

## 优化算法中均值信息利用研究

王方<sup>1,2</sup>, 王鹏<sup>3</sup>, 焦育威<sup>3</sup>

(1. 中国科学院成都计算机应用研究所, 四川成都 610041; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;

3. 西南民族大学计算机科学与工程学院, 四川成都 610225)

**摘要:** 研究了启发式优化算法中种群向均值点迁移的策略, 并发现该策略对于提升算法性能具有重要影响, 同时具备物理和数学含义. 通过极大似然估计方法对基态波函数进行参数估计, 建立了量子系统达到基态时最优解概率密度函数与种群均值点之间的联系, 并从动力学的角度解释了种群均值点的物理意义. 通过在几种经典优化算法上添加利用均值点位置信息的操作, 在CEC2013测试集与摄像机布局优化的工程应用上进行对照实验, 实验结果表明合理利用均值点位置信息可以有效提升算法的性能.

**关键词:** 量子动力学; 优化问题; 均值信息; 动力学方程; 极大似然估计

中图分类号: TP 183 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2024)01-0049-09

## Research on the Utilization of Mean Value Information in Optimization Algorithm

WANG Fang<sup>1,2</sup>, WANG Peng<sup>3</sup>, JIAO Yu-wei<sup>3</sup>

(1. Chengdu Institution of Computer Application, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. School of Computer Science and Engineering, Southwest Minzu University, Chengdu 610225, China. Corresponding author: WANG Peng, E-mail: qhoalab@163.com)

**Abstract:** The strategy of population migration towards the mean point in heuristic optimization algorithms is investigated, and the strategy is found that it has significant impact on the algorithm's performance and has both physical and mathematical implications. By using the maximum likelihood estimation method, the parameters of the ground state wave function are estimated, and the connection between the probability density function of the optimal solution when the quantum system reaches the ground state and the population mean point is established. The physical significance of the population mean point is explained from a dynamic perspective. The operations that utilize the information of the mean point's position is added to several classical optimization algorithms and a comparative experiment is carried out on the CEC2013 test set and the engineering application of camera layout optimization. Experimental results show that reasonable use of the mean point position information can effectively improve the performance of the algorithm.

**Key words:** quantum dynamics; optimization problems; mean-value information; kinetic equation; maximum likelihood estimation

1995年Kennedy和Eberhart通过模拟鸟群觅食的社会学行为提出粒子群优化(particle swarm optimization, PSO)算法<sup>[1]</sup>. 在经典粒子群优化算法中, 粒子的更新过程受历史最佳位置和整个种群粒子最佳位置共同影响. 2000年Kennedy对粒

子群社会学模型进行了扩展与验证. 他将定型观念的社会心理学隐喻引入粒子群算法, 依据搜索行为将粒子划分为不同的群体, 然后以不同群体中的历史最佳位置的均值代替单个粒子的最佳位置、邻域的最佳位置或同时替代二者, 结果

收稿日期: 2022-07-29

作者简介: 王方(1976-), 男, 上海嘉定人, 中国科学院大学博士研究生; 王鹏(1975-), 男, 四川乐山人, 中国科学院大学教授, 博士生导师.

表明粒子个体向它当前所在的群体中心学习有利于提高算法性能<sup>[2]</sup>. Xu 等利用 PSO 中的平均速度信息设计出一种反馈控制策略,将平均速度代入粒子位置更新公式视为粒子在均值方向上的一种学习,提高了粒子群算法跳出局部最优的能力,收敛速度和精度得到显著提高<sup>[3]</sup>. Yu 等提出一种具有空间变换扰动的多重学习粒子群优化算法. 算法在粒子更新中引入了所有粒子的历史最佳位置的均值分量,该策略也是对所有粒子历史最佳位置所构成集合的均值信息加以利用. 不论是采用群体坐标均值替换当前个体或是使用平均速度抑或是直接在更新公式中引入均值坐标向量,都有效地提高了算法性能<sup>[4]</sup>.

Sun 等受量子力学和粒子群优化算法轨迹分析的启发,将粒子引入到量子系统下,基于势阱的基态波函数设计算法的采样函数并用于当前最佳粒子周围的采样<sup>[5]</sup>,后期将平均最佳位置引入算法,并提出了 PSO 的新版本——量子粒子群优化(quantum-behaved particle swarm optimization, QPSO)算法<sup>[6]</sup>. Xi 等<sup>[7]</sup>提出粒子平均位置的加权策略,该策略根据粒子的适应度值加权平均最佳位置,使得算法的全局搜索和局部搜索达到了更好的平衡,从而提高了算法性能.

Wang 等提出多尺度量子谐振子优化算法(multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm, MQHOA)<sup>[8]</sup>,并对 MQHOA 模型进行补充与完善,提出具有能级稳定过程的 MQHOA 优化算法<sup>[9]</sup>,改进后的算法在求解精度和成功率等方面得到显著提升. 算法在能级稳定过程中采取以采样点的坐标均值替换当前适应度最差采样点的策略,实验表明该策略大幅提高了算法的寻优精度. 文献[10]从跳出局部最优解的视角对 MQHOA 算法中的均值替换策略进行了解释,并对比分析了多种替换策略,结果表明能级下降过程若采用随机迁移策略,算法性能并无显著提升.

Wang 等受大象群体游牧行为启发提出象群优化(elephant herding optimization, EHO)算法<sup>[11]</sup>,算法中适应度最佳的大象迁移行为完全受象群均值影响. 类似地还有 2017 年 Ngaam 等对布谷鸟(cuckoo search, CS)算法的改进<sup>[12]</sup>,其将布谷鸟算法引入量子模型,提出一种基于量子机制的非齐次搜索策略. 该策略下布谷鸟的坐标更新有 1/3 的概率向鸟群均值坐标方向飞行,改进后的算法显著优于原 CS 算法. Huang 等对蝙蝠

算法进行改进,提出具有量子行为的蝙蝠算法(Gaussian quantum bat algorithm, GQBA). 该算法使用一种平均位置方向的飞行策略帮助蝙蝠跳出局部最优解<sup>[13]</sup>,使得蝙蝠算法寻优能力得到增强.

以上各种算法及其改进版本似乎蕴含着保障优化算法性能的一种基本操作,即均值信息的利用. 均值信息的有效利用能提高算法求解精度,但目前尚未有文章对均值信息在优化算法中的具体含义给出明确的说明.

本文首先基于优化算法的量子动力学模型将函数优化问题转化为求解以目标函数为约束势阱的基态波函数问题,用波函数描述解的分布情况;然后以目标函数 Taylor 二阶近似的函数结构作为对黑盒模型下目标函数的一种先验猜测,由此将粒子坐标(采样点)均值赋予物理意义,即粒子坐标均值为当前基态下一个势能较低点的估计值;再以约束势阱为目标函数的粒子扩散运动为基础,通过粒子运动的马尔可夫过程说明该过程朝着能量基态收敛;接着利用极大似然估计构建粒子在不同尺度下的基态波函数和最优解的概率分布模型;最后从量子的视角解释了利用采样点均值信息改进算法的可行性和有效性.

## 1 优化问题的 Schrödinger 方程

### 1.1 优化问题解的概率描述

对于优化问题而言,一般情况下目标函数  $f(x)$  的信息未知. 在不带有任何先验知识的情况下,获取信息的唯一方式是不断对目标函数  $f(x)$  进行采样. 采样在某种程度上是对目标函数  $f(x)$  的测量,即在有限的计算资源内不断测量以获取全局最优的近似解. 在不同阶段中采样所得的最优解属于概率意义上的全局最优解,可通过波函数在概率层面进行描述<sup>[14]</sup>.

在量子系统下,函数优化问题被转化为寻找系统势能最低点问题,即求解粒子在目标函数  $f(x)$  的约束下的基态能量,因此优化问题的 Schrödinger 方程可表示为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + f(x) \right) \psi(x,t). \quad (1)$$

式中:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  是动能项;  $\psi(x,t)$  为粒子在  $t$  时刻迭代时的波函数. 优化问题波函数的模方  $|\psi(x,t)|^2$  根据波恩的概率意义解释为  $t$  时刻解的

概率分布. 因此寻找最优解的过程就是波函数  $\psi(x, t)$  随时间的概率演化过程. 但目标函数  $f(x)$  及其对应的基态波函数通常都比较复杂, 无法直接求解, 因此需要对目标函数  $f(x)$  进行近似.

## 1.2 求解优化问题的动力学过程

粒子在以目标函数  $f(x)$  为势能约束下的空间位置随时间演化过程可被 Fokker-Planck 方程所描述<sup>[14]</sup>, 该方程所描述粒子的运动过程受随机力与势能共同作用, 势能项对应于目标函数  $f(x)$  的梯度, 朝梯度下降的方向运动即势能下降, 该过程的 Fokker-Planck 方程见式(2):

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \psi(x, t). \quad (2)$$

式中:  $D$  对应 Schrödinger 方程中的尺度参数<sup>[15]</sup>,  $D$  越小, 系统的量子效应越小, 解的精度越高.  $D$  从大到小的收敛过程反映了粒子从全局搜索向局部搜索的过渡. 以粒子历史采样值衡量  $\partial f(x)/\partial x$ , 若  $\partial f(x)/\partial x > 0$ , 则表明当前运动方向为能量梯度上升的方向, 算法有阻止向该方向移动的趋势, 反之亦然.

Fokker-Planck 方程本质上是马尔可夫性在扩散过程中的体现, 因此粒子的运动过程可以看作一个受扩散行为驱动和目标函数作为保守力场驱动的随机运动. 扩散行为对应优化算法中的采样操作, 如 PSO 中的速度项、QPSO 中的采样波函数和遗传算法中的交叉变异等. 而目标函数作为保守力场的驱动力则对应优化算法中势能差  $(|f(x)_{t-1} - f(x)_t|)$  产生的作用力, 它受函数梯度的影响. 时间序列上的多次采样是对梯度信息的获取, 粒子不断向低势能方向运动的过程是粒子受保守力场和势能差共同作用的结果.

量子系统中目标函数  $f(x)$  的信息通常处于未知状态, 任意一次采样的解都有可能是最优解, 除非下一次采样的解优于当前解<sup>[16]</sup>. 当对目标函数  $f(x)$  的信息一无所知时, 目标函数可视为常数, 即任意一点都可能为最优解且概率相等<sup>[16]</sup>. 此时优化问题的 Schrödinger 方程中的势能项为任意常数  $k$ , 此时式(2)变为

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k \right] \psi(x, t). \quad (3)$$

当  $k$  取 0 时, 式(3)与扩散方程同构, 扩散系数为  $D$ . 此时, 粒子位置随时间变化的概率与高斯函数同构, 即粒子在无任何函数信息情况下扩散过程中的位置更新情况满足正态分布, 这一点在文献[14]中得到详细论证. 因此, 优化算法以

正态分布进行采样可看作是黑盒模型下的扩散行为. 将格林函数进行 Box-Muller 变换后, 得到粒子在  $t+1$  时刻的位置更新公式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_i^{t+1} &= \mathbf{x}_i^t + \sigma \cdot \sqrt{-2 \ln r} \cos(2\pi r), \\ r &\sim U(0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:  $\sigma$  为当前搜索尺度;  $\mathbf{x}_i^t$  是粒子在  $t$  时刻的位置向量.

**定义 1** 粒子状态集. 粒子在  $t$  时刻的状态为  $\zeta(t)$ , 其中  $\zeta(t) = \{X(t), g^*(t)\}$ ,  $X(t)$  为  $t$  时刻所有解,  $g^*(t)$  为  $t$  时刻势能最低的位置.

因为  $\zeta(t+1) = \{X(t+1), g^*(t+1)\}$  的取值只与当前时刻的状态  $\zeta(t)$  有关, 若  $\zeta(t)$  的状态空间为  $S$ , 对于任意时刻  $t(t \geq 1)$ ,  $\zeta(t) \in S$  满足:

$$p(\zeta(t+1) | \zeta(t), \dots, \zeta(0)) = p(\zeta(t+1) | \zeta(t)). \quad (5)$$

因此粒子在  $t$  时刻的状态序列  $\{\zeta(t), t \geq 1\}$  为马尔可夫链.

**定义 2** 势能最低状态集. 当前尺度为  $\sigma$ , 粒子在目标函数  $f(x)$  下的能量最低点位置集合记为  $M$ , 即优化问题全局最优解的集合, 它包含优化问题的理论最优解  $X^*$ . 由此  $M = \{\zeta^* = (x^{(t)}, x^{(t-1)}, \dots, x^{(0)}, X^*), t \geq 1\}$ ,  $\zeta^* \in M$  为不同尺度下粒子最优解状态, 对应量子系统中不同尺度下的基态.

当粒子达到当前尺度  $\sigma$  的基态  $\zeta(t)$  时, 下一个状态  $\zeta(t+1)$  也为当前尺度的基态, 即满足:

$$\left. \begin{aligned} P(\zeta(t+1) \in M | \zeta(t) \in M) &= 1, \\ P(\zeta(t+1) \notin M | \zeta(t) \in M) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此  $M$  为闭集. 由于粒子不断地进行采样操作, 会获取一定的梯度信息. 但这种梯度信息并不是严格定义的梯度值, 而是在单个粒子历史采样过程中对比较优解与较差解而得到梯度下降方向, 继而产生较优解替换较差解的行为, 此行为被式(2) Fokker-Planck 方程中的拖曳项  $\partial f(x)/\partial x$  所描述. 而  $M$  集只保存粒子历史位置中适应度最好的值, 因此只要迭代过程继续进行,  $M$  便会不断接近全局最优解. 与此同时, 当  $M$  不再更新时, 当前尺度下的量子系统即可认定为达到基态.

粒子在  $f(x)$  约束下的运动过程对应于种群向全局最优解迁移的过程, 其构建的状态序列具有不可约性、非周期性和正常返回性. 当在尺度  $\sigma$  下达到平稳分布时, 判定粒子达到当前尺度的基态, 且全局最优解的概率分布被当前的基态波函

数所描述.

## 2 目标函数的 Taylor 近似

### 2.1 Taylor 近似下的基态波函数

在定义域内的任意一点  $x_0$  的邻域  $U(x_0)$  中, 目标函数  $f(x)$  的 Taylor 展开形式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots \quad (7)$$

对式(7)进行分析, 可以看到目标函数二阶近似下对应的基态波函数已能较好地表达优化问题的解, 而更高阶的 Taylor 展开所对应势能的 Schrödinger 方程很难解出一个简单的概率分布作为基态波函数. 因此, 选取 Taylor 二阶展开来构建目标函数的近似函数.

基于目标函数  $f(x)$  在结构上与二次函数具有相似性. 这种相似性可以作为对目标函数  $f(x)$  的一种先验假设, 而邻域  $U(x_0)$  则对应于采样的尺度. 对目标函数的信息获取过程可以看作是一个大尺度的二次函数结构不断向最优解  $x_0^*$  逼近的过程. 当前尺度  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 下, 在定义域内的任意一点  $x_0$  的邻域  $U(x_0)$  中对目标函数  $f(x)$  的假设结构记为  $f_\sigma(x)$ , 满足:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2. \quad (8)$$

当尺度  $\sigma$  足够小且采样点收敛于最优解  $x_0^*$  时,  $f(x_0)$  为量子系统的基态能量,  $x_0^*$  为能量零点位置, 且  $f'(x_0) = f'(x_0^*) = 0$ , 因此式(8)可化简为

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2. \quad (9)$$

将式(9)中的  $f''(x_0)$  记为常数  $k$ , 此时的 Schrödinger 方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \right) \psi(x, t). \quad (10)$$

经过对目标函数结构上的近似处理, 此时的波函数解为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \cdot H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right). \quad (11)$$

式中:  $n$  代表能级;  $m$  为粒子的质量;  $\omega$  是谐振子的频率;  $H_n$  为厄米多项式, 当  $n$  趋于 0 时, 满足:

$$\lim_{n \rightarrow 0} |\psi_n(x)|^2 = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (12)$$

$n$  趋于 0 的过程即是当前尺度  $\sigma$  下波函数向

基态波函数的演化过程. 显然, 基态波函数与高斯函数同构, 即

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma^2}} = N(x, \sigma^2). \quad (13)$$

此时基态波函数是对目标函数  $f(x)$  的解分布的先验假设. 其根据目标函数的 Taylor 二阶展开结构和当前的搜索尺度, 在采样点  $x$  邻域内构建开口向上的二次函数作为目标函数的近似函数, 然后求解 Schrödinger 方程得到描述能量最低点的概率分布的基态波函数, 最终近似函数的全局最优解随迭代过程的进行不断逼近目标函数的全局最优解.

### 2.2 基态波函数的极大似然估计

目标函数最优解的概率分布为正态分布, 当前尺度下解的概率密度函数形式为  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma$  为尺度. 其具体的计算见(14):

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{2D}, \\ D &= \frac{\hbar^2}{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中,  $m$  为粒子质量, 随着尺度  $\sigma$  由大变小,  $m$  将由小变大. 算法的采样尺度  $\sigma$  从大到小的演化过程对应于优化算法从全局搜索向局部搜索的演化过程. 从量子效应的角度看, 一个完整的优化过程是一个量子效应由大变小的过程, 对应优化问题的解的确定性由小变大的过程.

对优化过程而言, 不同尺度  $\sigma$  有着各自的基态波函数, 它们不存在理想的表现形式. 虽然解的概率密度函数中的期望  $\mu$  未知, 但是当前粒子的分布和搜索尺度已知, 因此可以使用极大似然估计的方法估计当前基态波函数中的参数  $\mu$ .

当粒子系统在当前尺度达到基态, 粒子  $X$  作为随机变量且满足正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_i (i=1, \dots, k) \in X$ ,  $k$  为粒子数量, 此时极大似然函数的公式为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^k f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^k e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k (x_i-\mu)^2}. \quad (15)$$

其中  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , 取对数的似然函数为

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \ln \left( (2\pi\sigma^2)^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k (x_i-\mu)^2} \right) = \\ &= -\frac{k}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^k \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = \end{aligned}$$

$$-k \ln \sqrt{2\pi} - \frac{k}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2. \quad (16)$$

求解似然方程:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\hat{\mu}} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{\mu}) = 0. \quad (17)$$

得

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i = \bar{x}. \quad (18)$$

此时的基态波函数  $\psi_0$  为以  $\bar{x}$  为期望、当前尺度  $\sigma_s$  为方差的高斯函数,其中  $\sigma_s$  为先验分布的参数,  $\psi_0$  描述了最优解的概率分布. 显然,通过极大似然估计的波函数中,最优解概率最大的位置为当前种群的均值. 因此均值替换策略是对当前基态下最优解的预测,该策略是以目标函数的 Taylor 二阶展开式的结构作近似时最优解分布概率模型下的充分条件.

### 2.3 均值替换

优化过程可看作量子系统下粒子受随机力和势能梯度影响下向基态演化的运动过程,该过程具有马尔可夫性. 粒子在不同的尺度下,经过一定时间的运动,其分布会达到平稳态,也称为基态. 对基态波函数进行参数估计,然后通过基态波函数对解的分布进行概率描述,即当量子系统在当前尺度  $D$  达到基态时,解的概率分布服从正态分布  $N(\bar{x}, \sigma^2)$ ,  $\bar{x}$  为粒子的均值,  $\sigma^2 = 2D$ . 根据正态分布的特点,若求解误差为  $\varepsilon$ ,当采样点  $x = \bar{x}$  时,可使得  $\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} N(\bar{x}, \sigma^2) dx$  最大,即在均值点附近找到最优解的概率最大.

近似函数  $f_\sigma(x)$  是基于目标函数的 Taylor 二阶展开式具有二次函数结构的先验假设而利用当前采样点信息对目标函数的一种“假想”. 目标函数  $f(x)$  实际采样点在近似函数  $f_\sigma(x)$  上的投影见图 1a. 由于近似函数是一个开口向上的二次函数,式(19)显然成立:

$$\left. \begin{aligned} f_\sigma(\bar{x}) &< f_\sigma(x_{\text{worst}}), \\ \bar{x} &= \sum_{i=1}^k x_i, \\ x_{\text{worst}} &= \max \{x_{i,i=1 \dots k}\}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中,  $k$  为采样点数量. 采样点均值  $\bar{x}$  的适应度  $f_\sigma(\bar{x})$  在以开口向上的二次函数对目标函数  $f(x)$  逼近过程中,适应度始终要优于最差解. 由此衍生出对均值信息利用的一种简明策略,即以种群的坐标均值生成一个新解替换当前的最差解来完成种群整体向均值方向的迁移,将这种策略称

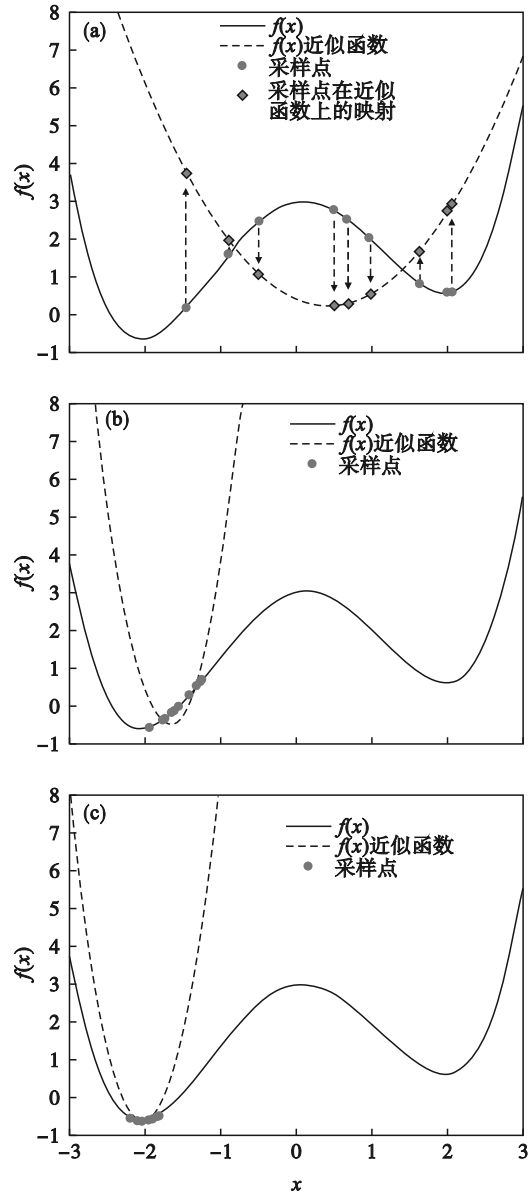


图 1 近似函数在目标函数上的收敛过程  
 Fig. 1 Convergence process of the approximate function on the objective function

(a) 目标函数采样点在近似函数上的映射;  
 (b) 不同尺度下的近似函数; (c) 一小尺度下的近似函数

为“均值替换”.

图 1a 展示了在大尺度搜索下对目标函数的近似. 在算法初始化阶段,采样点在目标函数的定义域内随机生成;迭代开始后,采样点的运动过程是受扩散行为驱动和目标函数作为保守力场驱动的随机运动过程;当量子系统达到当前尺度的基态时,使用基态波函数的中心(采样群体的均值)估计全局最优解位置. 图 1 旨在说明对目标函数结构的先验假设,拟合只是一种具体的先验假设展现形式,故可以采用任意拟合方式,这里采用最小二乘法进行拟合. 图 1a 到图 1c 展示了随尺度缩小,近似函数通过采样点的迁移向

全局最优解附近的移动过程. 如图 1 所示,在大尺度时,近似函数的最优解与目标函数的全局最优解在横轴上的投影距离相差较远,随着尺度缩小,近似函数的最优解与目标函数的全局最优解在横轴上的投影距离逐渐缩短.

### 3 有效性验证

#### 3.1 CEC2013 测试集上的实验与分析

用种群均值坐标替换当前最差解的策略来实现对最优解位置的估计,以证明用种群坐标均值对当前最优解分布进行估计的有效性.

以算法 MQHOA, PSO 和 QPSO 为例,分别将种群坐标均值替换最差解的操作添加到 MQHOA 算法的能级下降过程中和 PSO, QPSO 算法的粒子坐标更新操作后. 实验在 CEC2013 测试集上进行,该测试集由 Liang 等<sup>[16]</sup>在 2012 年 12 月的技术报告中提出,明确指出在优化过程中,需以求解黑盒问题的方式对测试集中的函数进行求解,不能通过函数表达式对算法注入先验信息,本文的实验过程严格按照 CEC2013 定义的标准执行. 所有对照实验重复 51 次,单次运算的最大迭代次数为  $10\ 000 \times d$ ,  $d$  为维度,实验维度分别设置为 30 和 50. 测试集包括 28 个测试函数,根据函数结构不同,划分为单峰函数( $f_1 \sim f_5$ )、多峰函数( $f_6 \sim f_{20}$ )和复合函数( $f_{21} \sim f_{28}$ ),所有函数的定义域为  $[-100, 100]$ ,实验环境为 Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @2.20 GHz, 2.21 GHz, 内存 16GB,实验结果见图 2 和图 3.

从 MQHOA 算法实验组中可以看出,带均值替换操作的实验组 MQHOA-mean 在求解误差、求解误差均值和最优解上都显著优于无均值替换的实验组 MQHOA 以及在求均值时去掉最优解和最差解的实验组 MQHOAwmn. 选择 MQHOAwmn 的原因在于该替换策略在文献[11]中被验证了是一种具有优势的替换策略,但该策略尚未在 CEC2013 等复杂测试集上进行测试, MQHOAwmn 在求均值坐标时由于缺少最优解和最差解,相比于实验组 MQHOA-mean 而言,在极大似然估计环节缺少样本,因此对当前基态下的最优解的位置评估误差较大.

在 PSO 的实验组中,对单峰函数和复合函数的求解中,求解的平均误差有显著降低,最优解精度也有显著提升,反映了以所有粒子的均值坐标替换最差解的策略是有效的,并未导致粒子过早收敛. 带有种群均值替换的实验组 PSO-mean

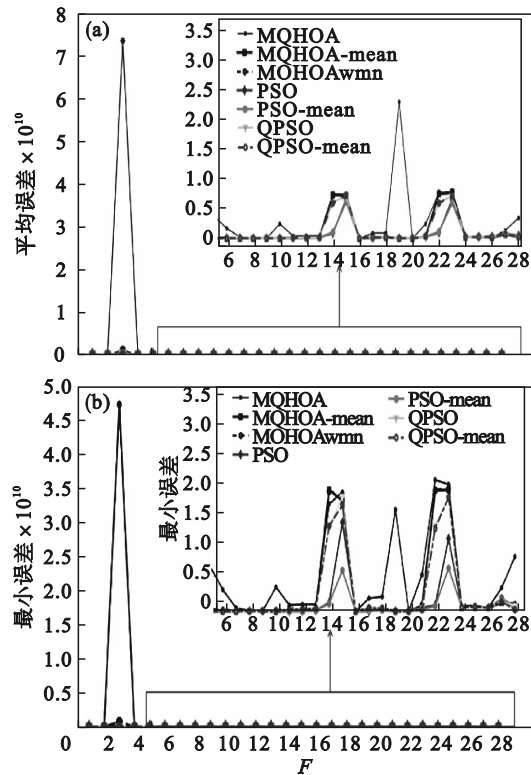


图2 CEC2013测试函数维度为30时各算法的平均误差和最小误差

Fig. 2 Average error and the minimum error of each algorithm for the CEC2013 test function on 30 dimensions  
(a)—平均误差; (b)—最小误差.

最优解的求解精度在 26 个函数上得到了提高,所求解的均值精度在 17 个函数上得到了提高,这 17 个函数大部分集中在单峰函数和多峰函数,而对于复合函数则提高不大,最为明显的是  $f_{14}$ . 在维度为 30 时,PSO 与 PSO-mean 间的平均求解误差达到一个数量级的差距. 这表明通过基态波函数的中心(采样点均值)预测最优解的方法在大部分函数上是有效的,但当遇到某些复杂的多峰函数时,这种预测方法也会失效.

对 QPSO 而言,带有种群均值替换的实验组 QPSO-mean 在对单峰函数和多峰函数的优化中,无论求解的均值还是最优解的精度都得到了显著提升. 在对复合函数的优化过程中, QPSO-mean 的最优解较 QPSO 的最优解具有显著优势,但平均精度提升不明显.

为进一步评估添加均值替换策略后算法的求解能力是否有效提高,将对照组重复 51 次的实验结果进行 Wilcoxon 符号秩检验(维度为 30). 如果添加均值替换行为,算法的 51 次重复实验均值小于未添加均值替换行为的对照组,且 Wilcoxon 符号秩检验为真(显著性水平小于

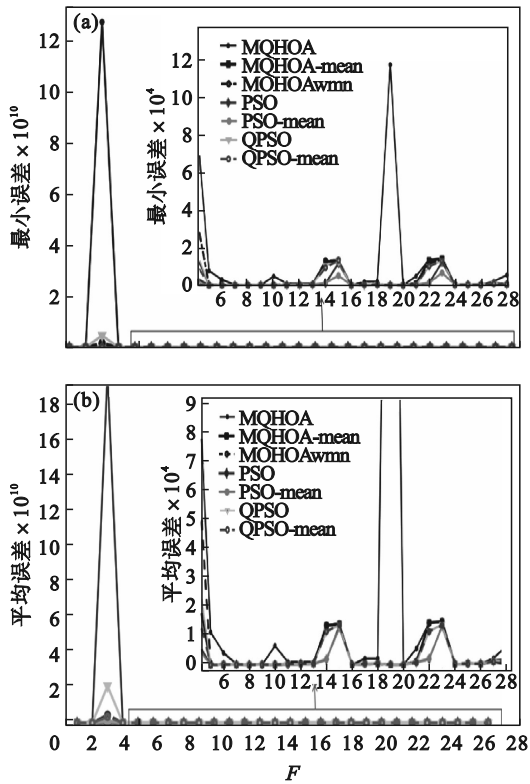


图3 CEC2013测试函数维度为50情况下各算法的平均误差和最小误差

Fig. 3 Average error and the minimum error of each algorithm for the CEC2013 test function on 50 dimensions (a)—平均误差; (b)—最小误差.

0.05,  $P < 0.05$ )时,则认为添加均值替换行为的算法求解结果显著优于原算法,反之亦然. 实验结果见图4.

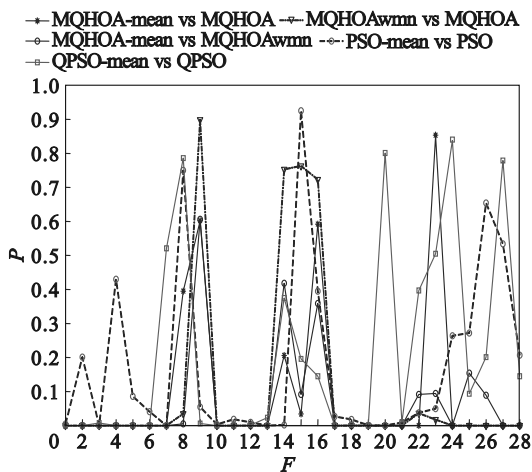


图4 51次重复实验的Wilcoxon符号秩检验结果  
Fig. 4 Results of the Wilcoxon signed-rank test for 51 replicate experiments

图4中MQHOA系列对照实验检测结果表明,添加均值替换策略的算法MQHOA-mean在23个测试函数上的优化结果要显著优于原算法

MQHOA. 算法MQHOAwmn所采用的均值替换方案缺少样本,但较MQHOA算法而言,在22个测试函数上也具有显著优势,而MQHOA-mean算法在20个测试函数上又显著优于MQHOAwmn算法. 检测结果验证了均值替换的有效性,且样本越多,对最优解的估计越准确. PSO和QPSO算法在超过半数的测试函数中均表现出显著性优势. 对于类似的启发式算法而言,以采样点均值方向作为对全局最优解的预判具有一定的通用性和有效性.

总体而言,带有种群均值替换策略的PSO与QPSO在部分单峰函数和多峰函数的优化中均取得了较好的成绩,在对复合函数的优化中最优解的精度普遍得到了提高,但是平均精度并未提高. 后者的原因在于“均值替换”从某种程度上讲是一种估计行为,通过当前种群分布情况即波函数形态估计最优解的位置,对于结构复杂的多峰函数和复合函数而言,对最优解位置的估计难度较大,估计成功的概率较低,若大量的粒子陷入了局部最优解区域,“均值替换”行为会产生较大的负面影响. 量子动力学视角解释启发式优化算法中早已存在的“均值信息”有效利用情况,因此未进行相应的参数实验分析,添加“均值替换”从某种程度上会加速算法的收敛过程. 对于PSO与QPSO而言相关参数的调整是非常重要的,对于其他群体智能算法同样可以利用均值信息来提高算法的性能.

### 3.2 收敛性分析

收敛性分析选取双阱函数作为目标函数,图5中从左到右分别是粒子在目标函数上的分布状态、基态波函数的二维示意图和俯视图,图中T代表迭代次数. 从波函数的演化过程分析算法的收敛性,可以观察到随尺度的下降,波函数逐步收敛于全局最优区域,算法也从全局搜索过渡到局部搜索. 尺度参数 $\sigma$ 越小,解的精度越高. 这里尺度 $\sigma$ 与扩散方程中的扩散系数D以及时间间隔 $\Delta t$ 有关,而扩散系数D又与Schrödinger方程中尺度参数相对应.

### 3.3 工程应用

为了进一步验证均值信息的有效性,建立施工场地监控布局模型,通过PSO和PSO-mean对模型进行求解,从覆盖率验证均值信息的有效性.

施工场地通常面积较大,常采用布设球型摄像机的方式实现场地监控,覆盖定义Node集为

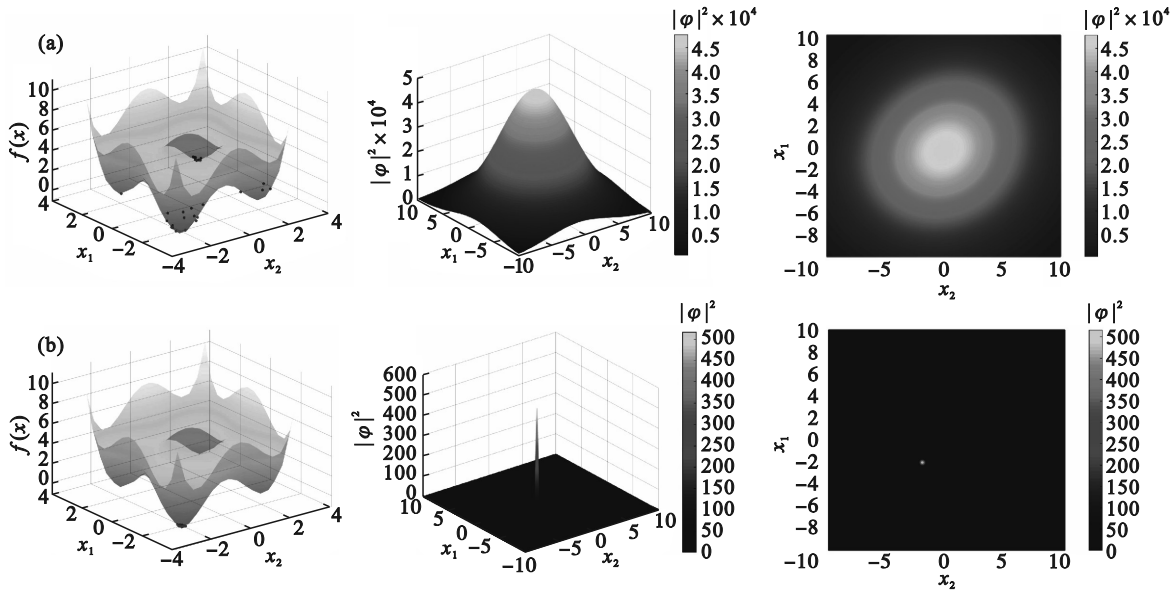


图5 波函数的演化情况  
Fig. 5 Evolution of the wave function  
(a)— $T=210$ ; (b)— $T=2170$ .

摄像机集合,表示需要监控的高速公路施工及物料安置场地中布置的摄像机,表达式为

$$\text{Node} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (20)$$

将场地投影在二维平面中,然后将平面离散化,此时每一个离散化的点到摄像机  $\text{Node}_i\{x_i, y_i, r\}$  的距离为

$$d(\text{Node}_i, \text{target}) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}. \quad (21)$$

对于每一个离散化的点,它与摄像机的距离  $d$  小于覆盖半径  $r$  时,则判定当前位置处于监控覆盖范围内,然后对该点记为 1,即  $d \leq r$  时:

$$P_i(x, y, \text{Node}_i) = 1. \quad (22)$$

对于整个二维平面,它的覆盖率计算方式为标记为 1 的离散化点的数量  $P_i$  与整体离散化点的数量  $\text{Area}$  比值即为覆盖率,表达式为

$$R_{\text{area}}(\text{Node}) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\text{Area}}. \quad (23)$$

表 1 51 次重复实验中不同算法求解的最大覆盖率

Table 1 Maximum coverage of different algorithms in 51 repeated experiments							%	
摄像机数量	8	9	10	11	12	13	14	15
PSO	65.99	73.98	80.44	84.61	88.52	92.18	93.71	95.15
PSO-mean	65.99	74.23	81.21	86.05	89.71	91.84	94.13	95.92

## 4 结 语

本文建立优化算法迭代过程的量子模型,用

通过式(22)和式(23)可知,影响场地覆盖率的主要因素为摄像机数量和摄像机的布置位置.但在实际的监控场景中,考虑到网络带宽、电力消耗等成本,无法通过增加摄像机数量来提高监控覆盖率,因此只能对摄像机的布置位置进行优化,在数量有限的情况下达到覆盖率最大.

PSO与 PSO-mean 在相同的参数环境下进行实验,最大速度和最小速度分别为 2 和 -2,粒子数量设置为 30,迭代次数为 1 000. 监控场地在模型中根据实际情况等比例设置为  $20 \text{ m} \times 55 \text{ m}$  的矩形,单台摄像机的覆盖范围则等比例设置半径 5.5 m 的圆,场地摄像机的数量为 8 到 15 依次递增,每组实验重复 51 次,对 51 次实验的数据进行分析,最大覆盖率见表 1.

表 1 中 51 次重复实验中,摄像机数量从 8 到 15 递增的 8 组实验中,除摄像机数量为 13 的实验组,PSO-mean 的最大覆盖率要优于 PSO,均值信息能够有效地应用在实际工程应用中.

波函数的模方描述解的分布,然后通过极大似然估计法推导出当量子系统达到基态时,在种群的均值位置找到势能最低点的概率最大,从而将均值点作为采样过程中对最优解的一种估计. 实验

表明,利用均值信息的实验组在求解精度上都得到了提高,在优化过程的量子模型下将均值点作为最优解估计这一方法的有效性得到了验证.在更加复杂势阱约束下,如何更加精确地近似目标函数是下一步研究的方向.

#### 参考文献:

- [1] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization [C]// Proceedings of ICNN' 95-International Conference on Neural Networks. Perth, 1995: 1942-1948.
- [2] Kennedy J. Stereotyping: improving particle swarm performance with cluster analysis [C]// Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation. La Jolla, 2000: 1507-1512.
- [3] Xu G. An adaptive parameter tuning of particle swarm optimization algorithm [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(9): 4560-4569.
- [4] Yu K J, Wang X, Wang Z L. Multiple learning particle swarm optimization with space transformation perturbation and its application in ethylene cracking furnace optimization [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 96: 156-170.
- [5] Sun J, Feng B, Xu W B. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior [C]// Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation. Portland, 2004: 325-331.
- [6] Sun J, Xu W B, Feng B. A global search strategy of quantum-behaved particle swarm optimization [C]// IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems. Singapore, 2005: 111-116.
- [7] Xi M, Sun J, Xu W. An improved quantum-behaved particle swarm optimization algorithm with weighted mean best position [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 205(2): 751-759.
- [8] 王鹏, 黄焱, 任超, 等. 多尺度量子谐振子高维函数全局优化算法 [J]. *电子学报*, 2013, 41(12): 2468-2473.
- (Wang Peng, Huang Yan, Ren Chao, et al. Multi-scale quantum harmonic oscillator for high dimensional function global optimization algorithm [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(12): 2468-2473.)
- [9] 王鹏, 黄焱. 具有能级稳定过程的MQHOA优化算法 [J]. *通信学报*, 2016, 37(7): 79-86.
- (Wang Peng, Huang Yan. MQHOA algorithm with energy level stabilizing process [J]. *Journal on Communications*, 2016, 37(7): 79-86.)
- [10] Ye X G, Wang P. Impact of migration strategies and individual stabilization on multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm for global numerical optimization problems [J]. *Applied Soft Computing*, 2019, 85: 105800.
- [11] Wang G G, Deb S, Coelho L. Elephant herding optimization [C]// 3rd International Symposium on Computational and Business Intelligence (ISCBI). Bali, 2015: 1-5.
- [12] Cheung N J, Ding X M, Shen H B. A nonhomogeneous cuckoo search algorithm based on quantum mechanism for real parameter optimization [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(2): 391-402.
- [13] Huang X W, Li C P, Pu Y M, et al. Gaussian quantum bat algorithm with direction of mean best position for numerical function optimization [J]. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2019, 2019: 5652340.
- [14] 王鹏, 王方. 量子视角下的智能优化算法综述 [J]. *电子科技大学学报*, 2022, 51(1): 2-15.
- (Wang Peng, Wang Fang. Overview of intelligent optimization algorithms from the perspective of quantum [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2022, 51(1): 2-15.)
- [15] Griffiths D J, Schroeter D F. Introduction to quantum mechanics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [16] Liang J, Qu B Y, Suganthan P N, et al. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2013 special session on real - parameter optimization [C]// Proceedings of Computational Intelligence Laboratory. Singapore, 2013: 1-10.