

基于QR分解的类Jacobi联合对角化算法

季策^{1,2}, 李焱¹, 李伯群³

(1. 东北大学 计算机科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110169; 2. 东北大学 医学影像智能计算教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110169; 3. 辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051)

摘要: 为提高实矩阵集的近似联合对角化的盲源分离性能, 避免平凡解, 提出了一种基于QR分解的类Jacobi联合对角化算法. 利用QR分解的数值稳定性, 采用Jacobi旋转矩阵, 将分离矩阵分解为多个初等三角矩阵和正交矩阵的乘积, 利用Jacobi旋转矩阵的结构及矩阵变换后的相关元素求解最优参数, 将高维矩阵最小化问题转化为一系列低维矩阵子问题, 提升源信号恢复精度. 通过求解简化的Frobenius范数目标函数降低算法复杂度. 混合心电信号仿真结果表明, 与QRJ2D, LUCJD, EGJLUD算法相比, 本文算法在分离精度和收敛速度方面均有一定优势.

关键词: 盲源分离; 非正交联合对角化; QR分解; 类Jacobi算法; 心电信号模型

中图分类号: TN 911.7

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2024)03-0305-09

Jacobi-like Joint Diagonalization Algorithm Based on QR Decomposition

Ji Ce^{1,2}, Li Yi¹, Li Bo-qun³

(1. School of Computer Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110169, China; 2. Key Laboratory of Intelligent Computing in Medical Image, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110169, China; 3. School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China. Corresponding author: LI Yi, E-mail: liye.dongda@foxmail.com)

Abstract: In order to improve the blind separation performance of approximate joint diagonalization of real matrix sets and to avoid trivial solutions, a Jacobi-like joint diagonalization algorithm based on QR decomposition is proposed. Using the numerical stability of QR decomposition, the Jacobi rotation matrix is used to decompose the separation matrix into the product of several elementary triangular matrices and orthogonal matrices. The structure of Jacobi rotation matrix and the related elements of the target matrix transformation are used to obtain the optimal parameters. The high-dimensional minimization problem is iteratively transformed into a series of low-dimensional sub-problems, which enhances the recovery accuracy of the source signal. The algorithm complexity is reduced by solving the simplified Frobenius-norm objective function. The simulation results of mixed electrocardiogram (ECG) signals show that compared with QRJ2D, LUCJD and EGJLUD, the proposed algorithm has certain advantages in separation accuracy and convergence speed.

Key words: blind source separation (BSS); non-orthogonal joint diagonalization; QR decomposition; Jacobi-like algorithm; ECG signal model

盲源分离(blind source separation, BSS)是在源信号和系统模型未知的情况下, 从混合信号中恢复源信号的过程^[1-3]. 作为信号处理领域的研究热点, 盲源分离被广泛应用于无线通信、生物

医学工程、语音信号和图像处理等领域. 联合对角化(joint diagonalization, JD)是一种盲源分离的数学方法, 以其估计精度高、收敛性能稳定等优点而受到广泛关注. 联合对角化以分离矩阵是否

为正交矩阵(酉矩阵)分为正交联合对角化和非正交联合对角化,由于正交联合对角化需对信号进行预白化处理,而预白化引入的误差不可逆,因此非正交联合对角化算法以更高的估计精度成为研究热点.但是,非正交联合对角化算法在实际应用中存在一定的局限性.一方面,该类算法中的参数矩阵是普通矩阵,缺乏特殊性质可供利用,因此计算复杂度也相对较高.另一方面,大多数非正交联合对角化算法为迭代算法,在迭代过程中未对参数矩阵施加任何约束条件,因此该类算法容易收敛于平凡解或奇异解等没有意义的结果,从而导致盲源分离失败.在非正交联合对角化算法中,第一类算法采用张量分解进行联合对角化,如 Li 等^[4]建立的三阶张量的正则多元分解.第二类算法如 Saito 等^[5]采用最小二乘准则将 JD 表述为一组子空间拟合问题.第三类算法采用目标矩阵非对角元素的 Frobenius 范数作为成本函数,如 Ziche 等^[6]的快速 Frobenius 范数对角化 FF-DIAG 算法,该算法使用乘法迭代更新,确保得到的分离矩阵始终为可逆矩阵; Vollgraf 等^[7]提出的二次对角化 QAJD 算法将 JD 准则重新排列为二次成本函数,该类算法求解 BSS 问题时,需要附加约束条件,否则存在可能收敛到平凡解的问题.

上述采用目标矩阵非对角元的 Frobenius 范数作为代价函数的算法中,LU 分解和 QR 分解作为 2 种重要的矩阵分解方法,以其较好的数值稳定性和运算简单被广泛采用.由于每次迭代时仅使用非奇异的初等矩阵,且仅有少量参数,保证分离矩阵可逆,算法不会收敛到平凡解. Afsari^[8]提出了基于 QR 分解的简单非正交联合对角化 QRJ2D 算法,采用耦合的方式求解最优参数. QRJ2D 算法针对每个坐标对,将代价函数转换为关于酉阵或三角矩阵的函数,该算法的优势在于计算复杂度低、运行速度快,但简化的代价函数造成估计精度损失等问题. Wang 等^[9]提出了基于 LU 分解的复值非正交联合对角化 LUCJD 算法,将分离矩阵分解为 LU 的形式,交替估计矩阵 L 和 U . LUCJD 算法虽然减少了未知参数的个数,但在计算过程中考虑了所有非对角元的范数和,在迭代过程中增加了额外的运算.文献[10]提出了基于 LU 分解的 Jacobi-like 联合对角化算法 EGJLUD,采用耦合的方式求解 L, U 矩阵对称位置的未知元素,并简化了推导过程,但简化后算法的分离性能和收敛速度有待优化.

为解决上述问题,避免平凡解,提高非正交联合对角化算法的估计精度,本文提出一种基于 QR 分解的类 Jacobi 联合对角化算法.将高维矩阵运算转化为 2×2 的低维矩阵子运算,降低算法复杂度,提升算法的收敛速度.利用 QR 分解的特殊结构,构建仅有 1 或 2 个参数的初等矩阵,推导出 2×2 子问题中矩阵参数对角化的解析解.

1 基本原理和相关概念

1.1 盲源分离

线性瞬时混合盲源分离模型可表述为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t). \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ 是 t 时刻 N 个观测信号组成的矩阵; $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T$ 为 t 时刻的 N 个未知源信号组成的矩阵; \mathbf{A} 为 $N \times N$ 的混合矩阵.盲源分离技术是在混合矩阵未知时分离源信号的过程,换言之,盲源分离的目的是找到一个分离矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 从观测到的信号中提取出源信号 $\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$.

1.2 非正交联合对角化

非正交联合对角化可表述为:对于给定的目标矩阵集 $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^K \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 满足

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^T. \quad (2)$$

式中: N 和 K 分别表示待联合对角化矩阵的维数和个数; \mathbf{D}_k 为对角矩阵.联合对角化的目标是对角化矩阵 \mathbf{B} 进行估计,尽可能使得目标矩阵集 $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^K$ 对角化,达到盲源分离的目的.在一般应用中, $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^K$ 为平稳信号的延时协方差矩阵、非平稳信号不同时间窗内的协方差矩阵、高阶累积量矩阵或其他表示信号统计特性的矩阵.为便于推导,假设 $\mathbf{M}_k, k=1, 2, \dots, K$ 均为满秩矩阵,即其秩等于维数 N .

本文采用式(3)所示的非对角元素范数平方和的代价函数求解 \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = \arg \min_{\mathbf{B}} \sum_{k=1}^K \left\| Z(\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^T) \right\|_{\text{F}}^2. \quad (3)$$

式中: $Z(\cdot)$ 是使矩阵主对角线元素置零的函数; $\|\cdot\|_{\text{F}}^2$ 表示 Frobenius 范数的平方.

2 基于 QR 分解的类 Jacobi 算法

2.1 类 Jacobi 迭代

Jacobi 矩阵估计的基本步骤是将任意 $N \times N$

的矩阵分解为 $N \times (N-1)/2$ 个初等矩阵的乘积. 表达式为

$$\mathbf{B} = \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N \mathbf{B}^{ij}. \quad (4)$$

式中, \mathbf{B}^{ij} 对应于 $N \times N$ 的单位矩阵, 仅第 i, j 行列相交的 4 个元素为未知变量. 提取矩阵 \mathbf{B}^{ij} 下标为 ii, ij, ji, jj 的 4 个元素组成 2×2 的矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}^{ij}$ 为

$$\tilde{\mathbf{B}}^{ij} = \begin{bmatrix} B_{ii} & B_{ij} \\ B_{ji} & B_{jj} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

为了估计初等矩阵 \mathbf{B}^{ij} 的参数, 文献[9-10]计算所有 i, j 行列中非对角元素平方和, 相同的非对角元被多次计算, 增加了额外的运算量. 当目标矩阵维数较大或个数较多时, 这将导致算法性能显著下降.

为避免该类策略造成算法性能的损失, 在本文中, 对于给定的 i 和 j , 只考虑矩阵中下标为 ij, ji 的 2 个非对角元素, 子矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}_k^{ij}$ 定义为

$$\tilde{\mathbf{M}}_k^{ij} = \begin{bmatrix} M_{k,ii} & M_{k,ij} \\ M_{k,ji} & M_{k,jj} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

则代价函数(3)更新为

$$\tilde{\mathbf{B}}^{ij} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{B}}^{ij}} \sum_{k=1}^K \left\| Z \left(\tilde{\mathbf{B}}^{ij} \tilde{\mathbf{M}}_k^{ij} \tilde{\mathbf{B}}^{ijT} \right) \right\|_F^2. \quad (7)$$

可以证明, $\mathbf{B} \mathbf{M}_k \mathbf{B}^T$ (或 $\tilde{\mathbf{B}}^{ij} \mathbf{M}_k \tilde{\mathbf{B}}^{ijT}$) 的非对角元素越接近于零, 代价函数求出的解越接近对角化解, 此时式(3)和式(7)是近似等价的^[11].

因此, 在求解联合对角化 2×2 矩阵的子问题中只需关注 $\tilde{\mathbf{B}}^{ij} \mathbf{M}_k \tilde{\mathbf{B}}^{ijT}$ 的 2 个非对角元素, 推导出 $\tilde{\mathbf{B}}^{ij}$ 的解析解, 从而估计出分离矩阵 \mathbf{B} .

2.2 B 的 QR 分解

任意 $N \times N$ 的非奇异方阵 \mathbf{B} 都可以分解为

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{R}. \quad (8)$$

式中: \mathbf{D} 为对角矩阵; \mathbf{P} 为置换矩阵; \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 分别为正交矩阵和对角元素为 1 的上三角矩阵. 由于盲信号分离的不确定性 (即幅度不确定、顺序不确定), 矩阵 \mathbf{D} 和 \mathbf{P} 在本文中可以省略. 且 $\det(\mathbf{B}) = \det(\tilde{\mathbf{B}}^{ij}) = 1$, 分离矩阵 \mathbf{B} 保证是可逆的, 从而避免平凡解. 将 $\tilde{\mathbf{B}}^{ij} = \tilde{\mathbf{Q}}^{ij} \tilde{\mathbf{R}}^{ij}$ 代入式(7), 代价函数更新为以下两式交替求解:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{ij} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{R}}^{ij}} \sum_{k=1}^K \left\| Z \left(\tilde{\mathbf{R}}^{ij} \tilde{\mathbf{M}}_k^{ij} \tilde{\mathbf{R}}^{ijT} \right) \right\|_F^2, \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{ij} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}} \sum_{k=1}^K \left\| Z \left(\tilde{\mathbf{Q}}^{ij} \tilde{\mathbf{M}}_k^{ij} \tilde{\mathbf{Q}}^{ijT} \right) \right\|_F^2. \quad (10)$$

当遍历所有索引 $1 \leq i < j \leq N$ 时, 称为一次扫描或迭代, 迭代更新直到 \mathbf{M}_k 近似联合对角化. 在

每次迭代更新中, 依次求解初等子矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}^{ij}$, 两个阶段组成一次迭代, 逐步更新目标矩阵:

$$\mathbf{M}_k^{ij} \leftarrow \mathbf{R}^{ij} \mathbf{M}_k^{ij} \mathbf{R}^{ijT}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_k^{ij} \leftarrow \mathbf{Q}^{ij} \mathbf{M}_k^{ij} \mathbf{Q}^{ijT}. \quad (12)$$

更新 $\tilde{\mathbf{B}}^{ij}$, 构造初等矩阵 $\mathbf{B}^{ij} = \prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N \mathbf{Q}^{ij} \mathbf{R}^{ij}$, 算

法经过有限的迭代直到收敛, 得到分离矩阵 \mathbf{B} .

为了获得最优的初等子矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}^{ij}$, 将其表示为只有 1 个或 2 个未知参数的矩阵. 矩阵的 QR 分解分为两步交替计算.

2.2.1 三角子矩阵求解

定义初等子矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}^{ij}$ 只含有 1 个未知参数 r , 将 $\tilde{\mathbf{R}}^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 代入式(9), 则代价函数可整理为

$$\tilde{\mathbf{R}}^{ij} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{R}}^{ij}} \sum_{k=1}^K \left[\left(M_{k,ij} + r M_{k,jj} \right)^2 + \left(M_{k,ji} + r M_{k,ii} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

令式(13)对 r 求导后等于零, 得到最优参数 r :

$$r = - \frac{\sum_{k=1}^K \left(M_{k,ij} M_{k,jj} + M_{k,ji} M_{k,ii} \right)}{2 \sum_{k=1}^K \left(M_{k,jj} \right)^2}. \quad (14)$$

2.2.2 正交子矩阵求解

定义正交子矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}$ 仅含有 c 和 s 两个未知参数, 将 $\tilde{\mathbf{Q}}^{ij} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$, $c^2 + s^2 = 1$ 代入式(10), 最小化式(10)中目标矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}_k^{ij}$ 的非对角元素范数和, 求解未知参数 c 和 s . 由正交变换的保范性得

$$\begin{aligned} & \left\| Z \left(\tilde{\mathbf{M}}_{k,\text{new}}^{ij} \right) \right\|_F^2 + \left(\tilde{M}_{k,\text{new},ii}^{ij} \right)^2 + \left(\tilde{M}_{k,\text{new},jj}^{ij} \right)^2 = \\ & \left\| Z \left(\tilde{\mathbf{M}}_{k,\text{old}}^{ij} \right) \right\|_F^2 + \left(\tilde{M}_{k,\text{old},ii}^{ij} \right)^2 + \left(\tilde{M}_{k,\text{old},jj}^{ij} \right)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $\tilde{\mathbf{M}}_{k,\text{old}}^{ij}$, $\tilde{\mathbf{M}}_{k,\text{new}}^{ij}$ 分别表示更新前、后的目标子矩阵; 下标 ii, jj 分别表示矩阵中的对应位置元素, 代价函数(10)更新为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{ij} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}} & \sum_{k=1}^K \left\| Z \left(\tilde{\mathbf{M}}_{k,\text{new}}^{ij} \right) \right\|_F^2 = \\ & \arg \max_{\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}} \sum_{k=1}^K \left(\left(\tilde{M}_{k,\text{new},ii}^{ij} \right)^2 + \left(\tilde{M}_{k,\text{new},jj}^{ij} \right)^2 \right) = \\ & \arg \max_{\tilde{\mathbf{Q}}^{ij}} \sum_{k=1}^K \left[\left(\tilde{M}_{k,\text{new},ii}^{ij} + \tilde{M}_{k,\text{new},jj}^{ij} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\tilde{M}_{k,\text{new},ii}^{ij} - \tilde{M}_{k,\text{new},jj}^{ij} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

根据正交变换的迹不变性, $\left(\tilde{M}_{k,\text{new},ii}^{ij} + \tilde{M}_{k,\text{new},jj}^{ij} \right)^2$ 可以看作常量, 将参数 c, s 代入后代价函数可表示为

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{ij} = \arg \max_{\tilde{Q}^{ij}} \sum_{k=1}^K & \left((c^2 - s^2) (\tilde{M}_{k,old,ii}^{ij} - \tilde{M}_{k,old,ij}^{ij}) + \right. \\ & \left. 2cs (\tilde{M}_{k,old,ij}^{ij} + \tilde{M}_{k,old,ji}^{ij}) \right)^2 = \\ \arg \max_{\tilde{Q}^{ij}} \sum_{k=1}^K & \left(\begin{bmatrix} \tilde{M}_{k,old,ii}^{ij} - \tilde{M}_{k,old,ij}^{ij} \\ \tilde{M}_{k,old,ij}^{ij} + \tilde{M}_{k,old,ji}^{ij} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c^2 - s^2 \\ 2cs \end{bmatrix} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

为方便推导,定义

$$\mathbf{v}(c, s) = [c^2 - s^2, 2cs]^T, \quad (18)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{M}_k) = [\tilde{M}_{k,old,ii}^{ij} - \tilde{M}_{k,old,ij}^{ij}, \tilde{M}_{k,old,ij}^{ij} + \tilde{M}_{k,old,ji}^{ij}]. \quad (19)$$

因此式(16)可以表示为

$$\tilde{Q}^{ij} = \arg \max_{\tilde{Q}^{ij}} \left[\mathbf{v}(c, s)^T \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{h}^T(\mathbf{M}_k) \mathbf{h}(\mathbf{M}_k) \right) \mathbf{v}(c, s) \right]. \quad (20)$$

可以证明,该优化问题的解为求解 $\sum_{k=1}^K \mathbf{h}^T(\mathbf{M}_k) \mathbf{h}(\mathbf{M}_k)$ 最大特征值的特征向量^[12],则代价函数最小时参数为

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{p+y} - \sqrt{\frac{x-p}{-2p}}, \\ s &= \sqrt{\frac{x-p}{-2p}}, \\ p &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \text{s.t. } c^2 + s^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$[x, y]^T$ 是 $\sum_{k=1}^K \mathbf{h}^T(\mathbf{M}_k) \mathbf{h}(\mathbf{M}_k)$ 的最大特征值对应的特征向量。

为了求解使代价函数最小的最优参数,依次对矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 交替迭代,更新分离矩阵 \mathbf{B} ,使目标矩阵集 $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^K$ 尽可能对角化,直到算法收敛。

2.3 算法步骤

基于 QR 分解的类 Jacobi 联合对角化算法的盲源分离算法流程图如图 1 所示。

3 仿真实验与分析

3.1 性能评价指标

为了更好地评估盲源分离算法的分离性能,对盲信号分离的结果进行定量分析,本文选取以下 4 个指标来评价分离效果。

1) 相关系数(correlation coefficient). 相关系数是衡量恢复信号与源信号相似度的性能指标,定义为

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^T s_i(t) y_j(t)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T s_i^2(t) \sum_{t=1}^T y_j^2(t)}}. \quad (22)$$

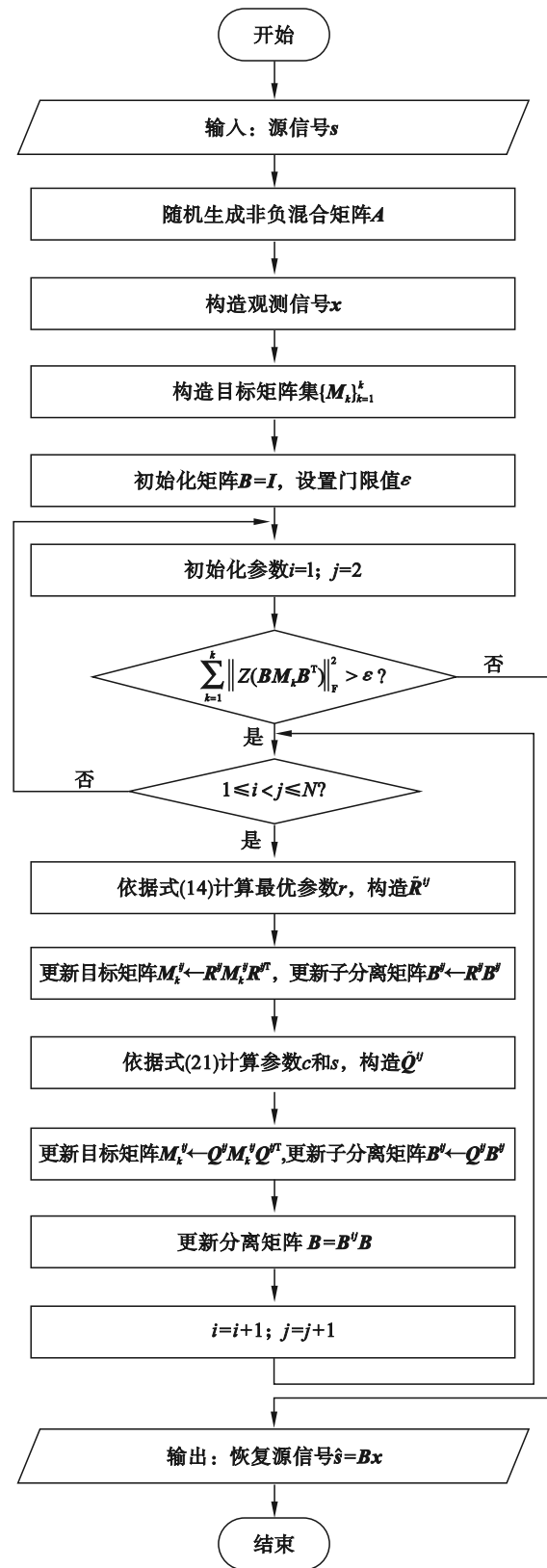


图 1 本文算法的流程图

Fig. 1 Flowchart of the proposed algorithm

式中: $s_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别为源信号和恢复信号; 相关系数 ρ_{ij} 的绝对值越接近 1, 表明恢复信号与源信号的波形越相似, 算法的恢复精度越高。

2) 串音误差(crosstalk error). 串音误差作为

衡量盲源分离算法的评价指标,描述如下:

$$e = \frac{1}{2N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{|G_{ij}|^2}{\max_{j \neq i} |G_{ij}|^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{|G_{ij}|^2}{\max_{i \neq j} |G_{ij}|^2} - 1 \right) \right). \quad (23)$$

式中: $\mathbf{G} = \mathbf{BA}$ 表示全局矩阵, \mathbf{G} 中第 (i, j) 元素表示为 G_{ij} . 串音误差值越趋近于零, 表明 \mathbf{G} 越接近广义交换矩阵, 算法的分离性能越好.

3) 信干比(signal to interferences ratio, SIR). 信干比是衡量分离结果中全局矩阵与理想情况偏离程度的指标, 其表达式为

$$\text{SIR} = \frac{\max_i |G_{ii}|^2}{\sum_{j \neq i} |G_{ij}|^2}. \quad (24)$$

式中: $\max_i |G_{ii}|^2$ 表示全局矩阵第 i 行元素平方和的最大值; $\sum_{j \neq i} |G_{ij}|^2$ 表示第 i 行其余元素的平方和. 信干比越大, 表明该全局矩阵越稀疏, 越接近理想情况, 分离出的源信号也就越好.

4) 信噪比(signal to noise ratio, SNR). 由于临床心电信号分离实验没有已知的源信号与混合矩阵, 所以不能采用传统的信噪比估计方法进行计算, 本文采用文献[12]提出的基于特征值计算临床心电信号信噪比的估计方法.

将实验分离出的胎儿心电信号根据 R 波波峰数量 L 分为 L 段, 以波峰为中心, 取 L 个周期长度为 M 的心电信号组成矩阵 $\mathbf{X}_{M \times L}$ 计算信噪比, 对每段 QRS 波群进行标准化, 计算 $\mathbf{X}_{M \times L}^T \mathbf{X}_{M \times L}$ 的特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$, 基于特征值的信噪比数学表达式为

$$\text{SNR} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\sum_{i=1}^L \lambda_i - \lambda_{\max}}}. \quad (25)$$

其中: λ_{\max} 表示 $\mathbf{X}_{M \times L}^T \mathbf{X}_{M \times L}$ 的最大特征值; $\sum_{i=1}^L \lambda_i$ 表示 N 段 QRS 波特征值的总和. SNR 值越大, 表明分离出的胎儿心电信号越接近真实值.

3.2 仿真实验与结果分析

对本文提出的基于 QR 分解的类 Jacobi 算法进行仿真验证, 并与 QRJ2D, LUCJD, EGJLUD 算法进行比较.

从孕妇腹部采集的观测心电信号为母体心电信号(maternal electrocardiogram, MECG)与胎

儿心电信号(fetal electrocardiogram, FECG)的线性瞬时混合, 且 MECG 与 FECG 具有统计不相关以及周期性的特征, 符合联合对角化算法要求源信号之间不相关的条件, 因此可以采用联合对角化算法对心电信号进行分离. 本文利用动态心电图模型模拟的合成心电数据和 DaISy 数据库的临床实际心电数据对所提出算法进行仿真.

3.2.1 模拟心电信号实验

本文采用由 McSharry 等^[13]提出的动态心电图模型生成模拟心电数据, 该动态模型能够模拟人体心电活动的许多重要特征, 模型可描述为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \omega y, \\ \dot{y} &= \alpha y + \omega x, \\ \dot{z} &= -\sum a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i}{2b_i^2}\right) - (z - z_0). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中: $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$; $\theta = a \tan 2(y, x)$ 且 $-\pi \leq a \tan 2(y, x) \leq \pi$, $a = \sum_i a_i$; $a_i, b_i, \theta_i, \omega, z_0$ 分别表示幅值、宽度、中心参数、瞬时心率的波形特征以及基线漂移. 该动态模型生成的心电信号波形如图 2 所示.

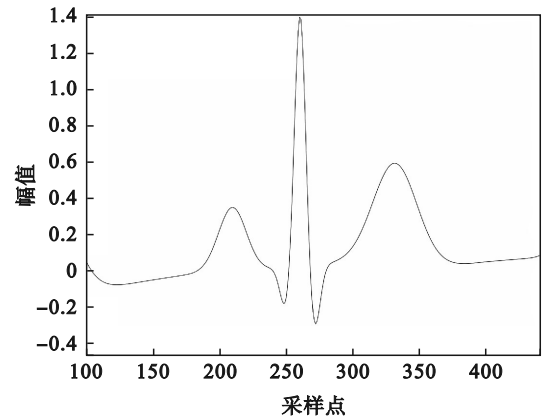


图2 模拟的 ECG 信号波形

Fig. 2 Simulated ECG signal waveform

通过设置该动态心电图模型的心率和幅值模拟 FECG 和 MECG, MECG 和 FECG 的正常心率范围分别是 60~100 和 120~160 次/min, FECG 幅值设置为 MECG 幅值的 1/10~1/5. 模拟得到的 MECG 和 FECG 经过矩阵 \mathbf{A} 混合后加入 SNR = 20 dB 的高斯白噪声作为模拟的观测心电信号, Matlab 随机生成的混合矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6893 & 0.4505 \\ 0.7482 & 0.0838 \end{bmatrix}.$$

模拟的观测心电信号如图 3 所示.

采用本文算法, QRJ2D, LUCJD, EGJLUD 算法分别对模拟的观测信号进行分离实验仿真, 得

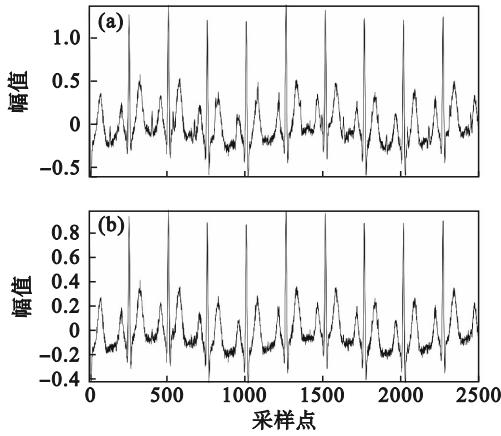


图3 模拟的心电观测信号

Fig. 3 Simulated observed ECG signals
(a)—观测信号1; (b)—观测信号2.

到的结果见图4~图7. 如图所示,根据心电信号频率的差异,可区分母体心电信号和胎儿心电信号,4种算法分离出的心电信号波形比较完整,R波

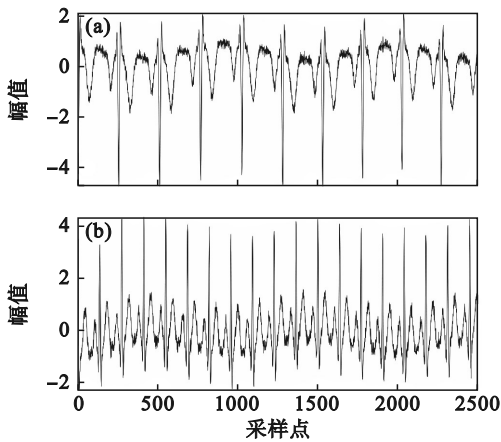


图4 本文算法对模拟的观测信号的分离结果

Fig. 4 Separation results of simulated observed signals with the proposed algorithm
(a)—恢复信号1; (b)—恢复信号2.

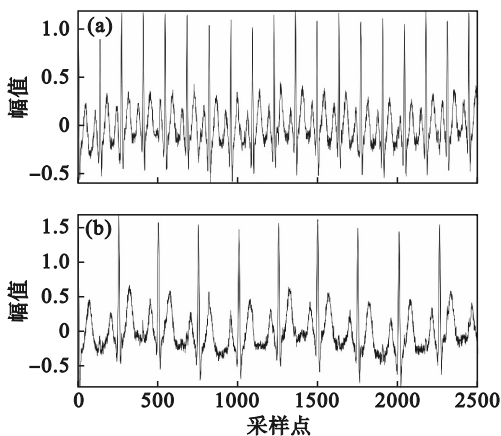


图5 QRJ2D算法对模拟的观测信号的分离结果

Fig. 5 Separation results of simulated observed signals with QRJ2D algorithm
(a)—恢复信号1; (b)—恢复信号2.

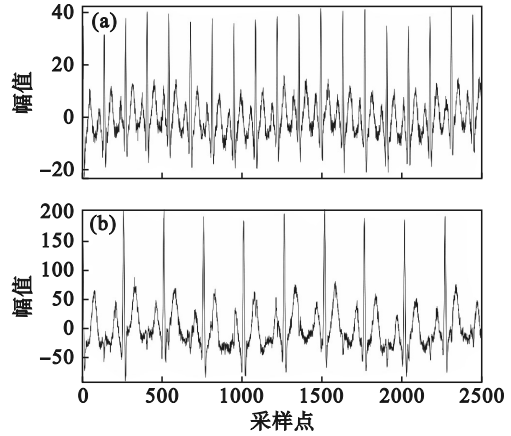


图6 LUCJD算法对模拟的观测信号的分离结果

Fig. 6 Separation results of simulated observed signals with LUCJD algorithm
(a)—恢复信号1; (b)—恢复信号2.

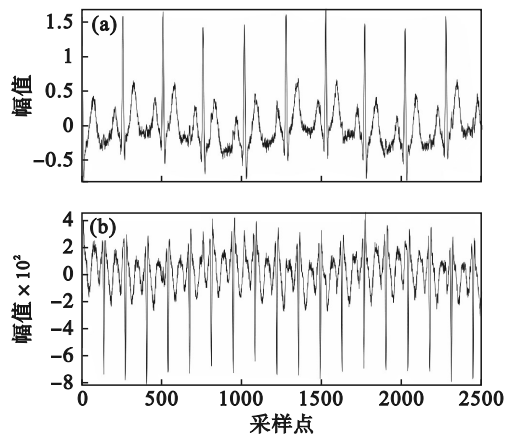


图7 EGJLUD算法对模拟的观测信号的分离结果

Fig. 7 Separation results of simulated observed signals with EGJLUD algorithm
(a)—恢复信号1; (b)—恢复信号2.

位置清晰,没有出现漏检,但QRJ2D算法分离出的胎儿心电信号在母体心电信号中有少量残留,其余3种算法分离出的胎儿心电信号波形相差不大,且4种算法恢复的源信号排列顺序不确定.

为对比分析4种算法的分离精度,采用相似系数、串音误差和信干比三项技术指标,分别对4种算法进行性能分析.表1为4种算法相关系数对比结果,表2为串音误差和算法收敛时间对比结果,表3为信干比对比结果.

表1 4种算法的相关系数

Table 1 Correlation coefficient of four algorithms

| 算法 | 恢复信号1 | 恢复信号2 |
|--------|---------|---------|
| 本文算法 | 0.993 0 | 0.989 5 |
| QRJ2D | 0.985 2 | 0.973 1 |
| LUCJD | 0.990 8 | 0.986 3 |
| EGJLUD | 0.991 5 | 0.982 3 |

表 2 4 种算法的串音误差和收敛时间
Table 2 Crosstalk error and convergence time of four algorithms

| 算法 | 串音误差/dB | 收敛时间/s |
|--------|---------|--------|
| 本文算法 | -23.259 | 1.695 |
| QRJ2D | -9.986 | 1.697 |
| LUCJD | -21.951 | 1.850 |
| EGJLUD | -17.999 | 1.863 |

表 3 4 种算法的 SIR
Table 3 SIR of four algorithms

| 算法 | 恢复信号 1 | 恢复信号 2 |
|--------|--------|--------|
| 本文算法 | 35.749 | 21.615 |
| QRJ2D | 23.433 | 9.166 |
| LUCJD | 26.339 | 20.747 |
| EGJLUD | 30.052 | 17.826 |

由表 1 可知,4 种算法都能很好地实现模拟的心电信号的分离,但本文算法的恢复信号相似系数达到 0.993 0 和 0.989 5,更接近 1,均高于对比算法的相似系数。

由表 2 和表 3 可知,本文算法和 QRJ2D 算法的收敛速度几乎相等,这是由于本文算法和 QRJ2D 算法均采用将代价函数转化为正交矩阵或三角矩阵的函数,所以算法的收敛时间相近,但 QRJ2D 算法简化后的代价函数放大了估计误差,所以 QRJ2D 算法分离精度较低。LUCJD 和 EGJLUD 算法在计算过程中考虑了所有非对角元素的范数和,其代价函数增加了很多参数,增加了算法的运算量,所以 LUCJD 和 EGJLUD 算法的收敛速度稍慢。本文算法具有更快的收敛速度和更高的分离精度,实现了更好的盲源分离。

为验证各算法在不同信噪比下的分离性能,设置信噪比在 0~40 dB 之间变化,各算法独立运行 100 次实验后取平均值,结果如图 8 所示。结果

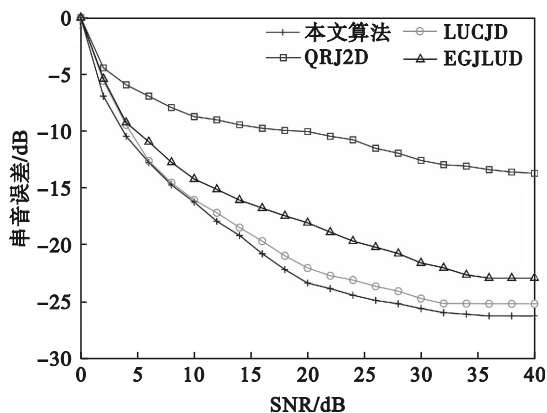


图 8 不同信噪比条件下 4 种算法的串音误差
Fig. 8 Crosstalk error of four algorithms under different SNR

表明,随着噪声的降低,4 种算法的分离精度都有明显的提高,且 4 种算法在 SNR = 30 dB 时趋于平缓,并且本文算法的串音误差均小于对比算法,说明该算法在噪声情况下具有更高的估计精度,明显改善了算法的分离性能。

3.2.2 临床心电信号实验

为验证算法的有效性,临床心电信号取自 DaISy (database for the identification of systems) 数据库^[14],由于该心电信号不含工频干扰、肌电干扰、基线漂移等噪声,可以直接进行盲源分离实验。该心电信号以 250 Hz 的频率采样,采样时间为 10 s,采样点为 2 500,选取 1~4 导联心电信号进行分离实验。前 4 导联心电信号如图 9 所示。

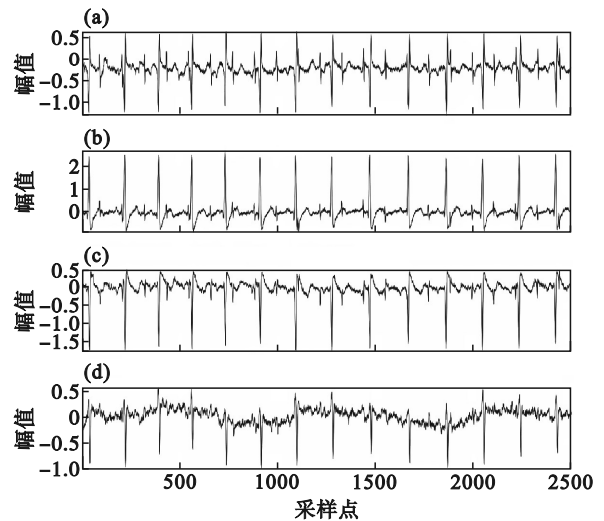


图 9 DaISy 数据库的 1~4 导联心电信号

Fig. 9 1~4 lead ECG signals from DaISy database (a)—信号 1; (b)—信号 2; (c)—信号 3; (d)—信号 4.

4 种算法分离的信号如图 10~图 13 所示,根据频率区分母体和胎儿的心电信号,FECG 分别为图 10~图 13 的恢复信号 3、恢复信号 4、恢复信号 1 和恢复信号 2;MECG 分别为图 10,图 11 的恢复信号 1 和恢复信号 2,图 12 的恢复信号 2 和恢复信号 4,图 13 的恢复信号 1 和恢复信号 3,其余为噪声信号。从图 10~图 13 可以看出,本文算法,QRJ2D 和 LUCJD 算法均能较好地分离临床 MECG 和 FECG 信号,分离效果较为理想。分离出的胎儿信号虽有噪声残留和少量 MECG 冗余,但波形较为完整清晰。EGJLUD 算法分离效果较差,分离出的 FECG 中有较多冗余噪声和残留的 MECG。其中,QRJ2D 算法的噪声信号有较多的残余 MECG 和 FECG,本文算法和 LUCJD 算法的噪声信号均有 MECG 和 FECG 的少量残留。

根据信噪比公式(25)来评估性能,信噪比对

比结果如表 4 所示,由表 4 可看出本文算法信噪比最大,为 8.17 dB,均大于对比算法的信噪比,说明该算法分离的 FECG 效果最好.

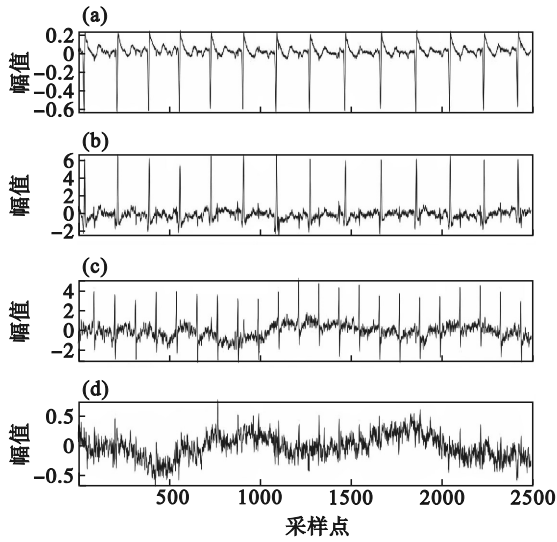


图 10 本文算法临床心电信号分离结果
Fig. 10 Clinical ECG signal separation results with the proposed algorithm
(a)—恢复信号 1; (b)—恢复信号 2;
(c)—恢复信号 3; (d)—恢复信号 4.

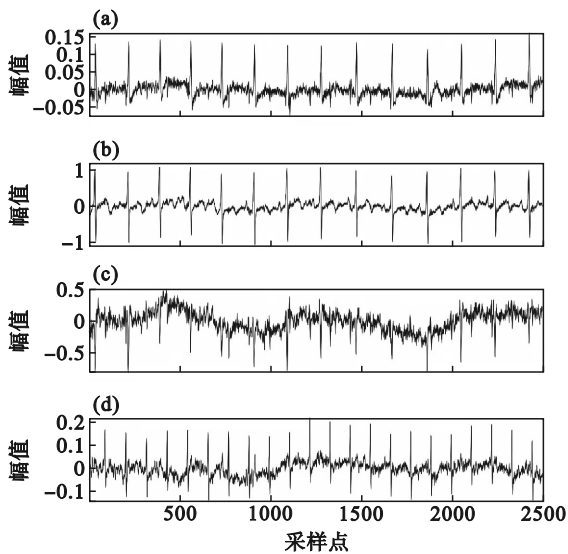


图 11 QRJ2D 算法临床心电信号分离结果
Fig. 11 Clinical ECG signal separation results with QRJ2D algorithm
(a)—恢复信号 1; (b)—恢复信号 2;
(c)—恢复信号 3; (d)—恢复信号 4.

3.3 复杂度对比分析

通过计算每次扫描的实数乘除法运算次数来分析本文算法的时间复杂度^[15]. 对于 K 组 $N \times N$ 的目标矩阵,各算法的时间复杂度如表 5 所示.

算法复杂度主要取决于分解矩阵 Q 和 R 中未知参数的计算,以及矩阵的更新. 可见,本文算法降低了算法复杂度,提高了算法收敛速度.

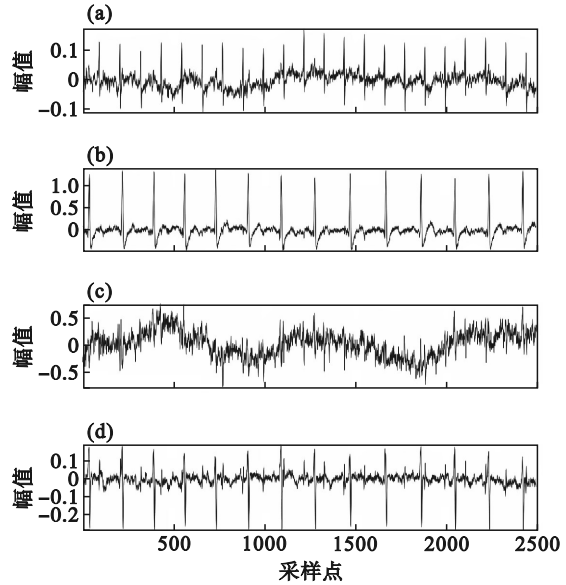


图 12 LUCJD 算法临床心电信号分离结果
Fig. 12 Clinical ECG signal separation results with LUCJD algorithm
(a)—恢复信号 1; (b)—恢复信号 2;
(c)—恢复信号 3; (d)—恢复信号 4.

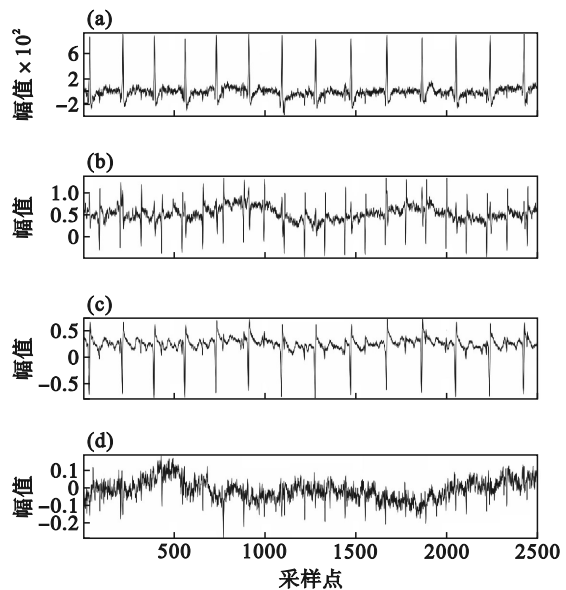


图 13 EGJLUD 算法临床心电信号分离结果
Fig. 13 Clinical ECG signal separation results with EGJLUD algorithm
(a)—恢复信号 1; (b)—恢复信号 2;
(c)—恢复信号 3; (d)—恢复信号 4.

表 4 4 种算法的信噪比

Table 4 SNR of four algorithms

| 算法 | 信噪比/dB |
|--------|--------|
| 本文算法 | 8.17 |
| QRJ2D | 7.69 |
| LUCJD | 7.72 |
| EGJLUD | 7.84 |

表5 4种算法的时间复杂度
Table 5 Time complexity of four algorithms

| 算法 | 时间复杂度 |
|--------|-------------------|
| 本文算法 | $O(KN^3)$ |
| QRJ2D | $O(KN^3)$ |
| LUCJD | $O(3KN^3 + 4N^3)$ |
| EGJLUD | $O(4KN^3 + N^3)$ |

4 结 论

本文针对实数矩阵的非正交联合对角化算法,提出了一种基于QR分解的类Jacobi迭代算法.将高维最小化问题迭代地转化为 2×2 的子问题.经过心电信号分离的实验验证,本文算法总体性能良好,在一定噪声的条件下优于QRJ2D, LUCJD和EGJLUD算法,且能够较大提升恢复信号的精度,较好地实现盲源分离.

参考文献:

- [1] Yu X C, Hu D, Xu J D. Blind source separation: theory and applications [M]. Singapore: Science Press, 2013: 1101-1102.
- [2] 李振璧,王康,姜媛媛.盲源分离技术研究与方法综述[J].科学技术与工程,2017,17(14):141-147.
(Li Zhen-bi, Wang Kang, Jiang Yuan-yuan. Research and survey on methods of blind source separation technology[J]. Science Technology and Engineering, 2017, 17(14): 141-147.)
- [3] 王法松.盲源分离的扩展模型与算法研究[D].西安:西安电子科技大学,2013.
(Wang Fa-song. Research on extended models and algorithms for blind source separation [D]. Xi'an: Xidian University, 2013.)
- [4] Li W R, Miao J F, Cheng G H. A Jacobi-like algorithm for the general joint diagonalization problem with its application to blind source separation [C]//12th International Congress on Image and Signal Processing, BioMedical Engineering and Informatics (CISP-BMEI). Suzhou, 2019: 91-95.
- [5] Saito S, Oishi K. A robust alternate least squares algorithm for approximate joint diagonalization in overdetermined blind source separation [C]//IEEE 10th Global Conference on Consumer Electronics (GCCE). Kyoto, 2021: 969-973.
- [6] Ziehe A, Laskov P, Nolte G, et al. A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation [J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2004, 5(3): 777-800.
- [7] Vollgraf R, Obermayer K. Quadratic optimization for simultaneous matrix diagonalization [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(9): 3270-3278.
- [8] Afsari B. Simple LU and QR based non-orthogonal matrix joint diagonalization [J]. *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, 2006, 3889: 1-7.
- [9] Wang K, Gong X F, Lin Q H. Complex non-orthogonal joint diagonalization based on LU and LQ decompositions [C]// International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation. Berlin, 2012: 50-57.
- [10] Cheng G H, Li S M, Miao J F, et al. LU-based Jacobi-like algorithms for non-orthogonal joint diagonalization [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2018, 76(1): 113-124.
- [11] Cardoso J F, Souloumiac A. Jacobi angles for simultaneous diagonalization [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1996, 17(1): 161-164.
- [12] Outram N J. Intelligent pattern analysis of the foetal electrocardiogram [D]. Plymouth: University of Plymouth, 1998.
- [13] McSharry P E, Clifford G D, Tarassenko L, et al. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2003, 50(3): 289-294.
- [14] De Moor B. DaISy: database for the identification of systems [EB/OL]. (2014-07-07) [2021-01-14]. <http://www.esat.kuleuven.ac.be/sista/daisy/>.
- [15] André R, Luciani X, Moreau E. A coupled joint eigenvalue decomposition algorithm for canonical polyadic decomposition of tensors [C]//IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM). Rio de Janeiro, 2016: 460-464.