

Nil₃空间中的极小仿射平移曲面

于延华, 栗倩荣, 薛睿

(东北大学理学院, 辽宁沈阳 110819)

摘要: Nil₃空间是带有 Heisenberg 群结构的黎曼空间. 利用 Heisenberg 群的群算子构造 Nil₃空间中的仿射平移曲面. 仿射平移曲面是由两条平面曲线作为基线通过群运算生成的. 由于群运算不具有交换性, 选定一组基线可以生成两类不同的仿射平移曲面. 之后对这两种仿射平移曲面进行分类. 利用常数变易法和欧拉待定指数函数法解曲面的平均曲率等于零时所对应的微分方程, 并给出不同运算下极小仿射平移曲面的分类定理. 最后给出一些具体的极小仿射平移曲面, 并用 Mathematica 画出相应的图像.

关键词: Nil₃空间; 仿射平移曲面; 极小曲面; Heisenberg 群; 平均曲率

中图分类号: O 186 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2024)10-1513-08

Minimal Affine Translation Surfaces in Nil₃ Space

YU Yan-hua, LI Qian-rong, XUE Rui

(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: YU Yan-hua, E-mail: yyh_start@126.com)

Abstract: Nil₃ space is a Riemannian space with a Heisenberg group structure. The affine translation surfaces in Nil₃ space are constructed by using the group operator of the Heisenberg group. These surfaces are generated by two planar curves as base lines through group operation. However, since group operations are not commutative, selecting the same base lines generates two types of different affine translation surfaces. Then, the two affine translation surfaces are classified. Employ the method of variation of constants and Euler's method of indeterminate exponential functions to solve the differential equation arising when the mean curvature of a surface equal zero, and present the classification theorem for minimal affine translation surfaces under various operations. Finally, some specific minimal affine translation surfaces are given, and corresponding images are drawn using Mathematica.

Key words: Nil₃ space; affine translation surface; minimal surface; Heisenberg group; mean curvature

自从现代微分几何开始研究更一般的空间——流形以来, Nil₃空间逐渐受到许多学者的关注^[1-5]. 作为一种具有 Heisenberg 群结构的重要的几何空间, 相对于较为熟悉的三维欧氏空间, Nil₃空间则是一个全新的领域. 因为空间度量的差异, 使得一些基本概念有了质的变化, 这些不同空间的差异性就是学者们研究的重点.

三维欧氏空间中的仿射平移曲面为 $F(x, y) = f(x) + g(x + ay)$. 其中: a 是非零常数; $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 是

可微函数. 当 $a=0$ 时, 仿射平移曲面退化为经典的平移曲面. 平移曲面的研究可追溯到 1835 年数学家 Scherk 的相关工作. 经过数学工作者的不断努力, 平移曲面的研究成果日渐丰富^[6-8]. 对于具有更一般形式的仿射平移曲面, 目前的研究现状如下: Liu 等^[9]给出了三维欧氏空间中极小仿射平移曲面的分类. Yang 等^[10]在仿射空间中研究了仿射平移曲面. 袁媛等^[11]在三维 Minkowski 空间中研究了仿射平移曲面. Fu 等^[12]研究了具有常高斯

收稿日期: 2023-09-11

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N2104007).

作者简介: 于延华(1978-), 女, 湖北荆门人, 东北大学副教授.

曲率的仿射平移曲面. Liu 等^[13]研究了具有常平均曲率的仿射平移曲面. 本文主要在 Nil_3 空间中研究极小仿射平移曲面的分类问题.

1 预备知识

Heisenberg 群 Nil_3 空间是具有群算子

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

和左不变度量 $I = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy) \right)^2$ 的黎曼流形^[14].

Nil_3 空间中的左不变标准正交基为

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, e_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

其中, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, i, j = 1, 2, 3.$

基底满足如下的李括号运算:

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = 0, [e_3, e_1] = 0.$$

其在黎曼联络下的关系为

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_3, \nabla_{e_1} e_3 = -\frac{1}{2} e_2,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \nabla_{e_2} e_2 = 0, \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \nabla_{e_3} e_3 = 0.$$

2 基本概念

设向量 $\alpha_i \in \text{Nil}_3$, 且 $\alpha_i = (x_i, y_i, z_i)$, 其中 $x_i, y_i, z_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2)$. $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 Nil_3 空间中的标准正交基.

定义 1 向量 α_1, α_2 的内积定义为

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

如果 α_1, α_2 的内积为零, 称它们是正交的. 向量的长度规定为 $\|\alpha_i\| = \sqrt{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$.

定义 2 向量 α_1, α_2 的外积定义为

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) e_1 +$$

$$(x_2 z_1 - x_1 z_2) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

如果 α_1, α_2 的外积为零, 称它们是平行的.

设 $r: M \rightarrow \text{Nil}_3$ 为一个可定向曲面 M 的等距浸入, $r = r(x, y)$ 为 M 的向量表示. 对于 M 上的任意一点 p 的切空间 $T_{p,M}$, $\{r_x, r_y\}$ 为切空间 $T_{p,M}$ 的一组基.

曲面 M 的第一基本量为

$$E = \langle r_x, r_x \rangle, F = \langle r_x, r_y \rangle, G = \langle r_y, r_y \rangle.$$

单位法向量为

$$n = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|}.$$

平均曲率 H 和高斯曲率 K 分别表示为

$$H = \frac{G \langle n, \nabla_{r_x} r_x \rangle - 2F \langle n, \nabla_{r_x} r_y \rangle + E \langle n, \nabla_{r_y} r_y \rangle}{2(EG - F^2)},$$

$$K = \frac{\langle n, \nabla_{r_x} r_x \rangle \langle n, \nabla_{r_y} r_y \rangle - \langle n, \nabla_{r_x} r_y \rangle \langle n, \nabla_{r_x} r_y \rangle}{EG - F^2}.$$

若曲面的平均曲率满足 $H = 0$, 那么称这个曲面是极小的^[6].

若曲面的高斯曲率满足 $K = 0$, 那么称这个曲面是平坦的^[3].

本文中规定 $b_i, m_i, b_{ij}, c_{ij}, l_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ 均表示实常数, f_{ij} 是关于 $y - ax$ 的任意函数.

3 第一类仿射平移曲面

设两条光滑的平面曲线 $\phi(x) = (x, 0, u(x))$ 和 $\varphi(x, y) = (0, y, v(y + ax))$, 其中 u, v 为连续可导函数. 通过群运算 “*” 可得第一类仿射平移曲面 $M_1(\phi, \varphi)$ 的参数表达式为

$$r(x, y) = (x, 0, u(x)) * (0, y, v(y + ax)) = (x, y, z(x, y)).$$

其中, $z(x, y) = u(x) + v(y + ax) + \frac{xy}{2}$.

曲面 M_1 的自然标架 $\{r_x, r_y\}$ 为

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r_x = e_1 + (u' + y + av') e_3, \frac{\partial r}{\partial y} = r_y = e_2 + v' e_3.$$

其中, $u' = \frac{du(x)}{dx}, v' = \frac{dv(y + ax)}{d(y + ax)}$.

曲面 M_1 的单位法向量为

$$n = \frac{1}{\omega} \{ -(u' + y + av') e_1 - v' e_2 + e_3 \},$$

其中, $\omega = \|r_x \times r_y\| = \sqrt{1 + v'^2 + (u' + y + av')^2}$.

曲面 M_1 第一基本量为

$$E = 1 + (u' + y + av')^2,$$

$$F = v'(u' + y + av'),$$

$$G = 1 + v'^2.$$

利用基底的联络关系直接计算可得

$$\nabla_{r_x} r_x = -(u' + y + av') e_2 + (u'' + a^2 v'') e_3,$$

$$\nabla_{r_x} r_y = \frac{1}{2} (u' + y + av') e_1 - \frac{1}{2} v' e_2 + \frac{1}{2} (1 + 2av'') e_3$$

$$\nabla_{r_y} r_y = v' e_1 + v'' e_3.$$

又因为

$$\langle n, \nabla_{r_x} r_x \rangle = \frac{1}{\omega} \{ u'' + a^2 v'' + v'(u' + y + av') \},$$

$$\langle n, \nabla_{r_x} r_y \rangle = \frac{1}{2\omega} \{ v'^2 + 1 + 2av'' - (u' + y + av')^2 \},$$

$$\langle \mathbf{n}, \nabla_r \mathbf{r}_y \rangle = \frac{1}{\omega} \{v'' - v'(u' + y + av')\}.$$

因此, M_1 的平均曲率为

$$H = \frac{1}{2\omega^3} \{u''(1 + v'^2) + v''(1 + a^2 + (u' + y)^2) - v'(u' + y + av')\}.$$

高斯曲率为

$$K = \frac{1}{4\omega^4} \{4u''(v'' - v'(u' + y + av')) - (v'^2 + (u' + y + av')^2) - 2(1 + 2av')(u' + y + av') + 4v'v''(1 - a^2)(u' + y + av') - 4av'' - 1\}.$$

定理 1 对于形如 $\mathbf{r}(x, y) = \{x, y, z(x, y)\} = \{x, y, u(x) + v(y + ax) + \frac{1}{2}xy\}$ 的仿射平移曲面 M_1 , 若 M_1 极小时, 函数 $z(x, y)$ 需满足如下情况之一:

1) $z(x, y) = c_{11}x + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{xy}{2} + l_{13} +$

$$c_{13} \left[(y + ax + c_{11}) \sqrt{l_{12} + (y + ax + c_{11})^2} + l_{12} \ln \left| y + ax + c_{11} + \sqrt{l_{12} + (y + ax + c_{11})^2} \right| \right] - l_{11}(y + ax + c_{11})^2.$$

2) $z(x, y) = l_{23}x + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{xy}{2} + l_{24} +$

$$l_{25} \ln \left| \cos \frac{c_{25}x + c_{26}}{2b_1(y + ax) + 2c_{21}} \right|.$$

3) $z(x, y) = l_{32} + b_3x + \frac{xy}{2}.$

4) $z(x, y) = c_{42}x + c_{46}x^2 + \frac{2}{3}(y + ax)^{\frac{3}{2}} +$

$$c_{44}(y + ax) + \frac{xy}{2} + l_{41}.$$

5) $z(x, y) = l_{51}e^{b_5x} + \frac{1}{2}ax^2 + c_{51}x +$

$$c_{53} \int \frac{d(y + ax)}{(y + ax)^{c_{52}} - 1} + c_{54}(y + ax) + \frac{xy}{2} + l_{52}.$$

证明 当 $H = 0$, 曲面为极小曲面. 因此

$$u''(1 + v'^2) + v''(1 + a^2 + (u' + y)^2) - v'(u' + y + av') = 0, \tag{1}$$

由于 $1 + v'^2 \neq 0$, 式(1)等价于式(2).

$$u'' + (1 + a^2 + (u' + y)^2) \frac{v''}{1 + v'^2} - (u' + y + av') \frac{v'}{1 + v'^2} = 0. \tag{2}$$

令 $A = \frac{v'}{1 + v'^2}, B = \frac{v''}{1 + v'^2},$

且 $\frac{dA}{d(y + ax)} = A', \frac{dB}{d(y + ax)} = B'.$

式(2)分别关于 x, y 求导可得

$$u''' + 2u''(u' + y)B + a(1 + a^2 + (u' + y)^2)B' -$$

$$(u'' + a^2v'')A - (u' + y + av')A' = 0, \tag{3}$$

$$2(u' + y)B + (1 + a^2 + (u' + y)^2)B' - (1 + av'')A - (u' + y + av')A' = 0. \tag{4}$$

联立式(3)和式(4)可得

$$u''' + 2(u'' - a)(u' + y)B - (u'' - a)A = 0. \tag{5}$$

解式(5)可知:

1) 当 $u'' - a = 0$ 时, 即对 $u'' = a$ 求解, 易得

$$u(x) = \frac{1}{2}ax^2 + c_{11}x + c_{12}.$$

此时, 将 $u(x)$ 代入式(2)可得

$$a(1 + v'^2) + v''(1 + a^2 + (ax + c_{11} + y)^2) - v'(ax + c_{11} + y + av') = 0, \tag{6}$$

令 $s = y + ax$, 将式(6)整理得微分方程

$$v''(1 + a^2 + (s + c_{11})^2) - v'(s + c_{11}) + a = 0. \tag{7}$$

令 $p(x) = v'$, 则 $\frac{dp(s)}{ds} = v''$, 解微分方程

$$\frac{dp(s)}{ds} = \frac{s + c_{11}}{1 + a^2 + (s + c_{11})^2} p(s) - \frac{a}{1 + a^2 + (s + c_{11})^2},$$

可以得到

$$p(s) = -\frac{a}{1 + a^2}(s + c_{11}) + c_{13} \sqrt{1 + a^2 + (s + c_{11})^2}. \tag{8}$$

将 $p(s) = v'$ 代入式(8), 并对 s 积分可得

$$v(y + ax) = -\frac{a}{2(1 + a^2)}(y + ax + c_{11})^2 +$$

$$c_{13} \left[(y + ax + c_{11}) \sqrt{1 + a^2 + (y + ax + c_{11})^2} +$$

$$(1 + a^2) \ln \left| y + ax + c_{11} + \sqrt{1 + a^2 + (y + ax + c_{11})^2} \right| \right] + c_{14}.$$

此时第一类极小仿射平移曲面 M_1 见图 1, 且曲面 M_1 图形对应的参数表达式中函数 $z(x, y)$ 为

$$z(x, y) = x + \frac{1}{2}x^2 + (y + x + 1) \sqrt{2 + (y + x + 1)^2} - \frac{1}{4}(y + x + 1)^2 + 2 \ln \left| y + x + 1 + \sqrt{2 + (y + x + 1)^2} \right|.$$

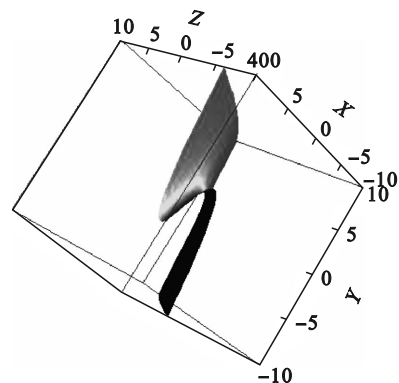


图 1 $u'' - a = 0$ 情况下的第一类极小仿射平移曲面 M_1
Fig. 1 The first type of minimal affine translation surface M_1 in case $u'' - a = 0$

2) 当 $u''-a \neq 0$ 时, 整理式(5)可得

$$\frac{u'''}{u''-a} + 2(u'+y)B - A = 0, \quad (9)$$

式(9)对 y 求导可得

$$2B + 2(u'+y)B' - A' = 0, \quad (10)$$

联立式(9)、式(10)可得

$$\frac{u'''}{u''-a} B' + A'B - AB' - 2B^2 = 0. \quad (11)$$

分如下两种情况讨论:

① 若 $B'=0$, 即 $B=b_1$, 此时

$$v'' = b_1(1+v'^2). \quad (12)$$

针对常数 b_1 是否为零, 分情况讨论式(12):

i) 当 $b_1 \neq 0$ 时, 作变量替换 $s=y+ax$, 且令 $p_1(s)=v'$, 则式(11)等价于求解方程

$$\frac{dp_1(s)}{1+p_1^2(s)} = b_1 ds,$$

易解得 $p_1(s) = \tan(b_1 s + c_{21})$.

将 $p_1(s)=v'$ 代入式(11), 并对 s 积分可得

$$v(y+ax) = -\frac{1}{b_1} \ln |\cos(b_1(y+ax) + c_{21})| + l_{21}. \quad (13)$$

将 $v(y+ax)$ 代入式(10)可得

$$\frac{u'''}{u''-a} + 2(u'-ax)b_1 = \frac{1}{2} \sin(2(b_1 s + c_{21})) - 2b_1 s = l_{22}.$$

等价于求解微分方程

$$u'' + 2b_1(u'-ax)(u''-a) - l_{22}(u''-a) = 0, \quad (14)$$

设 $q(x)=u'-ax$, 则可将式(14)降阶为

$$q''(x) + (2b_1 q(x) - l_{22})q'(x) = 0,$$

解得 $q(x)$, 将 $q(x)=u'-ax$ 代入式(14)并关于 x 积分可得

$$u(x) = \frac{l_{22}}{2b_1} x + \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{b_1} \ln \left| \cos\left(\frac{1}{2}(c_{22}x + c_{23})\right) \right| + c_{24}.$$

此时第一类极小仿射平移曲面 M_1 见图 2, 且曲面 M_1 图形对应的参数表达式中函数为

$$z(x, y) = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{xy}{2} + \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(y+x)} \right|.$$

ii) 当 $b_1=0$ 时, 即

$$v'' = 0, v' = b_2 (b_2 \in \mathbf{R}),$$

将 $v'=b_2$ 代入式(1)可得

$$u''(1+b_2^2) - b_2(u'+y+ab_2) = 0. \quad (15)$$

对式(15)关于 y 求导得

$$b_2 = 0, u'' = 0.$$

因此

$$u(x) = b_3 x + b_4, v(y+ax) = b_5. \quad (16)$$

此时第一类极小仿射平移曲面 M_1 见图 3, 且曲面 M_1 图形对应的参数表达式中函数为

$$z(x, y) = x + 2 + \frac{1}{2} xy.$$

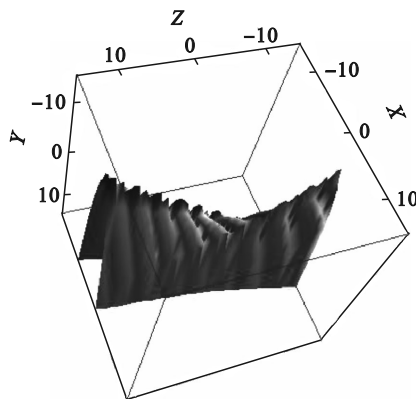


图 2 $B'=0, b_1 \neq 0$ 情况下的第一类极小仿射平移曲面 M_1
Fig. 2 The first type of minimal affine translation surface M_1 in case $B'=0, b_1 \neq 0$

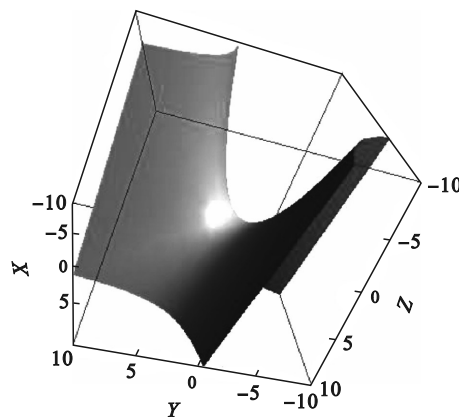


图 3 $B'=0, b_1 = 0$ 情况下的第一类极小仿射平移曲面 M_1
Fig. 3 The first type of minimal affine translation surface M_1 in case $B'=0, b_1 = 0$

② 如果 $B' \neq 0$, 式(11)可化简为

$$\frac{u'''}{u''-a} = \frac{AB' - A'B + 2B^2}{B'} = b_6. \quad (17)$$

由于 $B' \neq 0$, 则式(17)等价于

$$2 - \frac{A'B - AB'}{B^2} = b_6 \frac{B'}{B^2}. \quad (18)$$

将式(18)对 s 积分可得

$$2B_s = A - b_6. \quad (19)$$

将 $A = \frac{v'}{1+v'^2}, B = \frac{v''}{1+v'^2}$ 代入式(19)整理为

$$2sv'' = v' - b_6(1+v'^2). \quad (20)$$

作变量替换 $s=y+ax$, 且令 $p_2(s)=v'$,

则式(20)可降阶为

$$2sp_2'(s) = p_2(s) - b_6(1+p_2^2(s)). \quad (21)$$

针对常数 b_6 是否为零, 分情况讨论式(17):

i) 当 $b_6=0$ 时, 由式(17)可得 $u'''=0$, 从而

$$u(x) = \frac{1}{2} c_{41} x^2 + c_{42} x + c_{43}, (c_{41} \neq a), \quad (22)$$

式(21)有解 $p_2(s) = \sqrt{s}$, 进而解得

$$v(y+ax) = \frac{2}{3}(y+ax)^{\frac{3}{2}} + c_{44}(y+ax) + c_{45}. \quad (23)$$

此时第一类极小仿射平移曲面 M_1 见图 4, 且曲面 M_1 图形对应的参数表达式中函数为

$$z(x,y) = 2x + x^2 + \frac{2}{3}(y+ax)^{\frac{3}{2}} + y + \frac{xy}{2}.$$

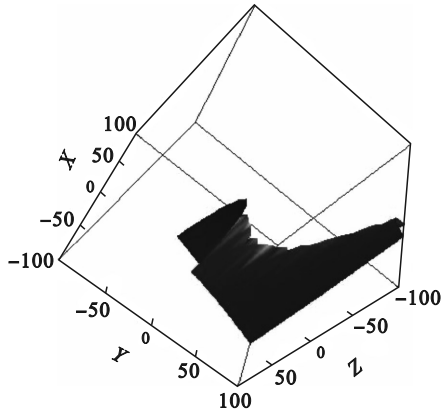


图 4 $B' \neq 0, b_6 = 0$ 情况下的第一类极小仿射平移曲面 M_1
Fig. 4 The first type of minimal affine translation surface M_1 in case $B' \neq 0, b_6 = 0$

ii) 当 $b_6 \neq 0$ 时, 求解微分方程

$$u''' = b_6(u'' - a). \quad (24)$$

令 $q_2(x) = u'' - a$, 即 $u''' = \frac{dq_2(x)}{dx}$, 式 (24) 等价于微分方程

$$q_2'(x) = b_6 q_2(x). \quad (25)$$

两边积分可得 $q_2(x) = e^{b_6 x}$, 进而得

$$u(x) = \frac{1}{b_6^2} e^{b_6 x} + \frac{1}{2} ax^2 + c_{51}x + c_{52}. \quad (26)$$

同时式 (21) 有解

$$p_2(s) = c_{51}(s^{c_{52}} - 1)^{-1} + c_{53}, \quad (27)$$

这里 $c_{51} = \frac{\sqrt{1-4b_6^2}}{b_6}, c_{52} = \frac{\sqrt{1-4b_6^2}}{2}$,

$$c_{53} = \frac{1 + \sqrt{1-4b_6^2}}{2b_6}.$$

再将 $p_2(s) = v'$ 代入式 (20) 解得

$$v(y+ax) = c_{51} \int \frac{d(y+ax)}{(y+ax)^{c_{52}} - 1} + c_{53}(y+ax) + c_{55}.$$

在整理过程中, 合并常数项后所得的常数分别记为 l_{ij} . 定理 1 证明完毕.

4 第二类仿射平移曲面

第二类仿射平移曲面 $M_2(\varphi, \phi)$ 的参数表达式如下:

$$r(x,y) = (0, y, v(y+ax)) * (x, 0, u(x)) = (x, y, z(x,y)).$$

其中, $z(x,y) = u(x) + v(y+ax) - \frac{xy}{2}$.

类似计算可得, 曲面 M_2 的平均曲率如下:

$$H = \frac{1}{2\omega^3} \{u''(1+v'^2) + v''(1+a^2+(u'+y)^2) - v'(u'+y+av')\}. \quad (28)$$

定理 2 对于形如 $r(x,y) = \{x, y, z(x,y)\} = \{x, y, u(x) + v(y+ax) - \frac{1}{2}xy\}$ 的仿射平移曲面 M_2 , 若曲面 M_2 为极小的, 那么函数 $z(x,y)$ 需要满足如下情况之一:

$$1) z(x,y) = b_{11}x - m_1(y+ax) - \frac{xy}{2} + m_2.$$

$$2) z(x,y) = b_{23}x + \frac{1}{4a}(y+ax)^2 - \frac{1}{2a}(y^2 - a^2x^2) - \frac{xy}{2} + f_{21} - 2a \ln\left(\frac{1}{2a}(y+ax) + b_{21}\right).$$

$$3) z(x,y) = \frac{1}{4a}(y+ax)^2 - \frac{1}{2a}(y^2 - a^2x^2) + b_{23}x - \frac{xy}{2} + f_{22} - \frac{1}{b} \ln \left| \cos \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2ab}}(b(y+ax) + b_{22}) \right) \right|.$$

$$4) z(x,y) = b_{14}(y+ax) - m_3x - \frac{xy}{2} + m_4 +$$

$$b_{15} \left((x-b_{14}) \sqrt{1+(x-b_{14})^2} + \ln \left| x-b_{14} + \sqrt{1+(x-b_{14})^2} \right| \right).$$

证明 要使仿射平移曲面 M_2 为极小曲面, 即 $H=0$, 由式 (28) 可得

$$u''(1+(v'-x)^2) + v''(1+a^2+(u'+ax)^2) + (v'-x)(u'+av') = 0, \quad (29)$$

由于 $1+(v'-x)^2 \neq 0$, 该式等价于

$$u'' + (1+a^2+(u'+ax)^2) \frac{v''}{1+(v'-x)^2} + (u'+av') \frac{v'-x}{1+(v'-x)^2} = 0. \quad (30)$$

$$\text{令 } A_1 = \frac{v''}{1+(v'-x)^2}, B_1 = \frac{v'-x}{1+(v'-x)^2}, \text{ 式 (30)}$$

分别关于 x, y 求导有 $u''' + aA_1'(1+a^2+(u'+ax)^2) + 2A_1(u'+ax)(u''+a) + aB_1'(u'+av') + B_1(u''+a^2v'') = 0$,

及 $A_1'(1+a^2+(u'+ax)^2) + B_1'(u'+av') + av''B_1 = 0$, 结合两式整理可得

$$u''' + 2A_1(u'+ax)(u''+a) + B_1u'' = 0. \quad (31)$$

再对式 (31) 关于 y 求导有

$$2A_1'(u'+ax)(u''+a) + B_1'u'' = 0, \quad (32)$$

这里 $A_1' = \frac{dA_1}{d(y+ax)}, B_1' = \frac{dB_1}{d(y+ax)}$.

进而由式 (31) 和式 (32) 可得

$$u'''A'_1 + u''(A'_1B_1 - A_1B'_1) = 0. \quad (33)$$

关于式(33)的求解作如下讨论(注:文中以下出现的 $b_{ij}(i, j = 0, 1, \dots, 9)$ 均为常数).

1) 当 $u''=0$ 时, 令 $u'=b_{11}$, 易得

$$u(x) = b_{11}x + b_{12}.$$

将 $u(x)$ 代入式(29)可得

$$v''(1 + a^2 + (b_{11} + ax)^2) + (av' + b_{11})(v' - x) = 0. \quad (34)$$

式(34)分别对 x, y 求导有

$$av'''(1 + a^2 + (b_{11} + ax)^2) + 2av''(b_{11} + ax) +$$

$$a^2v''(v' - x) + (av' + b_{11})(av'' - 1) = 0,$$

$$v'''(1 + a^2 + (b_{11} + ax)^2) + av''(v' - x) +$$

$$v''(av' + b_{11}) = 0,$$

进而整理可得

$$2av''(b_{11} + ax) - (av' + b_{11}) = 0. \quad (35)$$

再对式(35)分别关于 x, y 求导即可得 $v''=0$, 此时式(34)即为 $av' + b_{11} = 0$, 也就是

$$v(y + ax) = -\frac{b_{11}}{a}(y + ax) + b_{13}. \quad (36)$$

此时第一类极小仿射平移曲面 M_2 见图 5, 且曲面 M_2 图形对应的参数表达式中函数

$$z(x, y) = 20x - y - \frac{xy}{2}.$$

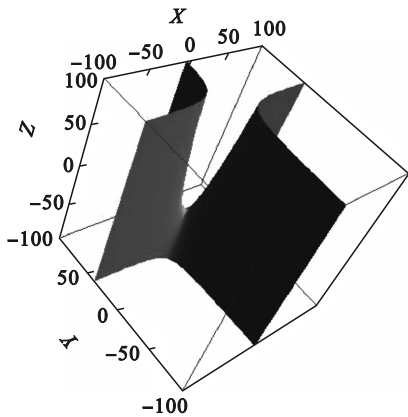


图 5 $u''=0$ 情况下的第二类极小仿射平移曲面 M_2
Fig. 5 The second type of minimal affine translation surface M_2 in case $u''=0$

2) 当 $A'_1=0$ 时, 即存在一个常数使得

$$A = \frac{v''}{1 + (v' - x)^2} = b. \quad (37)$$

① 当 $b=0$ 时, 也就是 $v''=0$, 易得

$$v(y + ax) = b_{14}(y + ax) + b_{17},$$

此时式(29)等价于

$$u''(1 + (b_{14} - x)^2) + (ab_{14} + u')(b_{14} - x) = 0. \quad (38)$$

令 $u' = q_1(x)$, 则 $u'' = \frac{dq_1(x)}{dx}$, 式(38)整理为

$$\frac{1}{q_1(x) + ab_{14}} dq_1(x) = \frac{x - b_{14}}{1 + (x - b_{14})^2} dx,$$

两边积分可得

$$q_1(x) = \sqrt{1 + (x - b_{14})^2} - ab_{14}.$$

将 $q_1(x)$ 代入式(38)解得

$$u(x) = b_{16} - ab_{14}x + b_{15} \left((x - b_{14}) \sqrt{1 + (x - b_{14})^2} + \right.$$

$$\left. \ln \left| x - b_{14} + \sqrt{1 + (x - b_{14})^2} \right| \right).$$

此时第二类极小仿射平移曲面 M_2 见图 6, 且曲面 M_2 图形对应的参数表达式中函数

$$z(x, y) = y + (x - 1) \sqrt{1 + (x - 1)^2} +$$

$$\ln \left| x - 1 + \sqrt{1 + (x - 1)^2} \right| - \frac{1}{2}xy.$$

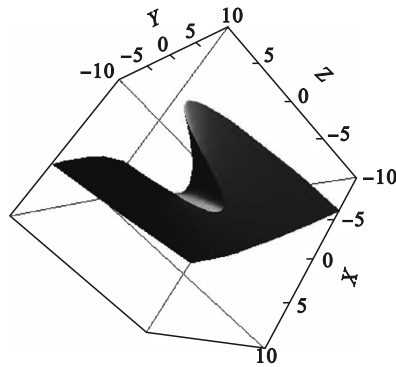


图 6 $A'_1=0, b=0$ 情况下的第二类极小仿射平移曲面 M_2
Fig. 6 The second type of minimal affine translation surface M_2 in case $A'_1=0, b=0$

② 当 $b \neq 0$ 时, 在 $A'_1=0$ 且 $A_1 \neq 0$ 的情况下, 根据式(32)得 $B'_1u''=0$, 又因为

$$B'_1 = \frac{v' - x}{1 + (v' - x)^2} = \frac{1}{b} v''(v' - x) \neq 0,$$

所以 $u''=0$, 即 $u(x) = b_{23}x + b_{24}$. 由于式(37)等价于 $v'' = b + b(v' - x)^2$, 作变量替换 $s = y + ax, t = y - ax$, 可得

$$v'' = b + b \left(1 + \left(v' - \frac{1}{2a}(s - t) \right) \right)^2,$$

令

$$p_3(s) = v' - \frac{1}{2a}(s - t). \quad (39)$$

即 $\frac{dp_3(s)}{ds} = v'' - \frac{1}{2a}$, 因此

$$\frac{dp_3(s)}{ds} = b \left(1 - \frac{1}{2ab} + p_3^2(s) \right). \quad (40)$$

当 $2ab=1$ 时, 则式(40)有解

$$p_3(s) = -\frac{1}{bs + b_{21}}. \quad (41)$$

此时将 $p_3(s) = v' - \frac{1}{2a}(s - t)$ 代入式(41)可以解得

$$v(y + ax) = \frac{1}{4a}(y + ax)^2 - \frac{1}{2a}(y^2 - a^2x^2) -$$

$$2a \ln \left| \frac{1}{2a}(y+ax)+b_{21} \right| + f_{21},$$

这里 f_{21} 是关于 $y-ax$ 的任意函数.

此时第二类极小仿射平移曲面 M_2 见图 7, 且曲面 M_2 图形对应的参数表达式中函数

$$z(x,y) = x + 2 + \frac{1}{4}(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y^2-x^2) - 2 \ln \left| \frac{1}{2}(y+x)+1 \right|.$$

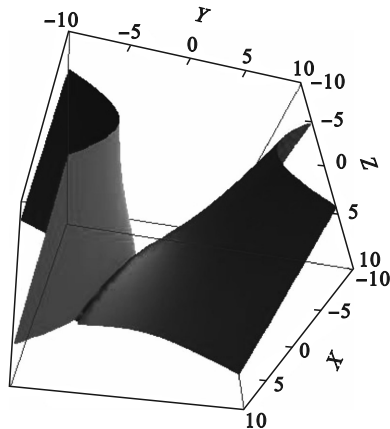


图 7 $A_1'=0, 2ab=1$ 情况下的第二类极小仿射平移曲面 M_2
Fig. 7 The second type of minimal affine translation surface M_2 in case $A_1'=0, 2ab=1$

当 $2ab \neq 1$ 时, 则式(40)有解

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2ab}}} \arctan \frac{p_3(s)}{1-\frac{1}{2ab}} = bs + b_{22}, \text{ 整理为}$$

$$p_3(s) = \sqrt{1-\frac{1}{2ab}} \tan \left(\sqrt{1-\frac{1}{2ab}} (bs + b_{22}) \right), \text{ 代入式}$$

$$(39) \text{ 可以解得 } v(y+ax) = \frac{1}{4a}(y+ax)^2 - \frac{1}{2a}(y^2 - a^2x^2) -$$

$$\frac{1}{b} \ln \left| \cos \left(\sqrt{1-\frac{1}{2ab}} (b(y+ax)+b_{22}) \right) \right| + f_{22}, \text{ 这里}$$

f_{22} 是关于 $y-ax$ 的任意函数.

此时第二类极小仿射平移曲面 M_2 见图 8, 且曲面 M_2 图形对应的参数表达式中函数

$$z(x,y) = x + \frac{1}{4}(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y^2-x^2) - \ln \left| \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (y+x) \right) \right|.$$

③ 当 $u'' \neq 0, A_1' \neq 0$ 时,

此时对式(31)整理可知存在一个常数 β 使得

$$\frac{u'''}{u''} = \frac{A_1' B_1 - A_1 B_1'}{A_1'} = \beta,$$

由于 $A_1' \neq 0, A_1 \neq 0$, 所以有

$$\left(\frac{B_1'}{A_1'} \right)' = -\beta \left(\frac{1}{A_1'} \right)',$$

两边同时关于 $y+ax$ 积分得 $B_1 + \beta = 0$, 即

$$\beta(v-x)^2 + (v-x) + \beta = 0.$$

i) 当 $\beta = 0$ 时, 令 $s = y+ax, t = y-ax$, 可得

$$v' - x = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{2a}(s-t) = 0,$$

进而得 $A_1' = 0$, 与假设矛盾.

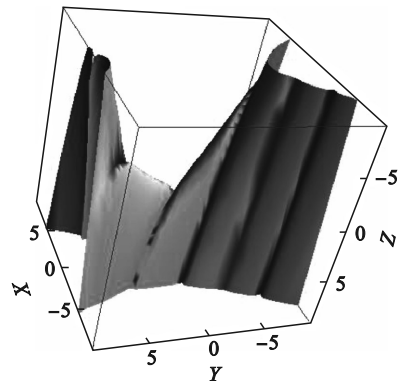


图 8 $A_1'=0, 2ab \neq 1$ 情况下的第二类极小仿射平移曲面 M_2
Fig. 8 The second type of minimal affine translation surface M_2 in case $A_1'=0, 2ab \neq 1$

ii) 当 $\beta \neq 0$ 时,

$$v' - x = \frac{1}{2\beta} (-1 \pm \sqrt{1-4\beta^2}),$$

令 $s = y+ax, t = y-ax$, 可得

$$v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \frac{1}{2a},$$

所以 $A_1 = \frac{1}{2a(1+b_{ss}^2)}$, 即 $A_1' = 0$, 与假设矛盾.

定理 2 证明完毕.

5 结 语

在有 Heisenberg 群结构的 Nil_3 空间中, 研究了群算子作用下的两种不同类型的仿射平移曲面. 并分别对这两种极小的曲面进行了分类, 给出了相应的分类定理、例子及图像.

参考文献:

- [1] Inoguchi J I, López R, Munteanu M I. Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3 [J]. *Geometriae Dedicata*, 2012, 161(1): 221-231.
- [2] Dorfmeister J F, Inoguchi J I, Kobayashi S. A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group [J]. *Asian Journal of Mathematics*, 2016, 20(3): 409-448.
- [3] Inoguchi J I. Flat translation invariant surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group [J]. *Journal of Geometry*, 2005, 82(1/2): 83-90.

