,设$S=\left\{s_1,s_2,\cdots,s_p\right\}$为专家集合,$O=\left\{o_1,o_2,\cdots,o_n\right\}$为被评价对象集合,$X=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_m\right\}$为指标集合. 专家权重集合为$\mu=\left\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\right\}$,且$\sum_{l=1}^{p}\mu_l=1$,指标权重集合为$W=\left\{w_1,w_2,\cdots,w_m\right\}$,且$\sum_{k=1}^{m}w_k=1$.

1.1　序关系分析法[1]

1) 确定指标序关系. 依据某评价准则,指标x_i的重要性大于或等于x_j时,记为$x_i\succ x_j$. 若指标$x_1,x_2,\cdots,x_m$具有关系式

$$x_1^*\succ x_2^*\succ\cdots\succ x_m^*, \tag{1}$$

则称指标$x_1,x_2,\cdots,x_m$之间按"$\succ$"确定了序关系. 其中x_i^*表示指标集合$\{x_i\}$按序关系"$\succ$"排序后的第i个指标$(i=1,2,\cdots,m)$. 为便于书写且不失一般性,仍记式(1)为

$$x_1\succ x_2\succ\cdots\succ x_m. \tag{2}$$

2) 确定相邻指标重要程度比值. 设专家给出的指标x_{k-1}与x_k的重要程度比值的理性判断为

$$r_k=\frac{w_{k-1}}{w_k},k=m,m-1,m-2,\cdots,3,2. \tag{3}$$

其中,r_k的取值可参考表1.

表1　r_k取值参考表

Table 1　Reference table for r_k value

r_k	说明
1.0	指标x_{k-1}与指标x_k同等重要
1.2	指标x_{k-1}比指标x_k稍微重要
1.4	指标x_{k-1}比指标x_k明显重要
1.6	指标x_{k-1}比指标x_k强烈重要
1.8	指标x_{k-1}比指标x_k极端重要

3) 确定指标权重系数.

$$w_m=(1+\sum_{k=2}^{m}\prod_{i=k}^{m}r_i)^{-1}, \tag{4}$$

$$w_{k-1}=r_kw_k,k=m,m-1,\cdots,3,2. \tag{5}$$

1.2　区间粗糙数

区间粗糙数常用来描述不确定复杂评价问题,现有文献对区间粗糙数的定义如下:

定义1[14]　U是一个论域,X是一个表示概念的集合,分别定义其下近似集和上近似集为

$$\underline{X}=\left\{x\in U|R^{-1}(x)\subseteq X\right\};\ \overline{X}=\bigcup_{x\in X}R(x).$$

其中:$R(x)=\left\{y\in U|\,y\cong x\right\}$,$R^{-1}(x)=\left\{y\in U|x\cong y\right\}$.

定义2[11] 一个粗糙集可视为具有相同下近似和上近似的所有集合的整体,记为$(\underline{X},\overline{X})$.

定义3[15] 下近似和上近似均为区间的粗糙集称为一个区间粗糙数,记为$([a,b],[c,d])$,其中$c\leqslant a\leqslant b\leqslant d$.

定义4[16] 带参数的区间粗糙数为$\xi=([a,b],[c,d],\beta)$,其中$c\leqslant a\leqslant b\leqslant d$,$0\leqslant\beta\leqslant 1$,$P\left\{x\in[a,b]\right\}=\beta$,$P\left\{x\in[c,a]\cup[b,d]\right\}=1-\beta$.

1.3 相对评价结论

相对评价结论主要依据"大数定理",试验充分时,事件发生的概率可由事件发生的频率得出,其主要包括优胜度矩阵和可能性排序两部分内容.

1)优胜度矩阵.优胜度矩阵[17]用于描述大样本空间内被评价对象互相比较的优劣概率,可表示为

$$\boldsymbol{S}=\left[s_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}&\cdots&s_{1n}\\s_{21}&s_{22}&\cdots&s_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\s_{n1}&s_{n2}&\cdots&s_{nn}\end{bmatrix}.$$

式中,s_{ij}表示被评价对象o_i优于o_j的概率,满足$s_{ij}\in[0,1]$,$s_{ii}=1$,$s_{ij}+s_{ji}=1$.

2)可能性排序.可能性排序[17]是指在排序中添加相邻被评价对象间的优胜概率,可表示为

$$o_1\overset{p_1}{\succ}o_2\overset{p_2}{\succ}\cdots\overset{p_{n-1}}{\succ}o_n. \tag{6}$$

式中,$p_i\in(0,1]$,p_i代表被评价对象o_i优于o_{i+1}的概率.反之,o_i劣于o_{i+1}的概率为$1-p_i$.$p_1=p_2=\cdots=p_{n-1}=1$时,式(6)转变为绝对排序,所以绝对排序是可能性排序的特殊情况.

带参数的区间粗糙数由两个具有包含关系的区间数组成,当$a=c$且$b=d$时,区间粗糙数转化为区间数,当区间数的左、右端点相同时,转化成实数,故区间数和实数是其特殊形式.因此,本文方法同样适用于区间数和实数情形,有效地解决了现有研究中区间数退化为实数时权重结果可能不一致的问题.

2 区间粗糙数群组G1法赋权步骤

2.1 群组G1法赋权思路

通过序相关性和区间粗糙数贴近度确定专家权重,对个人意见更贴近群组共识的专家赋予更大的权重,可以达到平衡专家意见和群组意见的目的.假设针对某一评价问题,有$p(p>1)$位专家参与其中并给出指标的序关系,具体可从三方面展开讨论:

1)若p位专家给出的序关系完全一致,则依据"区间粗糙数贴近度"赋予专家权重.专家给出的相邻指标重要程度比值与所有专家平均值越接近,专家权重越大.

2)若p位专家给出的序关系完全不一致,则依据"序相关性"赋予专家权重.专家给出的指标排序与其他专家越相似,专家权重越大.

3)若p位专家给出的序关系不完全一致,则首先由"序相关性"确定$p_h(1\leqslant p_h\leqslant p)$位序关系一致的专家的总权重和其余$p-p_h$位专家各自的权重,然后通过"区间粗糙数贴近度"重新分配这p_h位专家的总权重.

2.2 单个专家区间粗糙数赋权步骤

设专家给出的指标x_{k-1}和x_k的重要程度比值r_k为区间粗糙数,记为$\tilde{r}_k=\left(\left[r_k^{\mathrm{L2}},r_k^{\mathrm{U2}}\right],\left[r_k^{\mathrm{L1}},r_k^{\mathrm{U1}}\right],\beta\right)$,$r_k^{\mathrm{L1}}\leqslant r_k^{\mathrm{L2}}\leqslant r_k^{\mathrm{U2}}\leqslant r_k^{\mathrm{U1}}$,赋值可参照表1在[1.0,1.8]中连续选取.

单个专家赋权的具体步骤如下:

步骤1 设置监控变量count(初始值为0).

步骤2 按特定分布在$\tilde{r}_k(k=2,\cdots,m)$中随机产生数据,进而运用G1法得出指标权重.

步骤3 为集结指标权重与预处理后的指标值以得到被评价对象的综合评价值,这里选用常用的"线性加权综合法"[1],即

$$y_i=\sum_{j=1}^{m}x_{ij}w_j. \tag{7}$$

式中:y_i为被评价对象o_i的综合评价值;x_{ij}为预处理后被评价对象o_i在指标x_j上的值;w_j为指标x_j的权重.

步骤4 设置计数变量h_{ij}和h'_{ij}(初始值为0),依据步骤3的综合评价值对被评价对象进行两两比较,若$o_i\succ o_j$,令$h_{ij}=h_{ij}+1$;若$o_i\sim o_j$("~"表示"等价于"),令$h'_{ij}=h'_{ij}+1$.

步骤5 count=count+1,当count=sum(sum为总仿真次数,一般取值区间越大,评价指标越多,sum值越大)时,转入步骤6,否则转入步骤2.

步骤6 $s_{ij}=\left(h_{ij}+0.5h'_{ij}\right)/\mathrm{count}$,统计$s_{ij}$,保存数值后退出程序.

步骤7 利用优超数从优胜度矩阵中导出被评价对象的可能性排序.

定义5[17] 称$g\left(o_i\right)$为被评价对象o_i的优超数,则

$$g(o_i)=\mathrm{count}(s_{ij}>0.5)+\\ 0.5\mathrm{count}\left(s_{ij}=0.5\right),\left(i,j\in n,i\neq j\right). \quad (8)$$

式中，count是计数函数.

特殊地，$g\left(o_i\right)=g\left(o_j\right)$时，根据$s_{ij}$进行排序，若$s_{ij}>0.5$，则$o_i\succ o_j$；若$s_{ij}=0.5$，则$o_i\sim o_j$；若$s_{ij}<0.5$，则$o_i\prec o_j$.

需要说明的是，下文的序关系完全一致、完全不一致、不完全一致三种情形，都是在单个专家赋权的基础上融入群组专家权重，因此仅在步骤2中进行相应改动即可.

2.3　三种专家赋权情形

2.3.1　专家的序关系完全一致情形

当评价问题较为复杂时，单个专家得出的结论易产生偏差. 为了发挥群体智慧，提高评价的准确性，往往需要多个专家共同参与到评价问题中. 由于专家具有不同的知识背景和观点，因此针对同一问题，各专家的贡献度不同，其权重也应不同.

假设所有专家关于指标的序关系完全一致，本文通过专家意见和群体意见的贴近度对专家进行赋权，具体步骤如下：

步骤1　按特定分布在$\tilde{r}_k(k=2,\cdots,m)$中随机产生数据，每位专家产生$m-1$个数据.

步骤2　计算各指标下所有专家给出的重要程度比值的平均值以及各专家与平均值的绝对偏差，然后求取每位专家在所有指标中的平均绝对偏差，进而归一化得到专家权重.

步骤3　将专家权重与2.2节步骤2中的指标权重相结合，得出各指标最终的权重为

$$w_k=\sum_{l=1}^{p}\mu_l\times w_{lk}. \quad (9)$$

式中：w_k为指标x_k的权重；μ_l为归一化后专家s_l的权重；w_{lk}为专家s_l给出的指标x_k的权重.

2.3.2　专家的序关系完全不一致情形

Kendall相关系数可用于衡量两个排序结果的相关性[18]，表示为$\tau(-1\leqslant\tau\leqslant1)$. τ分为τ_A，τ_B和τ_C三种计算方式，τ_A适用于集合X与Y中各元素具有唯一性的情况，τ_B适用于集合X或Y中包含相同元素的情况，τ_C适用于集合X与Y用表格表示的情况. 考虑到专家排序中各指标是唯一的，本文选择τ_A的计算方式来衡量排序的相关性.

假设集合X和Y中均有N个元素，X_i和Y_i表示取集合X和Y中第$i(1\leqslant i\leqslant N)$个元素. 一个元素对集合$XY=(X_i,Y_i)(1\leqslant i\leqslant N)$由$X$和$Y$中的对应元素组成. 当任意元素对$(X_i,Y_i)$和$(X_j,Y_j)$满足$X_i>X_j$且$Y_i>Y_j$或$X_i<X_j$且$Y_i<Y_j$时，则认为这两个元素对是同序对. 当$X_i>X_j$且$Y_i<Y_j$或$X_i<X_j$且$Y_i>Y_j$时，认为这两个元素对是异序对. 排序相关性$\tau_A$的计算公式为[18]

$$\tau_A=\frac{C-D}{\frac{1}{2}N(N-1)}. \quad (10)$$

式中：C表示同序对个数；D表示异序对个数.

设τ_A^l代表专家s_l与其他所有专家排序的相关性，其计算公式为

$$\tau_A^l=\sum_{\substack{h=1\\ l\neq h}}^{p}\tau_A^{lh}. \quad (11)$$

式中：τ_A^{lh}表示专家s_l和专家s_h给出的两个排序结果的相关系数；p为专家总数.

由于τ_A^l可能会出现负值，而专家权重应为正值，所以需要对得出的相关性作正向化处理. 如前所述，若特定专家给出的排序结果与其余专家的相关性越强，则该专家的权重越大. 为了体现上述要求，采用式(12)对专家排序的相关性进行转换，使得到的专家权重取值在(0,1)区间内：

$$\mu_l=\frac{e^{\tau_A^l}}{\sum_{l=1}^{p}e^{\tau_A^l}}. \quad (12)$$

式中，μ_l为专家s_l的权重.

最后通过式(9)综合所有专家给出的权重，得到指标的最终权重.

以文献[10]中3位专家关于4个指标给出的排序为例对方法进行说明. 专家1，专家2，专家3给出的排序分别为$x_2\succ x_3\succ x_1\succ x_4$，$y_3\succ y_2\succ y_1\succ y_4$，$z_3\succ z_2\succ z_4\succ z_1$. 以专家1，2为例，排序中均包含4个元素，因而有6对元素对，取第1列$\left(x_2,y_3\right)$和第2列$\left(x_3,y_2\right)$组成一对元素对，显然它们是异序对，具体计算结果见表2. "序列比对"法得出的专家权重分别为$\mu_1=0.297$，$\mu_2=0.375$，$\mu_3=0.328$. 从专家给出的排序可以看出，专家1与专家2的前两个指标排序不同，专家2与专家3的后两个指标排序不同，但最后专家1的权重却低于专家3，体现了"序列比对"法易受排序位置的影响，同样的排序颠倒在前部比后部影响更大，前部分的颠倒会在更大程度上降低专家权重. 本文方法得出的结果为专家1和3权重相同，体现出所有指标处于同一地位，排序相关性不受所处位置的影响，因而所得的专家权重更加合理.

表2 “序相关性”确定的专家权重

Table 2 Experts' weighting determined by sequential correlation

专家1	同序对	异序对	C	D	τ_A	τ_A^l	μ_l
与专家2的序相关性	(x_2,y_3)和(x_1,y_1) (x_2,y_3)和(x_4,y_4) (x_3,y_2)和(x_1,y_1) (x_3,y_2)和(x_4,y_4) (x_1,y_1)和(x_4,y_4)	(x_2,y_3)和(x_3,y_2)	5	1	4/6	1	0.294 5
与专家3的序相关性	(x_2,z_3)和(x_1,z_4) (x_2,z_3)和(x_4,z_1) (x_3,z_2)和(x_1,z_4) (x_3,z_2)和(x_4,z_1)	(x_2,z_3)和(x_3,z_2) (x_1,z_4)和(x_4,z_1)	4	2	2/6		
专家2	同序对	异序对	C	D	τ_A	τ_A^l	μ_l
与专家1的序相关性	(x_2,y_3)和(x_1,y_1) (x_2,y_3)和(x_4,y_4) (x_3,y_2)和(x_1,y_1) (x_3,y_2)和(x_4,y_4) (x_1,y_1)和(x_4,y_4)	(x_2,y_3)和(x_3,y_2)	5	1	4/6	8/6	0.411 0
与专家3的序相关性	(y_3,z_3)和(y_2,z_2) (y_3,z_3)和(y_1,z_4) (y_3,z_3)和(y_4,z_1) (y_2,z_2)和(y_1,z_4) (y_2,z_2)和(y_4,z_1)	(y_1,z_4)和(y_4,z_1)	5	1	4/6		
专家3	同序对	异序对	C	D	τ_A	τ_A^l	μ_l
与专家1的序相关性	(x_2,z_3)和(x_1,z_4) (x_2,z_3)和(x_4,z_1) (x_3,z_2)和(x_1,z_4) (x_3,z_2)和(x_4,z_1)	(x_2,z_3)和(x_3,z_2) (x_1,z_4)和(x_4,z_1)	4	2	2/6	1	0.294 5
与专家2的序相关性	(y_3,z_3)和(y_2,z_2) (y_3,z_3)和(y_1,z_4) (y_3,z_3)和(y_4,z_1) (y_2,z_2)和(y_1,z_4) (y_2,z_2)和(y_4,z_1)	(y_1,z_4)和(y_4,z_1)	5	1	4/6		

2.3.3 专家的序关系不完全一致情形

不完全一致是指所有专家中有$p_h(1\leqslant p_h\leqslant p)$位专家给出的指标序关系相同,其余$p-p_h$位专家给出的序关系完全不同.因此,指标权重的计算分为:首先,通过Kendall相关系数计算这p_h位专家的总权重和其余$p-p_h$位专家各自的权重;其次,通过2.3.1节中的算法计算序关系相同的每位专家的权重,并将其与第一步得出的总权重相乘,进而求得这p_h位专家各自的权重;最后,综合专家权重和各专家得出的指标权重求得指标的最终权重.

3 应用算例及方法对比

3.1 应用算例

某公司拟从专业能力(x_1)、沟通能力(x_2)、工作态度(x_3)和精神面貌(x_4)四个方面对6位员工($o_1,o_2,\cdots,o_6$)的能力进行综合评价,以此进行优秀员工评选,预处理后的数据见表3.由于公司无法确定各方面应占的合理比重,现邀请4位专家给出指标的排序和相邻指标重要性的比值,各专家的评价信息如表4所示.

显然,从表4可以看出评价信息属于专家序

表3　各员工的表现数据

Table 3　Performance data for each employee

o	x_1	x_2	x_3	x_4
o_1	0. 42	0. 30	0. 55	0. 79
o_2	0. 63	0. 23	0. 46	0. 49
o_3	0. 37	0. 68	0. 76	0. 28
o_4	0. 24	0. 31	0. 83	0. 56
o_5	0. 71	0. 49	0. 20	0. 32
o_6	0. 52	0. 48	0. 61	0. 54

表4　各专家的评价信息

Table 4　Evaluation information given by each expert

专家	指标序关系	相邻指标重要程度比值
s_1	$x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	$w_2^1/w_1^1=([1.2,1.3],[1.1,1.5],0.5)$
		$w_1^1/w_4^1=([1.1,1.3],[1.0,1.6],0.7)$
		$w_4^1/w_3^1=([1.3,1.4],[1.2,1.5],0.6)$
s_2	$x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	$w_2^2/w_1^2=([1.1,1.2],[1.0,1.5],0.6)$
		$w_1^2/w_4^2=([1.1,1.4],[1.0,1.6],0.5)$
		$w_4^2/w_3^2=([1.2,1.4],[1.0,1.7],0.8)$
s_3	$x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	$w_2^3/w_1^3=([1.2,1.5],[1.1,1.7],0.9)$
		$w_1^3/w_4^3=([1.2,1.3],[1.1,1.5],0.6)$
		$w_4^3/w_3^3=([1.1,1.3],[1.0,1.5],0.5)$
s_4	$x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$	$w_1^4/w_2^4=([1.1,1.2],[1.0,1.3],0.5)$
		$w_2^4/w_4^4=([1.2,1.3],[1.1,1.5],0.8)$
		$w_4^4/w_3^4=([1.3,1.5],[1.1,1.7],0.6)$

注：w_k^l/w_{k+1}^l表示第l位专家给出的相邻指标x_k和x_{k+1}之间的重要程度比值.

关系不完全一致的情形，计算过程如下：

步骤1　通过Kendall相关系数得出序关系一致的前三位专家的总权重为0. 853 9，专家4的权重为0. 146 1.

步骤2　采用2. 2节步骤2中随机抽样的方式，从各专家给出的区间粗糙数中随机产生数据作为相邻指标的重要程度比值，进而通过G1法的计算过程得出各专家在一次模拟中的指标权重.

步骤3　通过2. 3. 1节的步骤2，求出序关系一致的前三位专家的权重，基于此分配三位专家的总权重，得到最终的专家权重.

步骤4　将每次模拟得出的专家权重和各专家给出的指标权重通过式(9)结合，求得兼顾所有专家意见的指标权重.

步骤5　采用2. 2节步骤3中的"线性加权"方式，得到一次模拟中各被评价对象的综合评价值.

步骤6　重复上述步骤，通过充分模拟，最终求得的优胜度矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0.9825 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5631 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 0.0965 \\ 0 & 0.4369 & 0 & 0.5 & 0.021 & 0 \\ 0.0175 & 1 & 0 & 0.9979 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.9035 & 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

步骤7　基于优超数得到最佳排序，并从优胜度矩阵中导出相邻被评价对象间的优胜概率，最终得到的可能性排序为$o_6 \overset{0.9035}{\succ} o_3 \overset{1}{\succ} o_1 \overset{0.9825}{\succ} o_5 \overset{1}{\succ} o_2 \overset{0.5631}{\succ} o_4$. 需要说明的是，可能性排序是在模拟充分的条件下获取的最优最稳定(最大概率发生)的排序结果，当小概率事件发生时，排序会有所变化. 例如o_2以56. 31%的概率优于o_4，同时也意味着o_4有43. 69%的可能性优于o_2. 这对不确定评价环境中出现的以少胜多、以弱胜强、循环克星等现实情形具有很好的解释性.

3. 2　方法对比

本文提出的方法是一种具有一定普适性的方法，适用于区间粗糙数、区间数、实数等多种数据类型(区间数和实数可看作特殊情况下的区间粗糙数). 为验证本方法的有效性，引用文献[10]的算例进行分析. 某商业银行邀请3位专家从企业还款能力(x_1)、还款意愿(x_2)、抵质押情况(x_3)和宏观环境(x_4)4个方面对4家企业(o_1, o_2, o_3, o_4)进行风险评估，评价信息见表5.

表5　预处理后的评价信息

Table 5　Pre-processed evaluation information

o	x_1	x_2	x_3	x_4
o_1	1. 00	1. 00	0. 85	1. 00
o_2	0. 53	0. 33	0. 21	0. 86
o_3	0. 98	0. 91	0. 00	0. 00
o_4	0. 00	0. 00	1. 00	0. 37

3位专家给出的指标排序和相邻指标的重要性之比分别为：$x_3 \overset{[1.0,1.4]}{\succ} x_2 \overset{[1.1,1.2]}{\succ} x_1 \overset{[1.2,1.4]}{\succ} x_4$；$x_3 \overset{[1.2,1.4]}{\succ} x_2 \overset{[1.2,1.3]}{\succ} x_1 \overset{[1.5,1.6]}{\succ} x_4$；$x_3 \overset{[1.3,1.5]}{\succ} x_2 \overset{[1.2,1.4]}{\succ} x_4 \overset{[1.3,1.5]}{\succ} x_1$. 符号"$\succ$"上方的区间数代表相邻指标的重要程度比值.

通过随机模拟求解，得出的优胜度矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.7240 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0.9988 \\ 0 & 0.2760 & 0.0012 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

根据式(8)算得每个企业的优超数为：$g(o_1)=3, g(o_2)=1, g(o_3)=2, g(o_4)=0$. 根据优

超数,4家企业的排序如下:$o_1 \overset{1}{\succ} o_3 \overset{1}{\succ} o_2 \overset{0.7240}{\succ} o_4$,文献[10]得出的结果为$o_1 \succ o_3 \succ o_2 \succ o_4$. 对比可知,虽然两种方法得到的排序一致,但可能性排序在得到排序的基础上还能包含相邻被评价对象的优胜概率,提供了更丰富的结论信息.

4 结 语

1)本文方法区间粗糙数可以保留更多的判断信息,是对已有研究中以实数和区间数作为相邻指标重要性之比的细化拓展,数据形式更加贴近现实判断.

2)给出了序关系完全一致、完全不一致、不完全一致三种情况下的赋权方式,通过序相关性和区间粗糙数贴近度确定专家权重,使得指标的权重集结了所有专家的判断信息.

3)针对已有方法不能解决区间粗糙数群体评价问题,并且绝对形式的排序结论不适用于面向区间粗糙数的不确定信息环境,本文通过随机模拟,在充分仿真的前提下得到被评价对象之间带概率特征的可能性排序,提升了评价结论对群体评价问题的解释性.

本文提出的方法为包含不确定信息或不能准确给出比较判断信息的评价问题提供了一种新的解决思路. 文中仅考虑了区间粗糙数形式(实数、区间数是其特殊情况),但是随着互联网的发展,不确定信息拓展出许多信息形式(如语言信息、模糊信息),甚至出现多种不确定信息共存的情形,因此可以针对上述情形开展进一步研究. 本文仅考虑了静态的群体评价,未来可将其拓展至多阶段动态情境,研究如何在多阶段(多时期)下综合专家意见得出合理的评价结论.

参考文献:

[1] 易平涛,李伟伟,郭亚军.综合评价理论与方法[M].北京:经济管理出版社,2019.
(Yi Ping-tao, Li Wei-wei, Guo Ya-jun. Comprehensive evaluation and methods [M]. Beijing: Economic Management Press,2019.)

[2] Saaty T L.Concepts, theory, and techniques rank generation, preservation and reversal in the analytic hierarchy decision process[J].*Decision Sciences*,1987,18(2):157–177.

[3] Saaty T L. Decision-making with the AHP: why is the principal eigenvector necessary [J]. *European Journal of Operational Research*,2003,145(1):85–91.

[4] Chen Y, Li W W, Yi P T. Evaluation of city innovation capability using the TOPSIS-based order relation method: the case of Liaoning Province, China [J]. *Technology in Society*,2020,63:101330.

[5] Yi P T, Li W W, Zhang D N. Sustainability assessment and key factors identification of first-tier cities in China [J]. *Journal of Cleaner Production*,2021,281:125369.

[6] Ying L, Du Q Y, Cheng Z H, et al. Generation model of optimal emergency treatment technology for sudden heavy metal pollution based on group-G1 method [J]. *Polish Journal of Environmental Studies*,2021,30(6):5899–5908.

[7] Dou J M, Ma H Y, Yang J J, et al. An improved power quality evaluation for LED lamp based on G1-entropy method[J].*IEEE Access*,2021,9:111171–111180.

[8] Qu J H, Meng X L, Hu Q, et al.A novel two-stage evaluation system based on a Group-G1 approach to identify appropriate emergency treatment technology schemes in sudden water source pollution accidents[J]. *Environmental Science and Pollution Research*,2016,23(3):2789–2801.

[9] 张发明.区间标度群组序关系评价法及其运用[J].系统工程理论与实践,2013,33(3):720–725.
(Zhang Fa-ming. Interval scales rank correlation analysis group evaluation method and its application [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*,2013,33(3):720–725.)

[10] 程砚秋.基于区间相似度和序列比对的群组G1评价方法[J].中国管理科学,2015,23(sup1):204–210.
(Cheng Yan-qiu. A group G1 evaluation method based on interval similarity and sequence comparison [J]. *Chinese Journal of Management Science*,2015,23(sup1):204–210.)

[11] Pawlak Z.Rough sets[J].*International Journal of Computer & Information Sciences*,1982,11(5):341–356.

[12] Pamucar D, Chatterjee K, Zavadskas E K. Assessment of third-party logistics provider using multi-criteria decision-making approach based on interval rough numbers [J]. *Computers & Industrial Engineering*,2019,127:383–407.

[13] 吕跃进,杨燕华.区间粗糙数层次分析法[J].系统工程理论与实践,2018,38(3):786–793.
(Lyu Yue-jin, Yang Yan-hua. Analytic hierarchy process based on interval rough number[J].*Systems Engineering: Theory & Practice*,2018,38(3):786–793.)

[14] Slowinski R, Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*,2000,12(2):331–336.

[15] 曾玲,曾祥艳.一类区间粗糙数型多属性决策方法研究[J].控制与决策,2010,25(11):1757–1760.
(Zeng Ling, Zeng Xiang-yan.Research on a class of multiple attribute decision making method with interval rough numbers[J].*Control and Decision*,2010,25(11):1757–1760.)

[16] 翁世洲,吕跃进.区间粗糙数的排序方法及其应用[J].南京大学学报(自然科学),2015,51(4):818–825.
(Weng Shi-zhou, Lyu Yue-jin. Sorting method with interval rough number and its application [J]. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*,2015,51(4):818–825.)

[17] 易平涛,董乾坤,李伟伟.残缺数据下动态随机算法及应用[J].运筹与管理,2021,30(6):6–11.
(Yi Ping-tao, Dong Qian-kun, Li Wei-wei. Dynamic stochastic algorithm based on incomplete data and its application [J]. *Operations Research and Management Science*,2021,30(6):6–11.)

[18] Kendall M G. A new measure of rank correlation [J]. *Biometrika*,1938,30(1/2):81–93.