

基于随机分布特性的退化结构可靠度评估方法

杨再有, 吕昊, 赵亚平

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 为了解决在基于随机载荷及强度退化的结构可靠度评估中采用近似算法而存在结果不准确、对模型参数敏感等问题,提出了基于随机分布特性的建模方法.该方法考虑随机载荷出现的分布特性,应用载荷-强度模型和随机过程理论以提高可靠度计算的准确性.以随机载荷计数模型是泊松过程为例,分析证明了随机载荷到达时间的分布特性,基于此推导了第1次载荷作用的可靠度公式,并根据全概率公式对结构可靠度的计算公式进行了理论推导.算例分析表明,该方法与Monte Carlo仿真结果一致,验证了方法的正确性,与其他方法对比提高了可靠度计算的准确性.

关键词: 结构可靠度;随机分布;退化结构;载荷-强度模型;Monte Carlo

中图分类号: TH 122 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2024)10-1417-08

Reliability Evaluation Method of Degraded Structures Based on Random Distribution Characteristics

YANG Zai-you, LYU Hao, ZHAO Ya-ping

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: ZHAO Ya-ping, E-mail: zhyp_neu@163.com)

Abstract: To solve such problems as inaccurate results and sensitivity to model parameters in structural reliability evaluation based on random load and strength degradation, a modeling method based on random distribution characteristics was proposed. The distribution characteristics of random load were considered, and the load-strength model and stochastic process theory were used to improve the accuracy of reliability calculation. Taking the counting model of random load as the Poisson process for example, the distribution characteristics of random load arrival time were analyzed and proved. Based on this, the reliability formula of the first load was derived, and the calculation formula of structural reliability was derived theoretically according to the total probability formula. An example analysis showed that the proposed method is consistent with Monte Carlo simulation results, which verifies the correctness of the proposed method and improves the accuracy of reliability calculation compared with the other methods.

Key words: structural reliability; random distribution; degraded structure; load-strength model; Monte Carlo

可靠性研究已广泛应用于机械工程、核工程、土木工程、航天工程等各个领域^[1-2].重要结构和零部件作为系统的重要组成部分,其可靠性在系统可靠性中起着重要的作用,成为近些年来研究的重点^[3].载荷-强度干涉模型(也称应力-强度干涉模型)是用于分析结构和零部件可靠性的基

本模型,因为大多数结构和零部件都承受应力或者载荷.在该模型中,如果载荷的大小超过强度极限,零部件或者结构发生失效^[4].由于载荷作用次数具有随机性,为了更好地描述失效模型,近年来,越来越多的学者用冲击模型来描述载荷的随机过程,如风力发电系统会把龙卷风作为一种

收稿日期: 2023-05-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52075083, 52205069); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N2203007).

作者简介: 杨再有(1990-),男,河南新乡人,东北大学博士研究生;赵亚平(1975-),男,北京人,东北大学教授,博士生导师.

随机冲击.作为载荷-强度干涉模型的推广,基于随机过程的极值冲击模型被广泛研究,当冲击强度(载荷或者应力的大小)大于预定阈值(结构或者零部件的强度)时,系统发生失效^[5].

在对极值冲击模型的研究中,结构的强度常常被认为是固定的值,而忽略了结构强度由于老化、腐蚀和磨损等随着时间推移产生的强度退化问题^[6-7].当强度退化被考虑之后,可靠性评估变得更加复杂,学者从不同的角度对冲击载荷到达时间进行了近似及逼近,以更好地描述结构强度退化情况下极值冲击模型的可靠性评估问题. Lyu 等^[8]研究了多级竞争系统,其阈值被分成多个阶段,而没有考虑冲击载荷到达的时间分布. Chang 等^[9]研究了具有多状态硬失效阈值的系统模型,该阈值是由某种冲击载荷引起的. Hao 等^[10]分析了阈值变化的相依竞争过程的系统可靠性.在这些研究中,硬失效阈值变化是不连续的,因为阈值随着冲击过程或软失效过程性能退化程度的突然减小而变化. Liu 等^[11]研究了性能连续下降的极值冲击模型,而该模型忽略了冲击载荷到来的时间分布. Hao 等^[12]研究了具有连续强度退化过程和冲击过程引起强度退化的应力-强度模型,但模型假设服从泊松分布的冲击载荷到达时间为均匀分布,该种近似能很好地解决一部分问题,但这并不能保证计算的精度. Rafiee 等^[13]考虑了两种模式的强度退化过程:阶段性强度退化和连续强度退化,提出冲击载荷的实际分布应该是伽马分布,但公式的推导未考虑条件概率下冲击载荷出现的次数概率为 1,故存在明显不足.综上所述,现有的方法分别从不同的角度来描述冲击载荷到达时间的分布情况,忽略了实际的分布特征,从而造成可靠度计算不准确的问题.

为了解决上述可靠性评估过程中出现的问题,在上述研究的基础上,提出了基于随机分布特性的算法来计算具有性能连续变化的零部件结构可靠性.本文提出的方法考虑了每一次冲击载荷到达时间的分布,更符合真实的冲击载荷到达时间的分布特性.此外,本文还将所提出的方法与现有文献研究中所采用方法及 Monte Carlo (MC)仿真结果进行了比较.

1 结构模型及假设

如图 1 所示,假设零部件的结构强度退化函

数 $D(t)$ 随着时间 t 的变化逐渐变小,且第 j 次随机冲击载荷为 $W_j(j=1, 2, 3, \dots, N_1)$, N_1 表示最大冲击载荷次数,当载荷 W_j 大于结构强度时,结构会发生极值冲击模型失效.由于冲击载荷出现的随机性,且结构强度(失效阈值)随时间发生退化,这意味着每个冲击所造成的失效概率不仅取决于冲击载荷的大小,还取决于冲击载荷出现的时间.

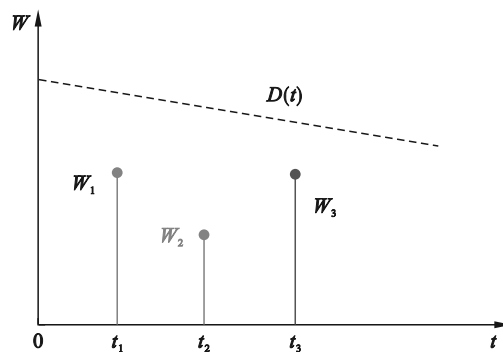


图 1 具有强度退化的随机载荷强度模型

Fig. 1 Random load-strength model with strength degradation

为了更好地体现本文所提出的方法,对结构的可靠性模型进行简化,采用了以下假设:①假设冲击过程服从齐次泊松分布;②假设结构强度退化为单调变化过程.根据上述假设,对模型更详尽的描述为

1) 冲击过程服从参数为 λ 的齐次泊松分布,则冲击载荷出现 i 次的概率可以表示为

$$P(N(t)=i) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!}, \quad i=0, 1, 2, \dots, N_{\max}. \quad (1)$$

式中: $N(t)$ 表示 t 时间内出现的冲击载荷次数; i 取 0 表示系统没有冲击载荷出现,即 $P(N(t)=0)$ 表示系统没有出现随机冲击载荷的概率.

2) 为简化模型,结构强度退化假设为随时间 t 而变化的单调过程,结构强度退化函数 $D(t)$ 可以表示为

$$D(t) = D_0 - f(t). \quad (2)$$

式中: D_0 为结构的初始强度, GPa; $f(t)$ 为随时间变化的退化增量函数.

3) 冲击载荷 W_i 大小服从正态分布,即 $W_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其单位为 GPa, μ 为冲击载荷大小的均值, σ 为方差.

2 随机载荷强度模型的结构可靠性

由于结构失效由冲击载荷引起,且冲击载荷

出现的次数服从泊松分布,则观察 t 时间内出现的不同冲击载荷次数的概率服从全概率定理.根据式(1),当冲击载荷次数取最大值 N_1 时,不同冲击载荷次数出现的概率之和为 1,即

$$\sum_{i=0}^{N_1} P(N(t)=i) = 1. \quad (3)$$

式中, P 表示概率.

结构的时变可靠度 $R(t)$ 为不同冲击载荷次数条件下的可靠度之和,即

$$R(t) = \sum_{i=0}^N R_i(t) = \sum_{i=0}^N R(t|N(t)=i) P(N(t)=i). \quad (4)$$

式中, $R_i(t)$ 为第 i 次冲击载荷下结构的可靠度.

当出现的冲击载荷次数等于 0 时,零部件结构不发生失效,即冲击载荷不出现零部件的结构可靠度为 1,则在没有出现冲击载荷情况下的可靠度可以表示为

$$R_0(t) = R(t|N(t)=0) P(N(t)=0) = 1 \times P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}. \quad (5)$$

当冲击载荷的次数不为 0 时,零部件在某次随机冲击载荷下可靠度 $P_i(t)$ 可以表示为

$$P_i(t) = P(W_i < D(t)) = P(W_i < D_0 - f(t)). \quad (6)$$

如第 1 节所述,冲击载荷的大小服从正态分布,结构强度的退化是一个持续且单向的下降过程,依据正态分布密度函数及应力强度干涉模型,式(6)可以表示为

$$P_i(t) = P(W_i < D_0 - f(t)) = \int_0^{D(t)} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \Phi\left(\frac{D_0 - f(t) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(\varphi(t)). \quad (7)$$

式中: $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布的累积分布函数; $\varphi(\cdot)$ 为标准正态分布积分上限.

根据式(7),由于结构强度随时间而变化,因此每次冲击载荷未导致失效的概率具有时间相关性.因此,确定冲击载荷发生的时间对于极值冲击模型的可靠度计算至关重要.为了明确冲击载荷出现时间的分布,基于式(1)的假设,本文对冲击载荷出现时间的分布公式进行了推导.

引理 1 假设冲击载荷的次数 i 服从参数为 λ 且随时间变化的泊松分布,则相邻冲击载荷的时间间隔 T_i 服从指数分布,其概率密度函数为^[14].

$$T_i \sim \lambda e^{-\lambda t}. \quad (8)$$

式中:当 i 为 1 时, T_1 为第 1 次冲击载荷到达时间的概率密度函数; T_2 表示第 1 次冲击载荷到第 2 次冲击载荷发生的概率密度函数.

为了证明引理 1,首先推导了第 1 次冲击载荷的时间分布.假设在时间 t 之前没有出现冲击载荷,根据式(1),则 T_1 的累积分布函数可以表示为

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 < t) = 1 - P(T_1 \geq t) = 1 - e^{-\lambda t} (t \geq 0) = 1 - P(N(t)=0). \quad (9)$$

对式(9)累积分布函数进行求导,可得 T_1 的概率密度分布函数为

$$f_1(t) = F'_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0. \quad (10)$$

依照同样的方法,引理 1 可以得证.

冲击载荷出现的概率遵循连续的密度分布函数,则某时间点的概率为 0.为了描述某段时间出现的概率,根据梯形规则,累积密度函数可以表示为

$$\int_0^t f_1(x) dx \approx \lim_{\|\Delta a\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_1(x_k) + f_1(x_{k+1})}{2} \Delta a. \quad (11)$$

式中: Δa 为离散化的区间长度; n 为时间离散化的份数; x_k 为第 k 个区间离散点.由此可见,在不同时间段 $[x_k, x_{k+1}]$ 出现冲击载荷的概率 $P_{T_1}(x_k)$ 可表述为

$$P_{T_1}(x_k) = (f_1(x_k) + f_1(x_{k+1})) \Delta a / 2 = \Delta a \lambda (e^{-\lambda x_k} + e^{-\lambda x_{k+1}}) / 2. \quad (12)$$

极值冲击模型在不同时间段 $[x_k, x_{k+1}]$ 下的可靠度 $r_1(x_k)$ 可以表示为

$$r_1(x_k) = P_{T_1}(x_k) P(W_1 < D(T_1)) = P(W_1 < D(T_1)) \Delta a \lambda (e^{-\lambda x_k} + e^{-\lambda x_{k+1}}) / 2. \quad (13)$$

当仅考虑 1 次冲击载荷时,该冲击载荷分布在不同时间区间的概率之和为 1.式(12)表明,冲击载荷落在各个区间的概率不同,为保证条件概率下总的概率之和为 1,需采用相对概率描述冲击载荷落在各个区间的概率.基于全概率定理及式(12),结构在第 1 次冲击载荷条件下的极值冲击模型可靠度可以推导为

$$R_1(t|N(t)=1) = \frac{\sum_{i=1}^n r_1(x_i)}{\int_0^t f_1(x) dx} = \frac{\int_0^t f_1(x) P_i(x) dx}{\int_0^t f_1(x) dx}. \quad (14)$$

由式(4)及式(14)可以得到 1 次冲击载荷的可靠度为

$$R_1(t) = R_1(t|N(t)=1) P(N(t)=1) = \frac{\int_0^t f_1(x) P_i(x) dx}{\int_0^t f_1(x) dx} P(N(t)=1). \quad (15)$$

通过引理 1 的推导及证明,本文推导出了零

部件结构强度退化第 1 次冲击载荷情况下的可靠度公式. 式(15)表明, 计算单次冲击载荷的可靠度与冲击载荷出现的概率密度分布函数密切相关. 当计算冲击载荷次数大于等于 2 条件下的可靠度时, 应该明确第 2 次及之后冲击载荷出现时间的概率密度分布函数.

引理 2 连续的冲击载荷之间的时间服从指数分布 $\lambda e^{-\lambda t}$, 则第 i 次冲击载荷随时间 t 的变化服从伽马分布^[14].

$$f_i(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}. \quad (16)$$

证明 根据引理 1, 相邻冲击载荷出现的时间间隔是指数同分布的, 首先当 $i=1$ 时, 式(16)即为式(8). 其次推导第 2 次冲击载荷的概率密度函数. 第 2 次冲击载荷到来的前提是第 1 次冲击载荷发生, 则第 2 次出现的密度函数可以表述为

$$f_2(t) = f_2(T_1 + T_2) = \int_0^t f_1(t - T_1) f_1(T_1) dT_1. \quad (17)$$

把式(8)代入式(17)有

$$f_2(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-T_1)} \lambda e^{-\lambda T_1} \frac{(\lambda T_1)^{1-1}}{(1-1)!} dT_1 = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t T_1^0 dT_1 = \lambda^2 e^{-\lambda t} t = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2-1}}{(2-1)!}. \quad (18)$$

由式(18)可知, 第 2 次冲击载荷到达时间服从参数为 λ 且随时间 t 变化的伽马分布. 使用相同的方法, 可以得出第 i 次冲击载荷分布为

$$f_i(t) = f_i(t_{i-1} + t_1) = \int_0^t f_{i-1}(t_{i-1}) f_1(t - t_{i-1}) dt_{i-1}. \quad (19)$$

当冲击载荷次数为 $i-1$ 次时, 将式(8)代入式(19)得

$$f_i(t) = \int_0^t f_{i-1}(t_{i-1}) f_1(t - t_{i-1}) dt_{i-1} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t_{i-1})} \frac{(\lambda t_{i-1})^{i-2}}{(i-2)!} \lambda e^{-\lambda(t-t_{i-1})} dt_{i-1} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}. \quad (20)$$

引理 2 得以证明, 即第 i 次冲击载荷的到来时间服从参数为 λ 且随时间 t 变化的伽马分布.

为了计算 2 次冲击载荷及之后次数条件下的结构可靠度, 首先计算 2 次冲击载荷下的结构可

靠度. 假设在时间 $(0, t]$ 内, 冲击载荷出现的个数为 2 (第 1 次冲击载荷已经发生), 则第 2 个冲击载荷发生在时间 $t_2 \in (0, t]$, 且 $t_1 \in (0, t_2)$. 根据式(14), 结构在 2 次冲击载荷条件下的可靠度为

$$R_2(t|N(t) = 2) = \frac{\int_0^t P(W_2 < D(t_2) | P(W_1 < D(t_1))) f_2(t_2) dt_2}{\int_0^t f_2(t_2) dt_2} = \frac{\int_0^t \Phi(\varphi(t_2)) P(W_1 < D(t_1)) f_2(t_2) dt_2}{\int_0^t f_2(t_2) dt_2}. \quad (21)$$

当第 2 次冲击载荷出现的时候, 第 1 次冲击载荷已经发生, 式(21)可以表述为

$$R_2(t|N(t) = 2) = \frac{\int_0^t \Phi(\varphi(t_2)) f_2(t_2) \frac{\int_0^{t_2} f_1(t_1) \Phi(\varphi(t_1)) dt_1}{\int_0^{t_2} f_1(t_1) dt_1} dt_2}{\int_0^t f_2(t_2) dt_2}. \quad (22)$$

为了简化, 令 $g(t_i) = f_i(t_i) \Phi(\varphi(t_i))$, $A_i(t) = \int_0^t f_i(t_i) dt_i$. 式(22)可简化为

$$R_2(t|N(t) = 2) = \frac{\int_0^t g(t_2) \frac{\int_0^{t_2} g(t_1) dt_1}{A_1(t_2)} dt_2}{A_2(t)}. \quad (23)$$

由式(4)及式(23)可以得到 2 次冲击载荷条件下的结构可靠度为

$$R_2(t) = R(t|N(t) = 2) P(N(t) = 2) = \frac{\int_0^t g(t_2) \frac{\int_0^{t_2} g(t_1) dt_1}{A_1(t_2)} dt_2}{A_2(t)} P(N(t) = 2). \quad (24)$$

根据引理 2、式(20)和式(24), 结构经受 i 次冲击载荷条件下的极值冲击模型可靠度可以表示为

$$R_i(t|N(t) = i) = \frac{\int_0^t f_i(t_i) P\left(W_i < D(t_i) \mid \prod_{j=1}^{i-1} W_j < D(t_j)\right) dt_i}{\int_0^t f_i(t_i) dt_i} = \frac{\int_0^t g(t_i) P\left(\prod_{j=1}^{i-1} W_j < D(t_j)\right) dt_i}{\int_0^t f_i(t_i) dt_i} = \frac{\int_0^t g(t_i) \frac{\int_0^{t_i} g(t_{i-1}) \prod_{j=1}^{i-2} W_j < D(t_j) dt_{i-1}}{A_{i-1}(t_i)} dt_i}{A_i(t)}. \quad (25)$$

对式(25)内的求积条件进行展开, 得到.

$$R_i(t|N(t)=i) = \frac{\int_0^t g(t_i) \left(\int_0^{t_i} g(t_{i-1}) \left(\int_0^{t_{i-1}} g(t_{i-2}) \left(\dots \left(\int_0^{t_2} g(t_1) dt_1 / A_1(t_2) \right) \dots \right) dt_{i-2} / A_{i-2}(t_{i-1}) \right) dt_{i-1} / A_{i-1}(t_i) \right) dx_i}{A_i(t)}. \quad (26)$$

因此,由式(4)、式(5)、式(26)可以得到极值冲击模型的结构可靠度公式为

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i=0}^N R_i(t) = \sum_{i=0}^N R(t|N(t)=i)P(N(t)=i) = \\ &P(N(t)=0) + \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^i P(W_j < D(t_j))P(N(t)=i) = \\ &e^{-\lambda t} + \int_0^t g(t_1) dt_1 / A_1(t) P(N(t)=1) + \\ &\sum_{i=2}^N \int_0^t g(t_i) \left(\int_0^{t_i} g(t_{i-1}) \left(\int_0^{t_{i-1}} g(t_{i-2}) \times \right. \right. \\ &\left. \left. \left(\dots \left(\int_0^{t_2} g(t_1) dt_1 / A_1(t_2) \right) \dots \right) dt_{i-2} / A_{i-2}(t_{i-1}) \right) dt_{i-1} / \right. \\ &\left. A_{i-1}(t_i) \right) dt_i / A_i(t) P(N(t)=i). \quad (27) \end{aligned}$$

3 算例分析及讨论

3.1 数学算例

考虑零部件结构强度 $D(t)$ 服从对数退化模型,基于随机过程及应力强度模型对结构的可靠度进行分析.

$$D(t) = D(0) + \frac{(D(0) - \sigma_{\max}) \ln[1 - (t/N_n)]}{\ln N_n}. \quad (28)$$

式中: $D(0)$ 为初始强度,取值为 1 000; N_n 为疲劳寿命,取值为 10^5 ; σ_{\max} 为材料断裂时的强度,取值为 400.

为了说明不同计算模型和本文算法及 MC 仿真结果的区别,对只有 1 次冲击载荷情况下不同算法的计算结果进行对比.泊松分布参数 λ 取值为 2×10^{-5} ,不同计算方法的计算公式为

$$R(t) = \frac{\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} P_i(x) dx}{\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx}, \quad (29)$$

$$R_1(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} P_i(x) dx, \quad (30)$$

$$R_2(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} P_i(x) \frac{1}{t} dx. \quad (31)$$

式(29)为本文的方法,式(30)为文献[13]的方法,式(31)为文献[12]的方法.

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \int_0^{D(t)} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \\ &\Phi \left[\frac{D(0) + \frac{(D(0) - \sigma_{\max}) \ln[1 - (t/N_n)]}{\ln N_n} - \mu}{\sigma} \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

式中:冲击载荷大小服从正态分布;均值 μ 为 700;方差 σ 为 100.

以 MC 仿真(见表 1)结果作为近似理论值,分别用上述 3 种方法与 MC 仿真结果进行比较,计算结果如表 2 所示.通过相对误差对比可知文献[12]相对误差为 0.06%,随着时间增加误差越来越大;文献[13]在时间为 2×10^4 s 时,相对误差为 36.79%,随着时间增加相对误差越来越小.利用本文推导的公式,计算结果和 MC 仿真结果更为吻合.

表 1 MC 仿真算法计算第 1 次冲击载荷的结构可靠度
Table 1 Structural reliability of the first shock load calculated by the MC simulation algorithm

MC 仿真计算可靠度算法: $N_m, t \rightarrow P(t)$	
输入:	N_m, t
输出:	$P(t)$
1.	设置仿真次数 $N_m = 10^6$, 计算时间为 t ;
2.	产生随机数 $x(k): x(k) \sim U[0, 1], k = 1, 2, \dots, N_m$;
3.	计算随机数 $x(k)$ 对应的时间 $y(k)$: $y(k) = -\log(1 - x(k)) / \lambda$;
4.	根据式(7)计算抽样点的可靠度: $P(k)$;
5.	设置计算变量的初始值: $N_1 = 0, N_2 = 0$;
6.	For $k = 1$ to $k = N_m$;
7.	if $y(k) < t$;
8.	$N_1 = N_1 + 1$;
9.	$N_2 = N_2 + P(k)$;
10.	End
11.	End
12.	$P(t) = (N_2 / N_1)$;
13.	Return $P(t)$.

3.2 工程算例

根据美国 Sandia 实验室所做的微机电系统 (micro-electro-mechanical system, MEMS) 实验, MEMS 受到随机冲击载荷,当冲击载荷大于系统的结构强度时,系统会发生极值冲击失效^[15].如

图2所示,恢复弹簧是由硅制造的悬臂梁构成,当梳齿运动之后,悬臂梁发生弯曲,产生了弹性力,使梳齿恢复到原来的位置.当梳齿运动引起加载力过大,且弹簧脱离硅基底平面,致使限位块失去限位功能,导致恢复弹簧断裂^[16].由于硅梁与基底发生摩擦,由此引起的强度退化接近线性过程,故在处理时用简化模型,结构强度退化按照

线性过程处理.

利用文献[12]和文献[13]中数据,为了使本文模型与上述文献中模型更加相近,对退化率参数 β_{d1} 进行近似假设.同时增加对比假设,来说明所提出的基于分布特性的方法,以描述随机冲击过程中结构强度退化的负载-强度干涉模型可靠度评估方法,参数如表3所示.

表2 计算方法相对误差对比
Table 2 Comparison of relative errors by calculation methods

转数 $\times 10^{-4}$	MC 仿真	文献[12]		本文方法		文献[13]	
	可靠度	可靠度	RE/%	可靠度	RE/%	可靠度	RE/%
2	0.974 559	0.974 022	0.06	0.974 558	0	0.616 038	36.79
5	0.971 183	0.966 536	0.48	0.971 192	0	0.891 471	8.21
8	0.968 472	0.950 476	1.86	0.968 547	-0.01	0.950 808	1.82

注:RE为相对误差,下同.

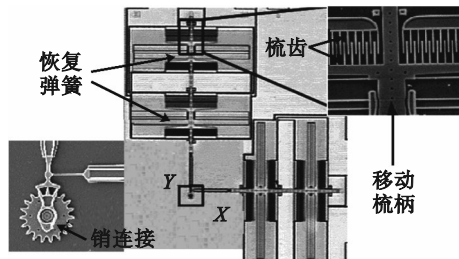


图2 MEMS
Fig. 2 MEMS

表3 MEMS 参数
Table 3 MEMS parameters

参数	数值	来源
D_0 / GPa	1.5	文献[14]
β_{d1} /(GPa $\cdot r^{-1}$)	5×10^{-6}	近似假设
β_{d2} /(GPa $\cdot r^{-1}$)	1×10^{-5}	对比假设
μ / GPa	1.2	文献[13]
σ / GPa	0.2	文献[13]
λ_1 / r	6×10^{-5}	对比假设
λ_2 / r	5×10^{-5}	文献[14]

在图3中,使用本文提出的基于随机分布特性的方法、文献[12]的方法、文献[13]的方法和MC仿真方法分别计算了当冲击频率为 λ_1 、强度退化率为 β_{d1} 时,第1次冲击载荷作用下极值冲击模型的可靠度.如图3所示,文献[12]的方法与MC仿真方法结果接近,误差发生在 2×10^4 r之后且在 $2 \times 10^4 \sim 5 \times 10^4$ r不太明显;文献[13]方法的结果在 5×10^4 r之前误差较大,但在之后误差越来越小.以MC仿真计算结果作为近似理论值,分别计算本文方法及上述文献中方法的相对误差,如表

4所示.文献[13]的相对误差不稳定,且有些误差偏大,不能有效进行可靠度的评估,文献[12]的相对误差较文献[13]更易于接受.在该参数下,本文方法与MC仿真计算结果更为吻合,相对误差可以忽略不计,可以作为理论值.

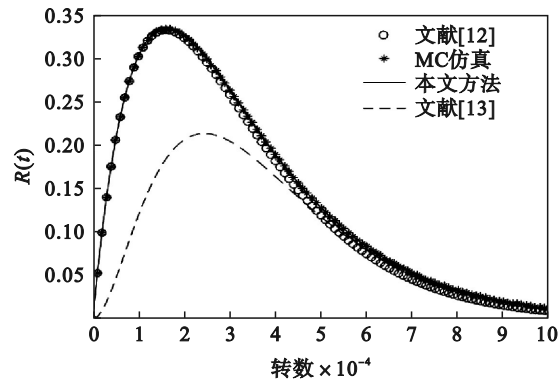


图3 当参数为 λ_1, β_{d1} 时,第1次冲击条件下的系统可靠度
Fig. 3 System reliability of the first shock with parameters λ_1 and β_{d1}

如图4所示,用4种方法分别计算了在冲击频率为 λ_1 、强度退化率为 β_{d2} 的条件下,第1次冲击载荷作用下的极值冲击模型可靠度.文献[12]和文献[13]的误差变化趋势与图3基本一致,误差存在的区间基本保持不变.同样以MC仿真计算结果作为近似理论值,3种方法的相对误差如表5所示.文献[13]的相对误差仍然不稳定,且有些误差偏大,不能有效进行可靠度的评估,文献[12]的相对误差随着结构强度的退化率增大相对误差会变得更加明显.而本文方法的计算结果和图3一样,相对误差可以忽略不计,可以作为理论值.

表 4 参数为 λ_1, β_{d1} 时, 计算方法相对误差对比
Table 4 Comparison of relative errors by calculation methods with parameters λ_1 and β_{d1}

转数 $\times 10^{-4}$	MC 仿真 可靠度	文献[12]		本文方法		文献[13]	
		可靠度	RE/%	可靠度	RE/%	可靠度	RE/%
3	0.262 698	0.257 366	2.03	0.262 732	0.01	0.204 109	22.30
6	0.083 124	0.074 339	10.57	0.083 143	0.02	0.079 004	4.94
9	0.020 184	0.015 242	24.48	0.020 181	0.01	0.019 957	1.12

为了研究冲击载荷频率对可靠性模型的影响, 分别用 4 种方法计算了冲击频率为 λ_2 , 强度退化率为 β_{d1} 时的可靠度, 如图 5 所示. 以 MC 仿真

计算结果作为近似理论值, 以本文方法及上述文献 2 种方法与 MC 仿真结果进行相对误差分析, 如表 6 所示.

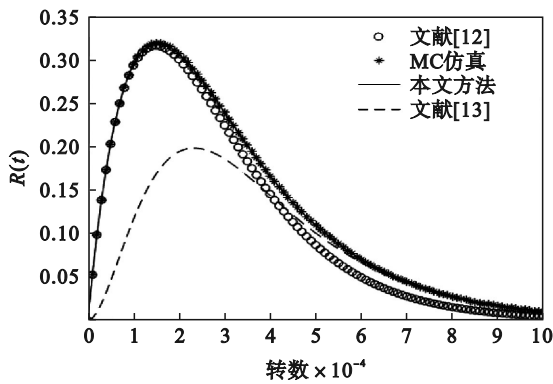


图 4 当参数为 λ_1, β_{d2} 时, 第 1 次冲击条件下的系统可靠度
Fig. 4 System reliability of the first shock with parameters λ_1 and β_{d2}

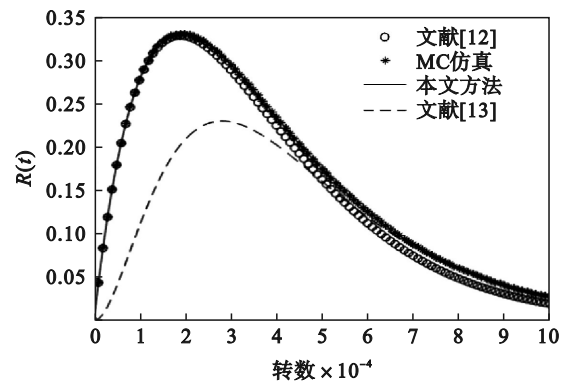


图 5 当参数为 λ_2, β_{d1} 时, 第 1 次冲击条件下的系统可靠度
Fig. 5 System reliability of the first shock with parameters λ_2 and β_{d1}

表 5 参数为 λ_1, β_{d2} 时, 计算方法相对误差对比
Table 5 Comparison of relative errors of calculation methods with parameters λ_1 and β_{d2}

转数 $\times 10^{-4}$	MC 仿真 可靠度	文献[12]		本文方法		文献[13]	
		可靠度	RE/%	可靠度	RE/%	可靠度	RE/%
3	0.239 684	0.224 861	6.18	0.239 610	0.03	0.186 145	22.34
6	0.070 255	0.049 609	29.39	0.070 163	0.13	0.066 670	5.10
9	0.016 769	0.008 400	49.91	0.016 742	0.16	0.016 556	1.27

由图 3 到图 5 的结果表明: 文献[12]的计算误差随着时间增加逐渐增大, 文献[13]的计算误差主要体现在峰值附近. 且两种方法对模型退化

率参数和冲击载荷频率参数均非常敏感. 本文方法的计算结果与 MC 仿真结果基本一致, 相对误差较小且稳定性更好, 可以作为理论值.

表 6 参数为 λ_2, β_{d1} 时, 计算方法相对误差对比
Table 6 Comparison of relative errors of calculation methods with parameters λ_2 and β_{d1}

转数 $\times 10^{-4}$	MC 仿真 可靠度	文献[12]		本文方法		文献[13]	
		可靠度	RE/%	可靠度	RE/%	可靠度	RE/%
3	0.295 596	0.289 506	2.06	0.295 543	0.02	0.229 598	22.33
6	0.126 254	0.112 878	10.59	0.126 247	0.01	0.119 961	4.98
9	0.041 345	0.031 240	24.22	0.041 365	-0.05	0.040 905	1.06

为分析所有冲击载荷次数条件下系统的可靠度, 利用本文方法计算了冲击载荷频率为 λ_2 , 结构强度退化率为 β_{d1} 时的结构不同冲击载荷次数下和全概率下的结构可靠度, 如图 6 所示. 利用

本文提出的基于随机分布特性的方法计算结构可靠度, 结果表明, 结构的强度退化率越小时结构遭受冲击载荷时将更加可靠. 同时, 随着冲击载荷作用次数越多, 结构越容易失效, 并且当冲

击载荷次数大于 6 时,可靠度几乎等于 0.由此可知 MEMS 系统的可靠度对结构强度退化率较为敏感,减缓强度退化可以有效提高系统的可靠性.

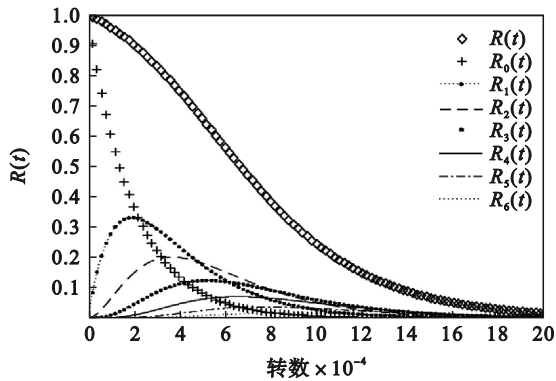


图 6 参数为 λ_2, β_{d1} 时,系统可靠度

Fig. 6 System reliability with parameter λ_2 and β_{d1}

4 结 论

1) 提出了一种新的基于随机分布特性的方法,对结构强度退化模型、随机负载强度模型进行可靠度评估.假设冲击载荷出现的次数服从泊松分布,并基于此证明冲击载荷出现时间的概率密度函数服从伽马分布.基于冲击载荷到来时间服从伽马分布的特性,推导出了模型可靠度的计算公式.

2) 通过案例研究,比较本文方法、文献[12]方法、文献[13]方法与 MC 仿真方法的区别.结果表明,本文提出基于随机分布特性的计算方法结果更准确、更稳定,和 MC 仿真方法结果完全重合.基于随机分布特性的可靠度评估方法,可以更好地用于计算结构退化在极值冲击模型下的可靠度.

3) 通过本文推导出的公式及算例可以发现,该计算方法不依赖于强度退化路径,对于随机冲击载荷下的应力强度干涉模型可靠度评估,具有一定意义的普适性.

参考文献:

[1] Zhao Y P, Zhang Y M. Reliability design and sensitivity analysis of cylindrical worm pairs [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 82: 218–230.
[2] Lyu H, Zhang X W, Yang Z Y, et al. Reliability analysis

for the dependent competing failure with wear model and its application to the turbine and worm system [J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 50265–50280.

- [3] 郭凡逸,孙志礼,张胜男,等.一种微位移柔顺放大机构的优化设计[J].东北大学学报(自然科学版),2022,43(7): 996–1002.
(Guo Fan-yi, Sun Zhi-li, Zhang Sheng-nan, et al. Optimal design of a micro-displacement compliant amplification mechanism [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2022, 43(7): 996–1002.)
[4] Xie L Y, Zhou J Y, Hao C Z. System-level load-strength interference based reliability modeling of k -out-of- n system [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2004, 84(3): 311–317.
[5] Huang X Z, Jin S J, He X F, et al. Reliability analysis of coherent systems subject to internal failures and external shocks [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2019, 181: 75–83.
[6] Bozbulut A R, Eryilmaz S. Generalized extreme shock models and their applications [J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2020, 49(1): 110–120.
[7] Gut A. Mixed shock models [J]. *Bernoulli*, 2001, 7(3): 541–555.
[8] Lyu H, Yang Z Y, Wang S, et al. Reliability modeling for multistage systems subject to competing failure processes [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(6): 2936–2949.
[9] Chang M X, Huang X Z, Coolen F P A, et al. Reliability analysis for systems based on degradation rates and hard failure thresholds changing with degradation levels [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 216: 108007.
[10] Hao S H, Yang J. Reliability analysis for dependent competing failure processes with changing degradation rate and hard failure threshold levels [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 118: 340–351.
[11] Liu W G, Wang X G, Li S J, et al. Study on the effect of failure threshold change rate on product reliability based on performance degradation [J]. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2020, 20(2): 448–454.
[12] Hao S H, Yang J, Ma X B, et al. Reliability modeling for mutually dependent competing failure processes due to degradation and random shocks [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 51: 232–249.
[13] Rafiee K, Feng Q M, Coit D W. Reliability analysis and condition-based maintenance for failure processes with degradation-dependent hard failure threshold [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2017, 33(7): 1351–1366.
[14] Wang C. Structural reliability and time-dependent reliability [M]. Cham: Springer International Publishing, 2021.
[15] Tanner D M, Dugger M T. Wear mechanisms in a reliability methodology [C]//Reliability, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS II. San Jose, 2003: 22–40.
[16] Tanner D M, Walraven J A, Helgesen K, et al. MEMS reliability in shock environments [C]//IEEE International Reliability Physics Symposium. San Jose: IEEE, 2000: 129–138.