

## 柔性机械臂运动速度的PI控制策略

李小彭<sup>1</sup>, 陈国文<sup>1</sup>, 尹猛<sup>2</sup>, 付嘉兴<sup>1</sup>

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 中国科学院 深圳先进技术研究院, 广东 深圳 518055)

**摘要:** 柔性机械臂和柔性负载会随着机械臂位姿的改变, 导致转动惯量等具体参数发生改变, 进而对伺服驱动系统的输出转速产生影响. 采用相同阻尼系数的极点配置方法对驱动系统的比例-积分 (proportional-integral, PI) 控制器参数进行调节, 使PI控制器随机械臂位姿改变自动调节参数, 动态稳定电动机输出转速. 根据拉格朗日原理和连续体振动理论建立数学模型, 通过状态方程获得传递函数, 采用相同阻尼系数极点配置方法调节PI控制器参数, 应用到转速环控制中. 分析阻尼系数与自然频率对系统谐振峰值、谐振频率和带宽的影响. 通过数值仿真证明, 合理调节阻尼系数可以减小伺服驱动系统转速波动. 通过与齐格勒-尼科尔斯法则自整定 (Ziegler-Nichols self-tuning, Z-N) 方法的对比, 表明相同阻尼系数的极点配置方法使系统达到稳定的时间更短.

**关键词:** 柔性机械臂; 柔性负载; PI控制器; 相同阻尼系数极点配置法; 伺服驱动系统

中图分类号: TH 113.1; TP 13 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2024)10-1409-08

## PI Control Strategy for the Moving Speed of Flexible Robotic Arms

LI Xiao-peng<sup>1</sup>, CHEN Guo-wen<sup>1</sup>, YIN Meng<sup>2</sup>, FU Jia-xing<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen 518055, China. Corresponding author: LI Xiao-peng, E-mail: XPLi@me.neu.edu.cn)

**Abstract:** A flexible robotic arm and its flexible load may result in changes to such specific parameters as rotational inertia as the arm's posture changes, subsequently affecting the output speed of the servo drive system. By using a pole placement method with the same damping coefficient, the parameters of the proportional-integral (PI) controller in the drive system are adjusted, enabling the PI controller to automatically adjust its parameters in response to changes in the robotic arm's posture, thereby dynamically stabilizing the motor's output speed. A mathematical model is established based on the Lagrangian principles and continuum vibration theory, and the transfer function is obtained through state equations. The PI controller parameters are adjusted using the pole placement method with the same damping coefficient and applied to the speed loop control. The impact of the damping coefficient and natural frequency on the system's resonance peak, resonance frequency, and bandwidth is analyzed. Numerical simulation demonstrates that appropriately adjusting the damping coefficient can reduce speed fluctuations in the servo drive system. A comparison with the Ziegler-Nichols self-tuning (Z-N) method shows that the pole placement method with the same damping coefficient achieves system stability in a shorter time.

**Key words:** flexible robotic arm; flexible load; PI controller; pole placement method with the same damping coefficient; servo drive system

在水下勘探领域中, 由于工作环境的特殊性, 为了降低人员的风险, 配备一个或多个机械臂的潜水器辅助人类进行水下探索已经成为了主要趋

势<sup>[1]</sup>. 机械臂的便捷性和轻量化的设计便于在水下进行物体的抓取与搬运. 由于具有精度高、结构刚度低, 且携带负载的特性, 机械臂是一个高阶、多

收稿日期: 2023-05-08

基金项目: 辽宁省应用基础研究计划项目(2023JH2/101300159).

作者简介: 李小彭(1976-), 男, 江西宁都人, 东北大学教授, 博士生导师.

输入、强非线性、强耦合的系统.机械臂与负载端的柔性不能忽略,柔性影响会增加驱动系统输出转速波动和机械谐振,降低伺服系统输出端速度的稳定性以及控制系统的精度<sup>[2]</sup>.在伺服系统处于高速运行工况时,一旦其驱动特性与机械环节特性精准匹配至特定条件阈值,即会激发高强度噪声现象,致使柔性负载端与电动机剧烈振动,该振动使柔性机械臂的控制参量产生偏差与波动,显著降低控制精度,引发轨迹跟踪误差增大、作业效率降低、系统可靠性下降等问题,严重干扰正常运行<sup>[3]</sup>.

机械臂工作时,等效柔性负载的转动惯量及其他参数随着机械臂的展开和收缩发生动态变化.此变化高度非线性,同时,柔性负载对电动机输出转速也会有较大的影响.

对柔性机械臂负载端建立数学模型.文献[4]和文献[5]将柔性机械臂和负载端简化为欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)梁,通过频率、阻尼和模态振型等特征来描述结构负载端的挠度,然后对其使用拉格朗日原理进行动力学建模.文献[6]和文献[7]在伺服驱动系统中使用PI控制器控制伺服驱动系统输出端转速,使系统转速一旦出现偏差,比例调节立即产生调节作用,调节输出转速,使伺服系统电动机输出端转速更加平稳.文献[8]通过对双惯性系统的分析,重新设计扭转载荷的传统比例-积分速度控制系统,并通过PI控制策略对速度环进行调节,减少了电动机输出端转速波动.文献[9]对柔性机械臂建立系统性动力学模型,同时进行稳定性分析.在考虑关节柔性及负载柔性的情况下,使用边界函数抑制机械臂在外界干扰下的扰动<sup>[10]</sup>.数值仿真验证适当调整控制器参数可以有效地对输出转速波动进行抑制.文献[11]使用自适应控制策略控制低速爬行现象.在速度环后增加频率陷波器、低通滤波器、自适应滤波器等,提高系统输出稳定性.

本文对柔性负载与伺服系统建立动力学模型,使用相同阻尼系数的极点配置法求解PI控制器参数,数值仿真分析柔性机械臂不同位姿对电动机输出端转速的影响,证明相同阻尼系数极点配置方法通过确定PI控制器参数来降低伺服系统输出端转速的有效性.

## 1 电动机驱动系统与柔性负载整体建模

### 1.1 整体建模

柔性机械臂由串联而成的连杆构成.为了便

于建立模型,忽略机械臂的位姿和柔性关节,将机械臂与负载端等效成柔性负载.将机械臂的伸展和运动等效成柔性负载参数的改变,如图1所示.

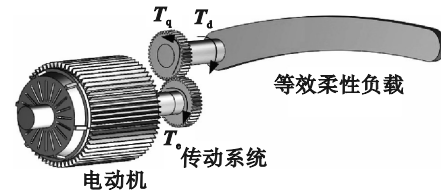


图1 具有柔性负载的伺服驱动系统模型

Fig. 1 Model of the servo drive system with flexible load

$$T_q = T_c - T_d. \quad (1)$$

式中: $T_e$ 为电动机电磁转矩; $T_q$ 为柔性负载驱动转矩; $T_d$ 为柔性负载外加转矩.

为方便建模,对其进行简化,简化后如图2所示,等效为悬臂梁系统.电动机输出转速,带动齿轮等传动系统,使转动轴对等效柔性负载产生扭矩,引起转动,产生横向弯曲振动,同时忽略纵向和横向振动及幅度较小的变形,将其等效为欧拉-伯努利梁.同时建立动态坐标系 $XOY$ 和随动坐标系 $x_2Oy_2$ ,动态坐标系随电动机转轴转动而变化.图中 $z(x,t)$ 为横向位移,是负载空间位置 $x$ 和时间 $t$ 的函数; $\theta_s(t)$ 为电动机转轴的转角.

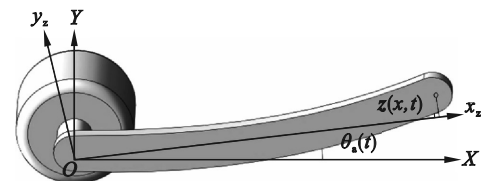


图2 简化柔性负载伺服驱动系统

Fig. 2 Simplified flexible load servo drive system

通过文献[12]和振动理论的描述,悬臂梁在随动坐标系中的挠度和振动的偏微分方程为

$$\left. \begin{aligned} z(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta_i(t) = \phi^T \delta, \\ \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

式中: $\phi_i(x)$ 为第 $i$ 阶模态函数; $\delta_i(t)$ 为第 $i$ 阶模态坐标; $\phi^T$ 为模态函数列向量; $\delta$ 为模态坐标列向量; $\rho(x)$ 为体密度; $A(x)$ 为横截面积; $E$ 为弹性模量; $I$ 为截面惯性矩; $E$ 和 $I$ 的乘积为抗弯刚度,一般直接记作 $EI$ .

在不考虑柔性负载外力的情况下,可将上述悬臂梁系统视为连续体, $\rho(x)$ , $EI(x)$ , $A(x)$ 为常值,分别用 $\rho$ , $EI$ , $A$ 表示,对式(2)进行求解得

$$\frac{\delta''(t)}{\delta(t)} = -\frac{EI}{\rho A} \frac{\phi^{(4)}(x)}{\phi(x)} = -\omega^2. \quad (3)$$

式中,  $\omega$  表示柔性负载固有频率.

对式(3)进行整理,得到式(4).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta(t)}{dt} + \omega^2 \delta(t) &= 0, \\ EI\phi^{(4)}(x) - \omega^2 \rho A \phi(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

根据边界条件<sup>[13]</sup>, 柔性机械臂铰支端视为固定, 另一边自由, 得式(5), 同时, 模态函数应满足式(5)所描述的铰支端固定条件, 将式(2)代入式(5), 同时消去模态坐标, 得到模态函数的边界条件, 见式(6).

$$\left. \begin{aligned} z(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ EI(x) \frac{\partial^2 z(l, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ EI(x) \frac{\partial^3 z(l, t)}{\partial x^3} &= 0, \\ z(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta_i(t) = \phi^T \delta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\phi(0) = \frac{d\phi(0)}{dx} = EI \frac{d^2\phi(l)}{dx^2} = EI \frac{d^3\phi(l)}{dx^3} = 0. \quad (6)$$

式中,  $l$  表示柔性负载的长度.

根据假设模态进行求解, 得到式(7), 由式(7)推导出特征方程的根, 如式(8)所示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4\phi(x)}{dx} &= \beta^4 \phi(x), \\ \beta^4 &= \frac{\omega^2 \rho A}{EI}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} s^4 - \beta^4 &= 0, \\ s_{1,2} &= \pm\beta, \\ s_{3,4} &= \pm i\beta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对式(8)求解, 可得到特征方程的根为

$$\phi(x) = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + A_3 e^{i\beta x} + A_4 e^{-i\beta x}. \quad (9)$$

式中:  $A_1, A_2, A_3, A_4$  为常值, 可通过边界条件求得.

$$\phi(x) = A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x + A_3 \operatorname{sh} \beta x + A_4 \operatorname{ch} \beta x. \quad (10)$$

由式(5)得到柔性负载位移的解为

$$\left. \begin{aligned} z(x, t) &= E \sin(\omega_i t + \varphi), \\ E &= B_1 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x + B_3 \operatorname{sh} \beta x + B_4 \operatorname{ch} \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中:  $\omega_i$  为柔性负载的第  $i$  阶固有频率;  $\varphi$  为模态坐标的初相.

根据边界条件确定式(11)中的  $B_1, B_2, B_3, B_4$ ,  $\omega, \varphi$  可得到频率方程为

$$\cos \beta l \operatorname{ch} \beta l = -1. \quad (12)$$

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (13)$$

与  $\omega_i$  对应的  $\phi_i(x)$  模态函数表达式为

$$\phi_i(x) = \operatorname{ch} \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{\operatorname{sh} \beta_i l - \sin \beta_i l}{\operatorname{ch} \beta_i l - \cos \beta_i l} (\operatorname{sh} \beta_i x - \sin \beta_i x). \quad (14)$$

柔性负载上任意一点的矢量模式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^T &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \\ \mathbf{X} &= x \cos \theta - z(x, t) \sin \theta, \\ \mathbf{Y} &= x \sin \theta + z(x, t) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中,  $\theta$  为旋转角度. 则式(16)成立,

$$\dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = (x^2 + z(x, t))^2 \dot{\theta} + \left( \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right)^2 + 2x \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \dot{\theta}. \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dx = \rho A \int_0^l \left[ (x^2 + z(x, t))^2 \dot{\theta}^2 + \left( \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right)^2 + 2x \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \dot{\theta} \right] dx, \\ E_p &= \frac{1}{2} EI \int_0^l \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} dx, \\ R_i &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

根据拉格朗日动力学方程, 式中  $E_k$  为连杆的动能;  $E_p$  为弹性势能;  $q_i$  为电动机机械角度  $\theta$ ;  $F_i$  为作用力;  $T$  为连杆的动能.

对式(17)进行整理得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} &= F_i, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\delta}_i(t)} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \delta_i(t)} + \frac{\partial E_p}{\partial \delta_i(t)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} \int_0^l \rho A x^2 dx + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t)^2 + 2\dot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t) \dot{\delta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx &= E, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx - \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \delta_i(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中,  $E_a$  为二阶模态下的连杆动能.

对式(19)进行简化, 只保留其中的线性项,

去掉非线性项  $\ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t)^2$ ,  $2\dot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t) \dot{\delta}_i(t)$  和  $\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t)$  后, 整理得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} \int_0^l \rho A x^2 dx + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx &= E_a, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \delta_i(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中,  $\ddot{\theta}$  为二阶模态下的连杆电动机机械角度.

$$\left. \begin{aligned} I_a &= \rho A \int_0^l x^2 dx, \\ F_{ai} &= \int_0^L \rho A \phi_i(x) dx, \\ R &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \\ \mathbf{F}_a &= [F_{a1} \ F_{a2} \ \dots \ F_{an}]^T, \\ \boldsymbol{\delta}(t) &= [\delta_1(t) \ \delta_2(t) \ \dots \ \delta_n(t)]^T. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中:  $I_a$  表示转动惯量;  $F_{ai}$  表示第  $i$  阶模态频率的谐振程度;  $R$  表示柔性负载的模态频率;  $\mathbf{F}_a$  表示系统第  $i$  阶所对应的固有模态的刚柔耦合系数.

将式(21)代入式(20)整理得到式(22).

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} I_a + \mathbf{F}_a^T \ddot{\boldsymbol{\delta}}_i(t) &= E_a, \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}_i(t) + 2\zeta R \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + R^2 \boldsymbol{\delta}(t) + \ddot{\theta} \mathbf{F}_a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中,  $\zeta$  为模态振动阻尼系数矩阵, 根据式(22)可得系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_i(t) \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{R^2 \mathbf{F}_a^T}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} & 0 & -\frac{2R\zeta \mathbf{F}_a^T}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} \\ 0 & \frac{I_a R^2}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} & 0 & \frac{2I_a \zeta R}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \boldsymbol{\delta}_i(t) \\ \dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} \\ \frac{\mathbf{F}_a}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

因此可得伺服系统的传递函数为

$$\frac{\omega_i(s)}{E_a(s)} = \frac{1}{s I_a \left( 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^2 F_{ai}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_i \zeta_i s + \omega_i^2)} \right)}. \quad (24)$$

只对一阶模态进行考虑, 忽略高阶模态. 传递函数为

$$\frac{\omega_i(s)}{E_a(s)} = \frac{1}{s I_a \left( 1 - \frac{s^2 F_{a1}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_1 \zeta_1 s + \omega_1^2)} \right)}. \quad (25)$$

### 1.2 分析柔性负载对输出转速影响

伺服电动机的电流内环谐振频率和截止频率与柔性负载的速度环不同, 在伺服系统运行时, 电动机驱动柔性负载进行转动, 电流内环已完成调节, 而速度外环尚未调节完成. 因此考虑伺服电动机驱动系统的传递函数时, 只对速度外环进行研究. 柔性负载伺服系统的速度外环框图如图3所示. 图中:  $K_p$  为比例增益系数;  $K_i$  为积分增益系数;  $i_q^*$  为输出电流参考值;  $K_q$  为转矩常数;  $T_{em}^*$  为电磁转矩参考值;  $\omega_i^*$  为柔性负载的输入固有频率;  $\omega_i$  为输出固有频率. 忽略柔性耦合项后

的刚性负载的速度环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{1}{s I_a} (1 - M)^{-1}. \quad (26)$$

其中  $M$  的表达式为

$$M = \frac{s^2 F_{a1}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_1 \zeta_1 s + \omega_1^2)} + \frac{s^2 F_{a2}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_2 \zeta_2 s + \omega_2^2)} + \frac{s^2 F_{a3}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_3 \zeta_3 s + \omega_3^2)}. \quad (27)$$

通过对系统转速环柔性负载的简化, 将其中柔性耦合部分刚性化, 刚性负载 PI 控制器速度控制系统如图4所示,  $\omega_i^*$  为刚性负载中的输入固有频率;  $\omega_s$  为刚性负载中的输出固有频率. 得到的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{1}{s I_a}. \quad (28)$$

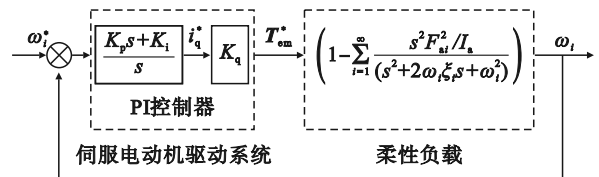


图3 柔性负载转速环控制框图

Fig. 3 Block diagram of the control of the rotational speed loop for flexible load

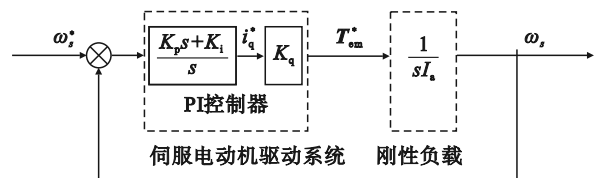


图4 刚性负载转速环控制框图

Fig. 4 Block diagram of the control of the rotational speed loop for rigid load

通过对3阶伯德图的分析, 柔性负载和刚性负载的幅值随着角频率的增加而降低; 系统加入柔性负载后, 柔性负载的振荡幅值和伺服系统带宽接近, 因此柔性负载影响伺服驱动系统的速度环, 对电动机输出转速有影响.

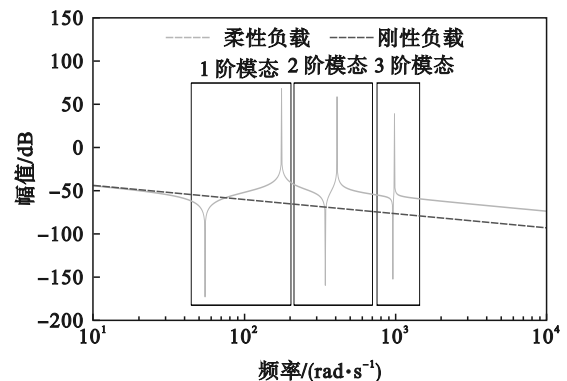


图5 伺服驱动系统伯德图

Fig. 5 Bode diagram of the servo drive system

## 2 相同阻尼系数极点配置方法

### 2.1 零极点的设定

对于伺服驱动系统中转速影响较小的电流内环先进行忽略,在此环节只考虑一阶模态,则系统的传递函数为

$$\frac{\omega_i(s)}{\omega^*(s)} = \frac{(K_p s + K_i)(s^2 + 2\omega_1 \zeta_1 s + \omega_1^2)}{N} \quad (29)$$

$$N = (I_a - F_{al}^2)s^4 + 2I_a \omega_1 \zeta_1 s^3 + I_a \omega_1^2 s^2 + (K_p s + K_i)(s^2 + 2\omega_1 \zeta_1 s + \omega_1^2) \quad (30)$$

根据极点配置方法,为了便于确定系统的零极点与PI调节器参数之间的关系,将式(30)改写为下式:

$$\left. \begin{aligned} (I_a - F_{al}^2)s^4 + 2I_a \omega_1 \zeta_1 s^3 + I_a \omega_1^2 s^2 + (K_p s + K_i)(s^2 + 2\omega_1 \zeta_1 s + \omega_1^2) &= (I_a - F_{al}^2)D, \\ D &= (s^2 + 2\zeta_{al} \omega_{al} s + \omega_{al}^2)(s^2 + 2\zeta_{bl} \omega_{bl} s + \omega_{bl}^2). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

同时对式(31)进行重新改写

$$\left. \begin{aligned} s^4 + \frac{2I_a \omega_1 \zeta_1 + K_p}{(I_a - F_{al}^2)} s^3 + \frac{I_a \omega_1^2 + K_i + 2K_p \omega_1 \zeta_1}{(I_a - F_{al}^2)} s^2 + \frac{K_p \omega_1^2 + 2K_i \omega_1 \zeta_1}{(I_a - F_{al}^2)} s + \frac{K_i \omega_1^2}{(I_a - F_{al}^2)} &= \\ (s^2 + 2\zeta_{al} \omega_{al} s + \omega_{al}^2)(s^2 + 2\zeta_{bl} \omega_{bl} s + \omega_{bl}^2). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式中: $\omega_{al}, \omega_{bl}$ 为极点的自然角频率; $\zeta_{bl}, \zeta_{al}$ 为阻尼系数.对式(32)进行重新整理,得到式(33):

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta_{al} \omega_{al} + 2\zeta_{bl} \omega_{bl} &= \frac{K_p}{I_a - F_{al}^2}, \\ \omega_{al}^2 + \omega_{bl}^2 + 4\zeta_{al} \zeta_{bl} \omega_{al} \omega_{bl} &= \frac{I_a \omega_1^2 + K_i}{I_a - F_{al}^2}, \\ 2\zeta_{al} \omega_{al} \omega_{bl}^2 + 2\zeta_{bl} \omega_{bl} \omega_{al}^2 &= \frac{K_p \omega_1^2}{(I_a - F_{al}^2)}, \\ \omega_{al}^2 \omega_{bl}^2 &= \frac{K_i \omega_1^2}{(I_a - F_{al}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

得到零极点与PI调节器的关系为

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{(I_a - F_{al}^2) \omega_{al}^2 \omega_{bl}^2}{\omega_1^2}, \\ K_p &= (I_a - F_{al}^2)(2\zeta_{al} \omega_{al} + 2\zeta_{bl} \omega_{bl}). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

### 2.2 相同阻尼系数极点配置

闭环传递函数的极点影响着系统运动的模态,极点的分布也影响着运动的瞬态性能,根据预期的性能设定相应的指标,求解极点的分布,通过设计PI控制器调整闭环极点,将系统由不稳定状态变为稳定状态.本文通过相同阻尼系数的极点配置方法,在系统闭环传递函数上,令阻尼系数相等,即在 $\zeta_{bl} = \zeta_{al}$ 的射线上寻找 $\omega_{al}$ 和 $\omega_{bl}$ ,由此确定零极点的位置,在实轴-虚轴( $R(s)$ - $I(s)$ )坐标系

中,如图6所示.

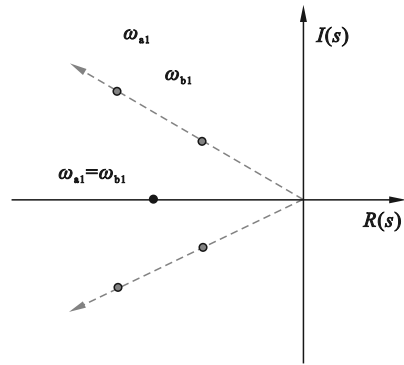


图6 相同阻尼系数的极点配置方法示意图

Fig. 6 Schematic diagram of the pole placement method with the same damping coefficient

令 $\zeta_{bl} = \zeta_{al} = \zeta_1$ ,根据式(33)得到式(35):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{al} \omega_{bl} &= \omega_1^2, \\ \left( \frac{\omega_{al}^2 + \omega_{bl}^2}{\omega_{al} \omega_{bl}} \right) &= \frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

对式(36)进行改写,得到式(36):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\omega_{al}}{\omega_1} + \frac{\omega_{bl}}{\omega_{al}} \right)^2 &= \frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 4, \\ \left( \frac{\omega_{al}}{\omega_1} - \frac{\omega_{bl}}{\omega_{al}} \right)^2 &= \frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

联立求解得

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\omega_{al}}{\omega_{bl}}, \\ \omega_{bl} &= \frac{\sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} + \sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2}}{2} \omega_1, \\ \omega_{al} &= \frac{\sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} - \sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2}}{2} \omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

则PI控制器参数为

$$\left. \begin{aligned} K_i &= (I_a - F_{al}^2) \omega_1^2, \\ K_p &= 2\zeta_1 (I_a - F_{al}^2) \sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} \omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

传递函数为

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega^*(s)} = \frac{D_2}{N_2} \quad (39)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= 2\zeta_1 \sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} \omega_1 s^3 + \omega_1^2 s^2 + \\ & 2\zeta_1 \sqrt{\frac{F_{al}^2}{I_a - F_{al}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} \omega_1^3 s + \omega_1^4; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$N_2 = s^4 + \left( 2\zeta_1 \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} \right) \omega_1 s^3 + \left( \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} + 2 \right) \omega_1^2 s^2 + 2\zeta_1 \omega_1^3 \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\zeta_1^2 + 4} s + \omega_1^4. \quad (41)$$

根据极点自然角频率比值与极点阻尼系数的二维云图,分析对谐振频率、谐振峰值和带宽的影响.

根据图 7,极点的自然角频率比值对相同阻尼系数的谐振峰值影响较小,随着阻尼系数的增加谐振峰值逐渐减小.当阻尼系数为 0.2~0.4 时,谐振峰值变化明显,且数值较大;当对于阻尼系数大于 0.7 时,谐振峰值逐渐降低,变化幅度较小,这时系统稳定性提高,愈加平稳.

谐振频率对极点自然角频率比值影响成正比,与极点阻尼系数成反比,当谐振频率和谐振峰值较大时,系统响应速度较快,可快速达到稳定状态.随着阻尼系数增加,动态稳定性逐渐加强.

影响带宽的主要因素是极点自然角频率比值,且成正比,系统的响应时间也会增加.当带宽达到  $70 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,获得良好的动态响应

### 3 数值仿真分析

基于相同阻尼系数的极点配置法,对伺服驱动系统使用 PI 控制策略,将串联的机械臂及负载端等效一体化为柔性负载,并根据柔性负载在不同位姿和极点阻尼系数的条件下,确定 PI 调节器具体参数进行仿真,对伺服驱动系统的输出端转速和频率进行分析,探究不同柔性负载对伺服系统转速的影响.系统不同位姿具体参数如表 1 所示.

对实验结果进行分析,在 3 个位姿使用相同阻尼系数的极点配置策略下,通过对比图 8a~图 8c 发现在位姿 3 时随着柔性负载长度、转动惯量等参数的增加,降低阻尼系数,可以有效地降低速度波动频率.

在等效柔性负载处于相同位置下,随着阻尼系数的增加,系统的动态性能平稳增加,超调量越小,系统达到平稳的速度越快,转速波动的频率相应减小.同时当电动机开启时,随着速度增长,阻尼系数大的伺服驱动系统速度波动更为迅速、幅值更大.

在相同阻尼系数的条件下,柔性负载的长度和线密度增加,即柔性负载的转动惯量增大,系统的波动频率明显降低,但会增加系统达到稳定

的时间.采用相同阻尼系数的极点配置方法,在转动惯量和柔性负载较大时,应增加 PI 调节器的阻尼系数,使输出转速更加稳定.

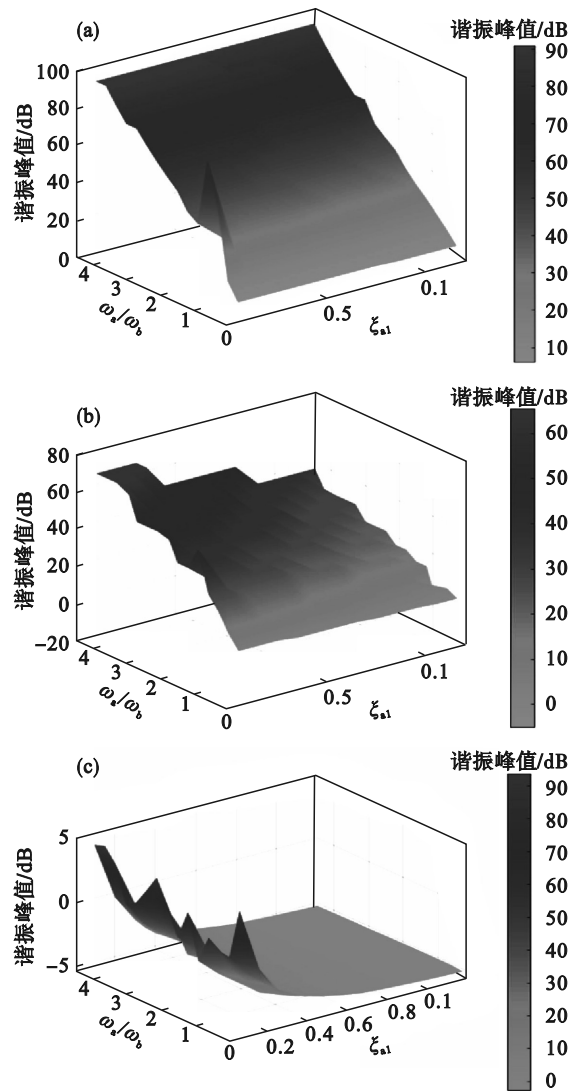


图 7 极点配置法系统评价指标图

Fig. 7 System evaluation index diagram of the pole configuration method

(a)—谐振峰值; (b)—谐振频率; (c)—带宽.

表 1 不同位姿下系统参数  
Table 1 Different pose system parameters

参数	位姿 1	位姿 2	位姿 3
抗弯刚度 $EI/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$	400	400	400
线密度 $\rho_l/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-1})$	0.800	0.636	0.574
长度 $l/\text{m}$	1.1	1.7	2.2
体密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	7 760	6 120	5 450
厚度 $b/\text{m}$	0.015	0.015	0.015
高度 $h/\text{m}$	0.015	0.015	0.015
负载转动惯量 $I_a/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.322	0.612	0.926
一阶模态柔性耦合系数 $F_{a1}/(\text{kg}^{1/2}\cdot\text{m})$	0.500	0.614	0.718
一阶模态角频率 $\omega_1/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	68.13	39.77	28.44

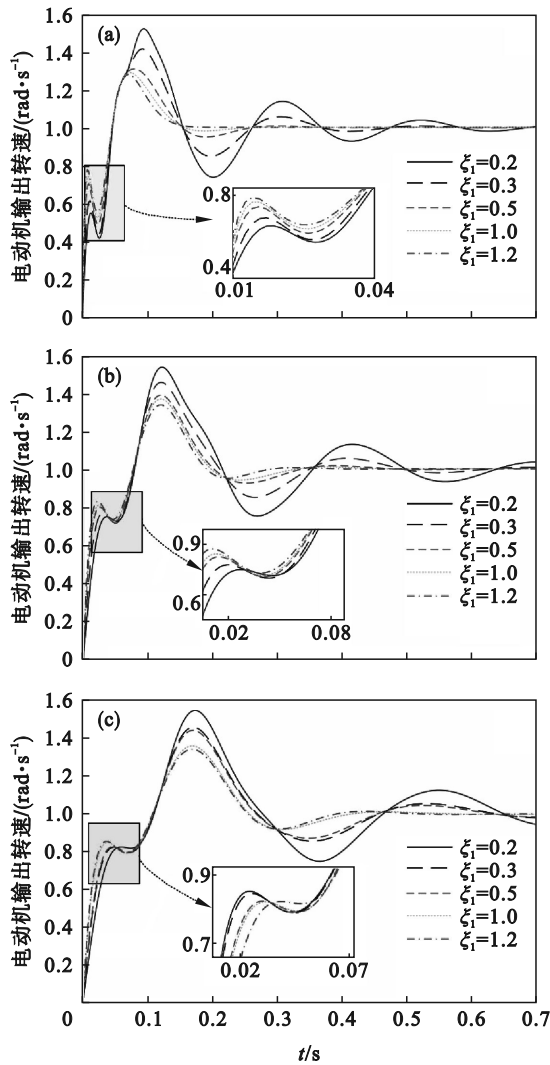


图 8 极点配置策略仿真结果

Fig. 8 Simulation results of the pole configuration strategy  
(a)一位姿 1; (b)一位姿 2; (c)一位姿 3.

Z-N 整定法<sup>[14]</sup>可以通过简单整定实验和算法得到控制参数而被广泛应用. 缺点是要保证其有足够跟随性能的前反馈控制设计方法和较长的达到系统输出转速所需要的时间,甚至在某些条件下导致系统失稳.

通过图 9 中两种方法进行对比. 相同阻尼系数的极点配置方法与 Z-N 自整定法在电动机启动时,系统转速提升得更加迅速、稳定. 超调量大于 Z-N 自整定方法<sup>[12]</sup>,随着时间增加系统波动频率增加,极大缩短了伺服驱动系统达到稳定所需要的时间,系统振荡时间减少,并且系统输出转速更加平稳.

#### 4 结 语

在忽略电流内环转速时,对 3 阶伺服驱动柔

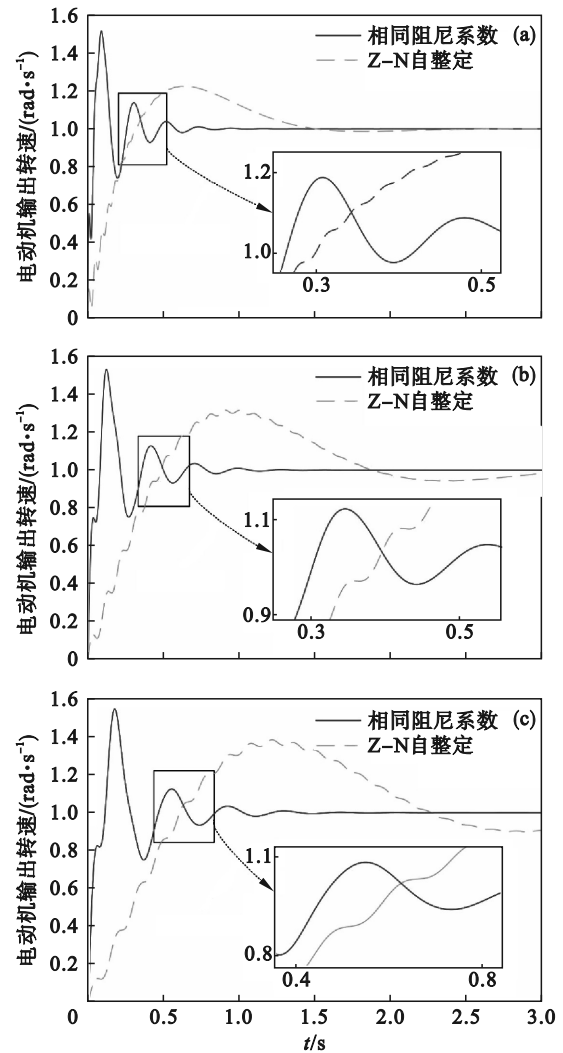


图 9 伺服系统输出转速调节对比图

Fig. 9 Comparison diagram of the servo system's output rotational speed adjustment  
(a)一位姿 1; (b)一位姿 2; (c)一位姿 3.

性负载转速环开环伯德图的分析,说明柔性负载对于电动机转速的影响不可忽略.

通过相同阻尼系数的极点配置方法,以及数值仿真分析,当阻尼系数在 0.2~1.2 之间,增大阻尼系数和自然频率比值,使系统获得良好的动态响应. 当柔性负载的长度、转动惯量较大时,增大系统的阻尼系数,可以提高系统的稳定性.

通过与经典的 Z-N 自整定法进行对比,在 3 组位姿状态的实验中,波动幅度小于  $0.1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,达到稳定的时间在 1.4~1.9 s 之间,小于 Z-N 自整定法达到稳定的时间. 验证了这种方法可以使系统更迅速达到稳定.

#### 参考文献:

[1] Barbieri L, Bruno F, Gallo A, et al. Design, prototyping and testing of a modular small-sized underwater robotic arm controlled through a master-slave approach [J]. *Ocean*

- Engineering*, 2018, 158: 253–262.
- [ 2 ] 杨亮亮, 王杰, 王飞, 等. 基于最优控制迭代学习的直线伺服系统振动抑制研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(15): 217–225.  
(Yang Liang-liang, Wang Jie, Wang Fei, et al. Research on vibration suppression of linear servo system based on optimal control iterative learning[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(15): 217–225.)
- [ 3 ] Oh S, Kong K. High-precision robust force control of a series elastic actuator [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, 22(1): 71–80.
- [ 4 ] 丁有爽, 肖曦. 伺服系统柔性负载建模方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(3): 818–827.  
(Ding You-shuang, Xiao Xi. Mathematical modeling of flexible load in servo system [J]. *Proceedings of CSEE*, 2016, 36(3): 818–827.)
- [ 5 ] Zhang S, Huang D Q. End-point regulation and vibration suppression of a flexible robotic manipulator [J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 245–254.
- [ 6 ] Zhang X G, Sun L Z, Zhao K, et al. Nonlinear speed control for PMSM system using sliding-mode control and disturbance compensation techniques [J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2013, 28(3): 1358–1365.
- [ 7 ] Feliu V, Pereira E, Diaz I M. Passivity-based control of single-link flexible manipulators using a linear strain feedback [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 71: 191–208.
- [ 8 ] Zhang G G, Furusho J. Speed control of two-inertia system by PI/PID control [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, 47(3): 603–609.
- [ 9 ] 李小彭, 尚东阳, 李凡杰, 等. 输电线巡检机器人位姿变化的柔性关节控制策略[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2020, 41(11): 1577–1583.  
(Li Xiao-peng, Shang Dong-yang, Li Fan-jie, et al. Flexible joint control strategy based on posture change of transmission line inspection robots [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2020, 41(11): 1577–1583.)
- [ 10 ] He X Y, He W, You W, et al. Boundary control design for a flexible robotic manipulator modeled as a Timoshenko beam [C]//2016 12th World Congress on Intelligent Control and Automation. Guilin: IEEE, 2016: 1129–1134.
- [ 11 ] 姜仁华, 刘闯, 宁银行. 雷达伺服系统的自适应摩擦力矩补偿控制策略[J]. 机械工程学报, 2019, 55(18): 187–195.  
(Jiang Ren-hua, Liu Chuang, Ning Yin-hang. Control strategy with adaptive friction torque compensation for radar servo system [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(18): 187–195.)
- [ 12 ] Shang D Y, Li X P, Yin M, et al. Speed control method for dual-flexible manipulator with a telescopic arm considering bearing friction based on adaptive PI controller with DOB [J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2022, 61(6): 4741–4756.
- [ 13 ] 李小彭, 周赛男, 尹猛, 等. 双柔性机械臂伺服系统 PI 控制策略[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2023, 44(5): 642–651, 659.  
(Li Xiao-peng, Zhou Sai-nan, Yin Meng, et al. PI control strategy of double-flexible manipulator's servo system [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2023, 44(5): 642–651, 659.)
- [ 14 ] Brito A G. On the misunderstanding of the Ziegler-Nichols's formulae usage [J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, 6(1): 142–147.