

文章编号: 1006-3080(2026)02-0233-14

DOI: 10.14135/j.cnki.1006-3080.20250523001

基于个体行为决策的流行病传播过程建模与分析

陈心怡, 朱婧熹, 薛 栋

(华东理工大学能源化工过程智能制造教育部重点实验室, 上海 200237)

摘要:在流行病传播过程中, 个体行为对传播动力学具有关键调控作用。然而, 现有耦合模型常难以充分整合多重现实因素对个体行为决策的影响, 或未能充分刻画传播过程中疫情反复等多种复杂状态。基于此, 本文提出一种基于双层网络的行为决策与流行病传播双向动态耦合模型。该模型以 SIS (Suspectible-Infected-Suspectible) 流行病传播框架为基础, 令个体行为通过缩放因子调控流行病的感染率与康复率, 同时以博弈论为框架, 整合了社会压力、行为实施成本和疾病风险感知等多重现实因素, 构建了个体行为决策的动态演化规则, 实现了行为决策与传播过程的双向动态耦合。相较于现有双层网络模型, 本模型显著降低了流行病传播的稳态水平, 提升了流行病根除能力, 并能更好地捕捉复杂动力学行为, 如传播过程中的振荡现象。针对这一高度非线性耦合系统, 本文结合李雅普诺夫稳定性理论与位势博弈方法, 对包括无病平衡点(健康态)和地方病平衡点(非健康态)在内的多种平衡点进行理论稳定性分析, 并通过数值仿真验证了理论结果的正确性。关键参数敏感性分析揭示了行为因素与流行病传播的相互作用规律, 为制定更有效的流行病干预策略提供了重要的理论依据。

关键词:流行病传播; 位势博弈; 耦合传播; 非线性系统; 多层网络

中图分类号: TP309

文献标志码: A

近年来, 全球范围内流行病的爆发频率与传播强度显著上升。这类突发公共卫生事件不仅严重威胁人类生命安全, 更对经济活动与公共卫生体系构成严峻挑战^[1]。建立统一的流行病模型, 掌握其传播规律, 可为科学控制流行病传播提供坚实的理论支撑。传染病传播动力学研究长期以仓室模型为核心分析框架, 该框架将人群划分为易感态(Susceptible, S)、感染态(Infected, I)、康复态(Recover, R)等不同健康状态, 通过构建确定性微分方程或随机马尔可夫过程描述各状态间的转移规律^[2-3]。在流行病传播模型研究中, 不同平衡点的稳定特性是关键关注点^[4]。作为非线性模型, 流行病模型通常存在多重平衡点, 其中零平衡点对应疾病消亡的健康状态, 非零平衡点则表征疾病持续存在的状态^[5-6]。在均匀接触

网络环境下, 基本再生数是评估流行病发展态势的重要指标, 当基本再生数超过特定阈值时, 流行病将处于非健康态, 甚至引发大规模疾病, 反之, 疾病传播将得到控制并最终回到健康态。

传统的仓室模型通常假设人群是均匀混合的, 个体之间接触概率相同, 而真实世界中复杂的人际接触网络往往存在显著差异, 个体间的接触并非随机发生, 而是形成具有特定结构的网络, 如家庭、学校、工作场所、社区等社会单元构成的局部紧密连接网络, 网络结构中的异质性显著影响着流行病的传播过程^[7-8]。因此, 构建网络化的流行病模型显得尤为必要。文献[9]首次将 SIS (Suspectible-Infected-Suspectible) 模型应用于网络结构, 构建了 n 维网络接触模型, 表明疾病传播参数与接触网络谱半径的关

收稿日期: 2025-05-23

基金项目: 国家自然科学基金(62173147)

作者简介: 陈心怡(1999—), 女, 河南人, 硕士生, 主要研究方向为非线性耦合网络。E-mail: Y30221032@mail.ecust.edu.cn

通信联系人: 薛 栋, E-mail: dong.xue@ecust.edu.cn

引用本文: 陈心怡, 朱婧熹, 薛 栋. 基于个体行为决策的流行病传播过程建模与分析[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2026, 52(2): 233-246.

Citation: CHEN Xinyi, ZHU Jingxi, XUE Dong. Modeling and Analysis of Coevolution Behavioral Decision-Making and Epidemic Spreading Processes[J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2026, 52(2): 233-246.

系决定流行病是否爆发。后续研究中,进一步构建离散 SIS 网络化模型,从理论层面证明流行病阈值的存在性^[10],运用李雅普诺夫方法和梅茨勒矩阵理论,探讨流行病平衡点的存在性、唯一性及稳定性^[11],相关结论在弱联通有向图场景下通过正系统理论得到进一步验证^[12]。更多分区的仓室模型,如 SIR (Susceptible-Infected-Recovered)^[13]、SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered)^[14]等,能更细致地刻画免疫机制与潜伏期效应,但其非线性动力学特性导致平衡点稳定性分析复杂度大幅增加,因此结构简洁、理论分析性更强的 SIS 模型仍是当前研究的主流对象。与此同时,在实际流行病传播过程中,人类采取的多种干预措施,包括医疗资源调配、公共卫生宣传、交通管制及社交距离限制等^[15],均会对流行病传播过程有影响,因此传统流行病模型在描述人类行为反应时存在一定局限性。

人类复杂的行为动态在个体层面产生,并在同一个流行病传播的时间尺度上共同进化。如何将人类行为决策模型与流行病传播模型进行融合成为研究重点。博弈论模型已被证明能够有效重现类似的复杂决策机制,从而捕捉到多个领域中的真实行为^[16-18]。许多基于博弈的干预措施融入流行病模型,如接种疫苗以获取免疫性^[19]、增设隔离区扩展舱室模型分区^[20-21],以及通过参数调节改变感染率和康复率等^[22-23]。在流行病传播过程中,政府往往会对公众实施强制措施进行集中性控制策略,然而,这种集中式的控制在大规模网络中难以实施,且忽略了个体始终关注自身利益而选择不遵守规定的可能性^[24]。因此,从微观角度基于个体的行为变量更能准确反映现实中的传播过程,个体通过调整社交距离影响传播过程^[25-26],而基于死亡驱动的认知模型,个体防护措施会随着死亡率的上升而增加,能够成功解释新型冠状病毒肺炎(COVID-19)的数据波动^[27]。尽管这些模型在捕捉流行病实时的行为反应方面表现出有效性,但往往假设人群中的决策完全理性,忽略了个体关注自身利益,包括其自身的感染风险、佩戴口罩的不便等现实因素,基于此,文献[28]进一步建立了统一简洁的数学框架,考虑了每个个体在面对权衡时的显著现实因素,如风险感知、即时成本、累计疲劳等,并成功与多种流行病模型耦合。同时,众多社会学文献表明人类的从众心理对人类行为的显著相关性^[29-31],具体来说,在流行病传播过程中,当个体观察到社交圈内成员(如亲友、邻居)普遍采取特定防护措施时,其行为选择往往倾向于由于社会规范压力实现群体趋同。上述研究大多侧重于建模与仿真分析,而对

理论层面的稳定性分析尚未充分展开。基于此,本文的主要贡献体现在以下三个方面:

(1)提出一种网络化流行病传播-博弈决策耦合模型,以个体为研究对象,同时考虑风险感知、社会规范压力、实施成本等现实因素对行为决策的影响,基于博弈框架刻画个体行为决策与疾病传播之间的耦合影响,所提出模型能够有效抑制控制流行病传播,同时能够捕捉流行病反复等复杂传播动态。

(2)通过融合李雅普诺夫稳定性理论与位势博弈进行理论分析,证明了模型收敛至零感染平衡点或地方病平衡点的阈值条件,突破了耦合流行病模型理论性分析的空白。

(3)引入多因素决策机制(包括动态风险感知、社会规范压力及经济成本权衡),并通过敏感性数值实验进一步分析了各因素对行为决策的影响,为精准化干预策略设计提供理论依据。

1 模型建立

本节提出一种融合行为决策的流行病模型统一框架,用于描述在人类行为决策影响下的流行病传播过程,模型由双层网络构成,首先对网络设置进行说明,提供了模型更新的详细策略,并对模型的建模动机进行了详细描述。

1.1 网络说明

令流行病传播网络表示为一个加权无向图 $\mathcal{G}_E = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_E, \mathbf{W})$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 代表 n 个节点的集合, $\mathcal{E}_E \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是无向边的集合, $\mathbf{W} = [w_{ij}]$ 为非负加权矩阵, 当且仅当 $(i, j) \in \mathcal{E}_E$ 时 $w_{ij} > 0$ 。该层网络中节点 i 的邻居节点集合表示为 \mathcal{N}_i^E 。令行为观察网络表示为一个邻接无向图 $\mathcal{G}_A = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_A, \mathbf{A})$, $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是无向边的集合, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 为非负邻接矩阵, 当且仅当 $(i, j) \in \mathcal{E}_A$ 时 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。该层网络中节点 i 的邻居节点集合表示为 \mathcal{N}_i^A 。

令 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_E, \mathcal{G}_A, \mathcal{V})$ 代表双层网络结构, 流行病传播网络 \mathcal{G}_E 与行为影响网络 $\mathcal{G}_A = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_A)$ 耦合传播。两层网络的节点 \mathcal{V} 相同, 边不同(即 $\mathcal{E}_E \neq \mathcal{E}_A$)。如图 1 所示, 上层代表流行病传播, 描述基于物理接触的疾病扩散过程, 边 \mathcal{E}_E 表示个体间存在传播风险的密切接触(如家庭、工作场所等高频交互场景), 下层代表行为决策层, 描述社会规范驱动的决策传播过程, 边 \mathcal{E}_A 表示个体间行为影响的信息通道(如社交媒体、社区舆论等连接关系)。个体在流行病层的感染状态影响其在行为层的防护决策, 同时, 行为层的决策反馈作用于流行病层的传播过程。当且仅当每层网络

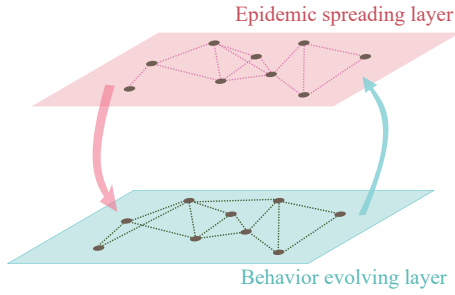


图1 双层网络示意图

Fig. 1 Schematic of two-layer networks

单独强连通时,称双层网络是强连通的。

令每个个体 i 在 k 时刻的流行病状态表示为连续变量 $x_i(k) \in [0, 1]$, 代表个体 i 感染疾病的概率, 状态 $x_i(k) = 0$ 代表流行病消亡, 状态 $x_i(k) > 0$ 代表流行病存在。行为决策由二元变量 $y_i(k) \in \{-1, 1\}$ 表示, 描述个体 i 的行为选择, 其中 $y_i(k) = -1$ 代表个体不采取具体防护行为, $y_i(k) = 1$ 则代表个体采取防护行为。群体状态通过向量 $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$ 描述, 其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 为感染概率向量, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 为行为决策向量。

1.2 流行病模型

在离散 SIS 流行病传播模型中, 个体防护行为 (如佩戴口罩、保持社交距离等) 对疾病传播具有显著影响, 为量化这一影响, 研究引入二元决策行为变量 $y_i(k) \in \{-1, 1\}$, 通过该变量对感染系数进行调控, 具体过程如下

$$x_i(k+1) = x_i(k) - h(\delta_i(1 + \alpha y_i(k))x_i(k) + (1 - x_i(k)) \times \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(1 - \alpha y_i(k))x_j(k)) \quad (1)$$

其中, $x_i(k)$, $y_i(k)$ 分别代表个体 i 在 k 时刻的感染概率与行为选择, α 代表二元行为的影响放缩因子, β_{ij} 代表个体 j 与个体 i 之间的感染概率, h 代表采样周期, 下文将采样周期设置为 $h = 1$ 。令 $\widehat{\beta}_{ij}(k) = \beta_{ij}(1 - \alpha y_i(k))$, 表示受到个体决策影响下的感染率, 称为可变感染率, 令 $\widehat{\gamma}_i(k) = \gamma_i(1 + \alpha y_i(k))$, 表示受到个体决策影响下的康复率, 称为可变康复率 (γ_i 为个体 i 的康复率)。基于上述设定, 式 (1) 可简化为以下形式

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \widehat{\delta}_i(k)x_i(k) + (1 - x_i(k)) \sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{ij}(k)x_j(k) \quad (2)$$

所建立的 SIS 传播模型基于传统 SIS 模型框架, 纳入行为变量对感染率与康复率的影响, 使得感染率和康复率呈现动态变化的特性, 具体来说, 二元行为变量的不同取值对感染率与康复率产生放缩效

果。下文将详细介绍行为决策的更新策略。

1.3 个人决策模型

个体预防行为的动态演化过程由行为调控主导, 基于博弈论框架, 构建了一个离散时间步长下的决策更新策略。在此框架中, 收益函数用于衡量个体在更新时刻的个人预期收益, 个体从有限策略集合中假设采用不同行为方案, 通过比较收益函数值进行最终决策。模型中的收益函数综合考量了流行病现状、社会规范压力、行为实施成本等现实决策要素。具体而言, 收益函数量化了现实决策场景中三种不同需求维度。首先, 健康状态维度, 个体以自身的健康状态作为决策基础; 其次, 社会规范维度, 个体需要遵从社会压力, 个体倾向于与其邻居的选择保持一致以获得归属感和社会认同感; 最后, 成本效益维度, 行为实施与否也需要考虑相应成本 (如时间、经济、心理负担、繁琐程度等)。设收益函数为 $\pi_i(s_i|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (其中 s_i 为个体假设行为策略), 个体 i 的收益函数定义如下

$$\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_i x_i(k) + \frac{(1 - \lambda_i)(1 - \theta_i)}{d_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1 + y_j(k)}{2} - \theta_i u \quad (3)$$

$$\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\lambda_i x_i(k) + \frac{(1 - \lambda_i)(1 - \theta_i)}{d_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1 - y_j(k)}{2} + \theta_i u \quad (4)$$

其中, $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 分别代表个体 i 假设采用行为 $s_i(k) = 1$ 和 $s_i(k) = -1$ 而获得的收益; 参数 λ_i 为疾病感知系数, 反映流行病现状对整个决策过程的影响权重, 当疾病感知参数满足 $\lambda_i = 1$ 时, 邻居行为无法影响决策过程, 而当参数满足 $\lambda_i = 0$ 时, 个体 i 的流行病现状无法影响行为决策, 其完全由他人行为及行为成本决定; 参数 u 表示行为成本, 代表特定防护行为 (如戴口罩、接种疫苗等) 的客观资源消耗, 是与行为类型绑定的常量参数, 反映干预措施固有的经济或时间投入; 参数 θ_i 为成本敏感系数, 描述个体对成本的主观响应异质性, 其分布受社会经济地位、风险偏好等因素影响^[32]。上述收益函数从个体视角量化了更新时刻不同策略的预期收益, 基于此, 进一步建立行为更新策略, 该策略依据收益函数决定个体下一时刻的具体行为, 最佳决策定义为

$$y_i(k+1) = f_i(k) = \begin{cases} 1 & \pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ -1 & -1\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ y_i(k) & \pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (5)$$

为便于理解式 (5), 以下结合式 (3) 和式 (4) 进行具体说明, 已知式 (3) 和式 (4) 中的第 1 项描述的是流行病现状对个人决策的影响程度, 若当前存在流

行病 $x_i(k) > 0$, 个体感染流行病的概率升高, 导致 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的值升高, 体现疾病感知对行为预防的驱动作用。第 2 项描述社会压力对个人决策的影响程度, 若周围邻居均选择采取预防措施, 导致 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的值升高, 表明个人为获取社会认同对群体行为的跟随性。第 3 项描述行为成本对于个人决策的影响, 由于成本参数恒为正, 该项将导致 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 降低, 表明实施行为需要付出时间, 经济成本会削弱个体采取行为的意愿。当个体 i 面临决策时, 个体收益函数的数值高低与感染风险、社会融入程度及行为成本直接相关。较高的收益函数值 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 对应较高的感染概率、较强的社会认同感或较低的行为实施成本, 而较高的收益函数值 $\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 则与较低感染概率、较强社会认同感或较高行为成本相关联。因此, 在每个更新时刻, 个体 i 将通过对比不同策略的收益函数, 采用收益函数更高的策略作为下一时刻行为决策。需要注意的是, 在收益函数 $\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 中, 由于满足 $x_i(k) \in [0, 1]$, 故第 1 项恒为非正, 疾病的存在本身即构成推动个体采取预防措施的内在动力。同理, 在收益函数 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 中, 由于行为成本 $u > 0$, 则第 3 项恒为非负, 意味着行为成本始终对个体选择预防策略起到抑制作用, 个体需要在潜在感染风险与行为实施成本之间进行权衡, 只有当预防措施带来的收益增量足以抵消成本支出时, 个体才会倾向于采取相应的预防行为。

1.4 整体动力学

本模型构建了单个体激活机制下的共同进化模型, 单个体激活机制是博弈论中常见的假设, 为后续的理论分析奠定了基础。具体而言, 在每个时刻 k , 随机选择单个体 $i \in \mathcal{V}$, 被选中的个体更新行为变量, 而其他人则保留上一时刻行为选择。本研究将进一步探讨更新机制的现实解释, 在传染扩散过程中, 个体表现也存在异质性, 部分个体迅速采取行动, 而另一些人可能由于抵触情绪或认知偏差而延迟行动。值得注意的是, 考虑到疾病传播过程中的并发特征, 本模型的一个重要特征是只有行为变量遵循单个体激活机制, 而流行病变量与单个体激活的机制解耦。当被激活的个体 i 根据式 (5) 更新行为变量时, 其他个体保持上一时刻的行为, 即 $y_{-i}(k+1) = y_{-i}(k)$, 根据式 (2)~式 (5), 耦合动力学的更新公式为

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I}_n - \widehat{\mathbf{D}}(k) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(k))\widehat{\mathbf{B}}(k))\mathbf{x}(k) \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(k)$$

其中, $\mathbf{X}(k) = \text{diag}(x_1(k), \dots, x_n(k))$, $\mathbf{y}(k+1) = [y_1(k+1),$

$y_2(k+1), \dots, y_n(k+1)]^T$, $\mathbf{F}(k) = [f_1(k), \dots, f_n(k)]^T$, $\widehat{\mathbf{D}}(k) = \text{diag}[\widehat{\delta}_1(k), \dots, \widehat{\delta}_n(k)]$, $\widehat{\mathbf{B}}(k) = [\widehat{\beta}_{ij}(k)]$, 其他参数在公式 (2)~(5) 中均有定义。整个模型的动态过程如图 2 所示。

图 2 描述了行为决策与流行病传播耦合动力学过程, 其中流行病变量基于网络化 SIS 模型传播, 行为变量通过缩放因子影响感染率与康复率, 而个体在计算收益函数时, 综合考量了疾病感知、实施成本、社会网络趋同压力的现实因素, 根据最优更新策略决定下一时刻行为, 两种传播过程通过疾病感知参数 λ_i 与行为缩放因子 α 耦合。式 (6) 作为简洁的分析框架, 能够准确描述行为决策对流行病传播过程的影响, 具备与其他流行病模型融合潜力, 为进一步拓展研究提供了灵活的框架基础。

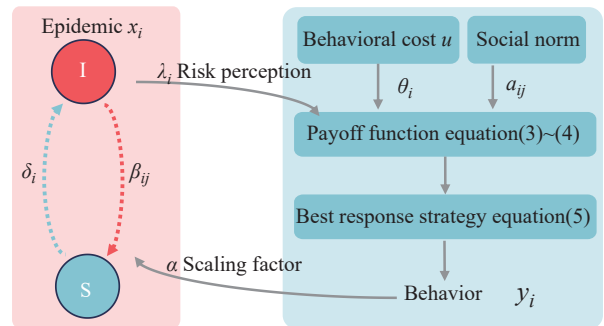


图 2 行为与流行病耦合动力学

Fig. 2 Coevolution dynamic of behavior and epidemic spreading

2 稳定性分析

本章将通过李雅普诺夫定理结合博弈论对多种稳定平衡点进行理论性分析, 包括零平衡点及非零平衡点。首先针对模型提出基本假设。

2.1 模型假设

假设 1 对于任意节点 $i \in \mathcal{V}$, 假设初始变量满足 $x_i(0) \in [0, 1]$, $y_i(0) \in \{-1, 1\}$, 且参数条件满足 $\lambda_i \in [0, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$, $\theta_i \in [0, 1]$, $u > 0$, $\delta_i \in [0, 1]$, $\beta_{ij} \in [0, 1]$, $0 \leq \delta_i(1 + \alpha) \leq 1$, $0 \leq \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(1 + \alpha) \leq 1$ 。

假设 2 子网络 \mathcal{G}_E 、 \mathcal{G}_A 为无向网络, 且均为强连通网络。

引理 1 若假设 1 和假设 2 成立, 则式 (6) 中对于任意个体 $i \in \mathcal{V}$, 满足 $x_i(k) \in [0, 1]$, $y_i(k) \in \{-1, 1\}$ 。

引理 1 证明模型中流行病变量的正定性, 考虑到证明思路相对直接, 故不展开详述, 具体过程可参考文献 [33] 中引理 2 的证明。式 (6) 在单一激活机制的框架下演化, 即在每个离散时间, 只有单个被激

活个体的行动和变量更新,而其他个体的行动保持不变,同时,每个个体的流行状态在每个离散时间被更新。需要特别说明的是,虽然系统存在多种可能的更新机制,但为了构建主要理论结果,需要对更新机制建立以下一般性假设。

假设3 假设存在一个有限正整数 $T > n$,使得每个个体 $i \in \mathcal{V}$ 在任意时间间隔 $\{k, k+T\}$ 内至少激活一次。

假设3要求在有限的时间步长中,所有个体至少完成一次行为变量的更新,正整数 T 的取值灵活性使得模型涵盖广泛的情景,当 T 远大于个体数量 n 时,个体存在多次更新的可能,且该假设对个体的更新顺序无任何限制,在时间 T 内个体被随机选择。

2.2 健康态平衡点

首先讨论流行病消亡状态对应的模型平衡点,即健康态平衡点,可以总结为以下引理。

引理2 若假设1、假设2成立,且满足条件 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) - \mathbf{D}(1-\alpha)) \leq 1$,则对于任意初始状态,流行病变量全局渐近收敛于 $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_n$ 。

证明:令 $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) - \mathbf{D}(1-\alpha)$ 和 $\widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \mathbf{X}(k) \times \mathbf{B}(1+\alpha)$,则式(6)可以整理为以下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [\mathbf{I}_n + (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(k))\widehat{\mathbf{B}}(k) - \widehat{\mathbf{D}}(k)]\mathbf{x}(k) = \\ &[\mathbf{I}_n + \widehat{\mathbf{B}}(k) - \widehat{\mathbf{D}}(k) - \mathbf{X}(k)\widehat{\mathbf{B}}(k)]\mathbf{x}(k) = \\ &[\mathbf{M} - \mathbf{X}(k)\widehat{\mathbf{B}}(k)]\mathbf{x}(k) = \widehat{\mathbf{M}}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (7)$$

观察式(7)不难看出, $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_n$ 是其平衡解。矩阵 \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 为不可约非负矩阵,所以矩阵 \mathbf{M} 与 $\widehat{\mathbf{M}}$ 为不可约非负矩阵。已知不等式条件 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) - \mathbf{D}(1-\alpha)) \leq 1$ 成立,此时存在一个正对角矩阵 \mathbf{P} ,使得 $\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}$ 为负定或半负定矩阵。设置李雅普诺夫函数为 $V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$,此时可知函数 $V(\mathbf{x}(k))$ 为正定函数,进一步可以得到函数推导式为

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}(k+1)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k) = \\ &\mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{M}}^T \mathbf{P} \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \leq \\ &\mathbf{x}(k)^T (\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}(k)^T (\mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k))^T \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \\ &\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{M} \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T (\mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k))^T \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{x}(k) \leq \\ &\mathbf{x}(k)^T (\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \\ &(\mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k))^T \mathbf{P} (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}) \widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k) - \\ &\mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{B}}(k)^T \mathbf{P} (\mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k)) \mathbf{x}(k) \leq \\ &\mathbf{x}(k)^T (\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{B}}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (8)$$

当满足条件 $\rho(\mathbf{M}) < 1$ 时,可以得到两个不等式 $\mathbf{x}(k)^T (\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) < 0$ 和 $\mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{B}}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k) < 0$ 成立。因此,不等式 $V(\mathbf{x}(k)) < 0$ 在任何 $x_i(k) \neq 0$ 的情

况下成立。当满足条件 $\rho(\mathbf{M}) = 1$ 时,矩阵 $\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}$ 为半负定矩阵,可等价于不等式 $\mathbf{x}(k)^T (\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) \leq 0$ 成立,则公式(8)可进一步写为 $V(\mathbf{x}(k)) \leq -\mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{B}}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k)$ 。当 $x_i(k) \neq 0$ 时,满足 $\mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{B}}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k) > 0$,此时 $\Delta V(\mathbf{x}) < 0$ 。当且仅当 $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}_n$ 时, $\mathbf{x}(k)^T \widehat{\mathbf{B}}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}(k) \mathbf{x}(k) = 0$ 成立。此时满足函数 $V(\mathbf{x}(k))$ 为正定函数,而当 $V(\mathbf{x}(k)) < 0$ 时,根据文献[34]的定理4.1,可得到平衡点 $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_n$,全局渐近稳定性,证毕。

在得到流行病变量稳定的基础上,进一步讨论行为变量的稳定性。本文采用序数位势博弈这一博弈模型,首先给出序数位势博弈的基本定义及纳什均衡存在性。

引理3^[35] 设 $\Gamma(u^1, u^2, \dots, u^n)$ 为一个具有有限参与者的博弈过程,参与者集合为 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$,第 i 个参与者的策略集为 \mathcal{A}_i ,每个参与者的决策来自有限集合 $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$,第 i 个参与者的收益函数为 U_i ,具有上限值的势能函数为 P ,对于每个决策者 i 和非决策者 $-i$,若满足以下不等式,则博弈 Γ 为序数位势博弈。

$$U_i(a_i^1, a_{-i}) - U_i(a_i^2, a_{-i}) > 0 \text{ if } P(a_i^1, a_{-i}) - P(a_i^2, a_{-i}) > 0,$$

其中 $a_i^1, a_i^2 \in \mathcal{A}_i$ 。在序数位势博弈中,一定存在一个纯策略纳什均衡。

在位势博弈中能够存在纯策略纳什均衡的核心在于,个体收益函数与全局位势函数的内在一致性。收益函数反映个人状态,而势能函数反映全局状态,个体基于自身收益函数的策略选择,客观上与全局位势函数的优化变化一致,从而使得个体利益与集体利益在均衡点达成统一。

下面将通过证明所建立的博弈过程为序数位势博弈,说明模型存在纳什均衡,可总结为如下定理。

定理1 若假设1、假设2、假设3成立,且满足条件 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) - \mathbf{D}(1-\alpha)) \leq 1$,则对于任意初始状态,系统稳定于 $\mathbf{z} = [\mathbf{0}_n^T, \mathbf{y}^{*T}]^T$ 。

证明 流行病变量的稳定性已经通过引理2证明,下面需要证明行为变量 \mathbf{y} 的稳定性。首先,建立一个全局势能函数 $\Psi(\mathbf{z}(k))$:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{z}(k)) &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i^A} a_{ij} ((1+y_j(k))(1+y_i(k)) + \\ &(1-y_j(k))(1-y_i(k))) + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} x_i(k) y_i(k) - \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\theta_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} u y_i(k) \end{aligned} \quad (9)$$

由于势能函数中每项变量均有上下限,因此势

能函数本身具有明确上下界,本质上势能函数 $\Psi(z(k))$ 是关于时间的势能函数,为了文章的简洁性,下文将使用 $\Psi(k)$ 代表 $\Psi(z(k))$,用 x_i 代表 $x_i(k)$, y_i 代表 $y_i(k)$, x'_i 代表 $x_i(k+1)$, y'_i 代表 $y_i(k+1)$ 。故势能函数可以简写为

$$\Psi(k) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i^A} a_{ij}((1+y_j)(1+y_i) + (1-y_j)(1-y_i)) + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} x_i y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} u y_i \quad (10)$$

由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 且不存在自环 $a_{ii} = 0$, 根据假设 3, 式 (10) 可以进一步整理成

$$\Psi(k) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} x_i y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} u y_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n a_{ij}((1+y_j)(1+y_i) + (1-y_j)(1-y_i)) + \frac{1}{8} \sum_{k \in \mathcal{V}/i \in \mathcal{V}/i} a_{ij}((1+y_j)(1+y_i) + (1-y_j)(1-y_i)) \quad (11)$$

根据假设 3 可知, 对于任意激活个体 $i \in \mathcal{V}$, $y_{-i}(k+1) = y_{-i}(k)$, 式 (10) 等价于式 (11)。故可以得到势能函数差为

$$\Psi(k+1) - \Psi(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i^A} \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} y_j (x'_j - x_j) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (2y'_j y'_j - 2y_j y_j) + \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} (x'_j y'_j - x_j y_j) - \frac{\theta_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} u (y'_i - y_i)$$

根据收益函数的定义, 可以重新整理收益函数的表达式为

$$\pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_i \lambda_i x_i + \frac{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i^A} a_{ij} \frac{1+y_j y_j}{2} - y_i \theta_i u$$

进一步可以整理得到收益函数的差为

$$\pi_i(y'_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (y'_i x'_i - y_i x_i) \lambda_i + \frac{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i^A} a_{ij} \frac{(y'_i - y_i) y_j}{2} - (y'_i - y_i) \theta_i u \quad (12)$$

此时可以得到势能函数差与收益函数差之间的关系

$$\Psi(k+1) - \Psi(k) = \frac{d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} (\pi_i(y'_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y})) + \sum_{i \in \mathcal{N}_i^A} \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} \Delta x_i y_i \quad (13)$$

其中, $\Delta x_k = x_k(k+1) - x_k(k)$, 此时流行病变量收敛至

平衡点, 则对于任意 ε , 存在整数 K , 使得当 $k > K$ 时, 满足 $\|\Delta x_k\| = \|x_k(k+1) - x_k(k)\| \leq \|x_k(k+1) - x_k^*\| + \|x_k(k) - x_k^*\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, 根据收敛性定义可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta x_k(k) = 0$ 。故此时满足等式 $\Psi(k+1) - \Psi(k) = \frac{d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} (\pi_i(y'_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}))$, 此时博弈过程为位势博弈, 故此时系统中存在纯策略纳什均衡, 该纯策略纳什均衡对应势能函数的最大值, 证毕。

定理 1 探讨了弱传染性流行病传播的情形, 指出在 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) - \mathbf{D}(1-\alpha)) \leq 1$ 条件下, 无论行为变量如何取值, 流行病最终均会走向消亡。定理 1 通过结合李雅普诺夫方法和位势博弈方法证明了系统中存在的纯策略纳什均衡, 需要注意的是, 势能函数的最大值不需要唯一性, 故在证明时无需准确写出最大值, 只需明确该势能函数对于状态变量存在上界即可。这一特征表明, 该纯策略纳什均衡并非唯一纳什均衡, 系统中可能存在多个纳什均衡点。

2.3 非健康态平衡点分析

在现实场景中, 完全根除某种流行病通常存在难度。基于此, 本节将聚焦于流行病变量收敛至非零平衡点的情形, 相关结论可归纳为如下引理。

引理 4 若假设 1、假设 2 成立, 且满足条件 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$, 对于固定的行为变量 \mathbf{y}^* , 式 (6) 中存在一个非零平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, 其中 $\mathbf{0}_n \ll \mathbf{x}^* \ll \mathbf{1}_n$, 对于任意非零初始状态, 该非零平衡点渐近稳定。

证明 观察式 (2) 可知, 解 $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_n$ 恒为模型平衡点。此时根据 Perron Frobenius 定理可知, 对于不可约非负矩阵, 等式 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) = s(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$ 成立。根据条件 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$ 可知, 存在向量 \mathbf{v} 满足 $(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha))\mathbf{v} = \rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha))\mathbf{v} > \mathbf{v}$ 且 $s(\mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 0$, 可知此时存在 $\mathbf{x}^* \gg \mathbf{0}_n$, 满足 $(\mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha) - \mathbf{X}^* \mathbf{B} \times (1+\alpha))\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_n$ 。

下面将证明该非零平衡点的稳定性。令 $\widehat{x}_i = x_i - x_i^*$, 式 (2) 可以重新整理为

$$\widehat{x}_i(k+1) = \widehat{x}_i(k) - \widehat{\delta}_i(k) (\widehat{x}_i(k) + x_i^*) + (1-x_i(k)) \times \sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{ij}(k) (\widehat{x}_j(k) + x_j^*) = \widehat{x}_i(k) - \widehat{\delta}_i(k) \widehat{x}_i(k) + (1-(\widehat{x}_i(k) + x_i^*)) \sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{ij}(k) \widehat{x}_j(k)$$

将以上公式转换为向量形式, 如下式所示:

$$\widehat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}(k) \widehat{\mathbf{x}}(k)$$

其中, $\mathbf{T}(k) = \mathbf{I}_n - \mathbf{T}^* + (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}) \widehat{\mathbf{B}}(k)$, \mathbf{T}^* 满足以下关系

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^* &= \text{diag} \left(\widehat{\delta}_1 + \sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{1j} x_j^*, \dots, \widehat{\delta}_n + \sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{nj} x_j^* \right) = \\
 &\text{diag} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{1j} x_j^*}{x_1^*}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{nj} x_j^*}{x_n^*} \right) = \\
 &\text{diag} \left(\frac{\widehat{\delta}_1}{1-x_1^*}, \dots, \frac{\widehat{\delta}_n}{1-x_n^*} \right) \leq \mathbf{I}_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{\min}}{1-x_{\min}} &\leq \frac{\sum_{j=1}^n \beta_{ij} (1-\alpha) x_j^*}{\delta_i (1+\alpha)} \\
 \frac{x_{\min}}{1-x_{\min}} &\leq \frac{\sum_{j=1}^n \beta_{ij} (1-\alpha) x_{\min}^*}{\delta_i (1+\alpha)} \\
 \frac{\delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta (1-\alpha) q_{mj}} &\leq x_{\min}
 \end{aligned}$$

将矩阵构造为 $\widehat{\mathbf{T}}(k) = \mathbf{I}_n - \mathbf{T}^* + \widehat{\mathbf{B}}(k)$, 为表述简洁, 下文将使用 \mathbf{T} 代表 $\mathbf{T}(k)$, $\widehat{\mathbf{T}}$ 代表 $\widehat{\mathbf{T}}(k)$, 具体表达式为

$$\widehat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1-\chi_{11} & \widehat{\beta}_{12} & \dots & \widehat{\beta}_{1n} \\ \widehat{\beta}_{21} & 1-\chi_{22} & \dots & \widehat{\beta}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta}_{n1} & \widehat{\beta}_{n2} & \dots & 1-\chi_{nn} \end{bmatrix}$$

其中, $\chi_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_{ij}}{x_i^*} + \widehat{\beta}_{ii}$, 由于矩阵 \mathbf{T} 是不可约非负矩阵, 故矩阵 $\widehat{\mathbf{T}}$ 为不可约非负矩阵。此外, 根据 $\widehat{\mathbf{T}}$ 的定义, 可以得到不等式 $\widehat{\mathbf{T}} \geq \mathbf{T}$ 。当且仅当 $\widehat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}_n$ 时等式成立。定义向量 $\mathbf{t} = \left[1, \frac{x_2^*}{x_1^*}, \dots, \frac{x_n^*}{x_1^*} \right]^T$, 即可以得到向量 $\mathbf{t} = \widehat{\mathbf{T}}\mathbf{t}$ 和 $\rho(\widehat{\mathbf{T}}) = 1$, 此时存在一个正向量 \mathbf{v}^T 使得 $\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{v}^T$ 。将李雅普诺夫函数设置为 $V_2(k) = \mathbf{v}^T |\widehat{\mathbf{x}}(k)|$, 进一步得到

$$\begin{aligned}
 \Delta V_2(k) &= V_2(k+1) - V_2(k) = \mathbf{v}^T (\mathbf{T} - \mathbf{I}_n) |\widehat{\mathbf{x}}(k)| = \\
 &\mathbf{v}^T (\mathbf{T} - \widehat{\mathbf{T}}) |\widehat{\mathbf{x}}(k)| = -\mathbf{v}^T \text{diag}(\widehat{\mathbf{x}}(k)) \widehat{\mathbf{B}}(k) |\widehat{\mathbf{x}}(k)| \leq 0
 \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$, 可以得到 $\widehat{\mathbf{x}}(k) \gg \mathbf{0}_n$, 且矩阵 \mathbf{B} 中每行的总和为正, 可以得到当且仅当 $\widehat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}_n$ 时 $\Delta V_2(k) = 0$, 根据李雅普诺夫理论可知, 此时非零平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ 对于任意非零初始状态渐近稳定。

引理 5 若假设 1、假设 2 成立, 且满足 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$, 则流行病变量的上下界满足

$$1 - \frac{\delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj} (1-\alpha) q_{mj}} \leq x_i^* \leq 1 - \frac{\delta_{\min} (1-\alpha)}{\sum_{j=1}^n \beta_{ij} (1+\alpha) + \gamma (1-\alpha)},$$

其中 $m = \text{argmin}_{i \in \mathcal{V}} x_i^*$ 。

证明 根据式 (2), 流行病平衡点表达式可重新整理为以下公式

$$x_i^* = \frac{\widehat{\beta}_{ij}^* x_j^*}{\widehat{\beta}_{ij}^* x_j^* + \widehat{\delta}_i^*} = 1 - \frac{\widehat{\delta}_i^*}{\widehat{\beta}_{ij}^* x_j^* + \widehat{\delta}_i^*},$$

流行病变量最小值可以写作 x_{\min} , 则可以得到

其中, $m = \text{argmin}_{i \in \mathcal{V}} x_i^*$ 。而流行病变量最大值 x_{\max} 则可以表示为

$$\begin{aligned}
 x_{\max} &= 1 - \frac{\delta_{\min} (1-\alpha)}{\sum_{j=1}^n \beta_{ij} (1+\alpha) x_j^* + \delta_{\min} (1-\alpha)} \leq \\
 &1 - \frac{\delta_{\min} (1-\alpha)}{\sum_{j=1}^n \beta_{ij} (1+\alpha) + \delta_{\min} (1-\alpha)}
 \end{aligned}$$

证毕。

在引理 5 证明流行病存在的基础上探讨流行病平衡点的上下限, 下面将讨论整个模型的稳定性。

定理 2 若假设 1、假设 2 成立, 满足 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$, 且对于任意激活个体 $i \in \mathcal{V}$,

$$\text{不等式 } \frac{\delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj} (1-\alpha) q_{mj}} > \frac{2\theta_i u + (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2\lambda_i} \text{ 成立,}$$

则系统收敛到非零平衡点 $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^{*T}, \mathbf{1}_n^T]^T$, 其中 $\mathbf{0}_n \ll \mathbf{x}^* \ll \mathbf{1}_n$ 。

证明 在定理 2 中, 根据式 (12) 可得此时势能函数差值与收益函数差值满足 $\Psi(k+1) - \Psi(k) =$

$$\frac{d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} (\pi_i(y_i' | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y})) \sum_{i \in \mathcal{N}_i^A} \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} \times \Delta x_i y_i,$$

然而, 此时的流行病变量处于非稳定状态, 此时需要证明以下不等式 $|\pi_i(y_i' | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y})| >$

$$\left| \sum_{i \in \mathcal{N}_i^A} \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} \Delta x_i y_i \right|.$$

观察式 (3)~(4) 可得, 收益函数公式差绝对值 $|\pi_i(y_i' | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y})|$ 的最小值为 0, 不存在条件使得不等式 $|\pi_i(y_i' | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y})| >$

$\left| \sum_{i \in \mathcal{N}_i^A} \frac{\lambda_i d_i}{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)} \Delta x_i y_i \right|$ 恒成立, 故当 $\pi_i(y_i' | \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \pi_i(y_i | \mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ 时, $\Psi(k+1) - \Psi(k) > 0$ 的关系不能恒成立, 导致仅通过势能函数分析难以直接推导系统的稳定性。

进一步地,根据收益函数及最佳更新策略的定义可知,若针对每个激活个体 $i \in \mathcal{V}$ 的收益函数恒满足不等式 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 则行为变量稳定。

若满足条件 $\frac{\delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj}(1-\alpha)q_{mj}} > \frac{2\theta_i u + (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2\lambda_i}$,

则根据收益函数公式与引理 5 可以得到以下不等式

$$\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \lambda_i x_{\min} + \frac{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{d_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1+y_j(k)}{2} - \theta_i u =$$

$$\frac{\lambda_i \delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj}(1-\alpha)q_{mj}} - \theta_i u > \frac{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2}$$

$$\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) < -\lambda_i x_{\min} + \frac{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{d_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1-y_j(k)}{2} +$$

$$\theta_i u = \frac{-\lambda_i \delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj}(1-\alpha)q_{mj}} + \theta_i u < \frac{(1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2}$$

此时,可以得到收益函数关系恒满足 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 结合引理 4 可得,对于稳定的行为变量,流行病变量稳定于非零平衡点,证毕。

尽管定理 1 中已明确证明了耦合传播过程构成位势博弈,但当流行病传染性超过阈值 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$ 时,流行病变量稳定于非零平衡点,意味着疾病将持续存在,此时讨论行为的具体取值十分关键,但位势博弈的纯策略均衡点并不能明确行为变量的平衡点。同时,所建立的模型中,行为变量为离散有限集,而流行病变量为连续集,这也为理论推导带来了挑战。个体的策略空间为离散有限集与连续集的笛卡尔积,而流行病变量与行为变量无法进行解耦,故采用从收益函数定义出发的分析方法。在定理 2 中,当满足条件 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1-\alpha) - \mathbf{D}(1+\alpha)) > 1$ 时,流行病变量存在最小值,行为变量平衡点 $\mathbf{y} = \mathbf{1}_n$ 的核心在于流行病变量的最小值满足由风险感知 λ_i 与成本敏感系数 θ_i 构成的阈值,意味着只有当疫情维持在一定的严重程度时,长期、稳定且有效的人群自我保护行为才可能形成并持续。

基于从收益函数定理分析的视角,可以进一步得到行为变量稳定到具体平衡点的必要条件。

推论 1 若假设 1、假设 2、假设 3 成立,只有当

参数满足 $\frac{\delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj}(1-\alpha)q_{mj}} > \frac{2\theta_i u - (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2\lambda_i}$ 时,

行为变量稳定于 $\mathbf{y}^* = \mathbf{1}_n$; 只有当参数满足

$1 - \frac{\delta_{\min}(1-\alpha)}{\sum_{j=1}^n \beta_{ij}(1+\alpha) + \delta_{\min}(1-\alpha)} < \frac{2\theta u + (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2\lambda_i}$ 时,

行为变量稳定于 $\mathbf{y}^* = -\mathbf{1}_n$ 。

证明 利用反证的思路,假设无法满足条件,此

时 $\frac{\delta_m}{\sum_{j=1}^n \beta_{mj}(1-\alpha)q_{mj}} \leq \frac{2\theta_i u - (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2\lambda_i}$, 收益函数

满足不等式 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$, 而 $\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, 故此时无法满足不等式 $\pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 则行为变量无法稳定于 $\mathbf{y}^* = \mathbf{1}_n$ 。同理,若无法满足条件 $1 -$

$\frac{\delta_{\min}(1-\alpha)}{\sum_{j=1}^n \beta_{ij}(1+\alpha) + \delta_{\min}(1-\alpha)} < \frac{2\theta u + (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{\lambda_i}$, 则

收益函数关系 $\pi_i(-1|\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \pi_i(1|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 恒不成立,行为变量稳定于 $\mathbf{y}^* = -\mathbf{1}_n$ 不成立,证毕。

需要注意的是,推论 1 说明的是全体行为变量稳定到具体数值的必要条件,这一结论从理论层面界定了行为变量达成稳态的基本约束,即只有在满足推论 1 所构建的条件框架下,行为变量才有可能稳定于某一确定数值,但该条件本身并不构成充分性证明。下面将通过数值仿真实验证明理论正确性并进一步分析模型稳定性。

3 数值仿真

3.1 理论性验证

本节通过仿真实验来验证理论正确性,采用 8 个节点组成的双层网络结构,所采取的感染权重网络与接触邻接网络均满足假设 2,个体单个激活周期设置为 $T = 8$,在单个周期内个体以任意顺序更新行为变量。

首先对定理 1 进行仿真验证,部分参数设置如下: $\alpha = 0.2$, $\lambda = [0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.30.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4]^T$, $\theta = [0.2 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.2 \ 0.1]^T$, $u = 0.3$ 。设置感染权重网络 \mathbf{B} 与康复率 \mathbf{D} 满足 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) - \mathbf{D}(1-\alpha)) = 0.9544 < 1$,初始流行病变量与行为变量均为随机集,个体更新策略满足假设 3,结果如图 3 所示。图 3 中所示的流行病变量及行为变量均收敛到平衡点 $\mathbf{z}^* = [\mathbf{0}_n^T, \mathbf{0}_n^T]^T$,此时系统中疾病消失,个体均不采取防护措施,这一结果与定理 1、推论 1 理论结果相符。

下面对定理 2 进行仿真验证,部分参数设置如下, $\alpha = 0.2$, $\lambda = [0.7 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7]^T$, $\theta = [0.4 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.3]^T$, $u = 0.2$ 。设置感染权重网络 \mathbf{B} 与康复率 \mathbf{D} 满足 $\rho(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}(1+\alpha) -$

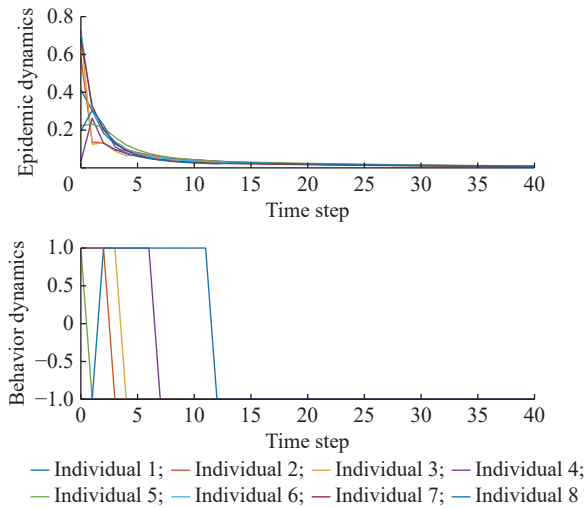


图 3 健康态平衡点

Fig. 3 Disease-free equilibrium

$D(1-\alpha) = 1.6283 > 1$ 和 $\rho(I_n + B(1-\alpha) - D(1+\alpha)) = 1.2745 > 1$, 此时, 参数 $\max\left\{\frac{2\theta_i + (1-\lambda_i)(1-\theta_i)}{2\lambda_i}\right\} = 0.2429$, 满足定理 2 的条件, 初始流行病变量与行为变量均为随机集, 个体更新策略满足假设 3, 结果见图 4, 流行病变量收敛到非零平衡点 x^* , 流行病变量最小值为 0.35376, 最大值为 0.684151, 行为变量均收敛到平衡点 $y^* = \mathbf{1}_n$, 此时系统中流行病持续存在, 个体均选择采取预防行为, 验证定理 2 的理论正确性。

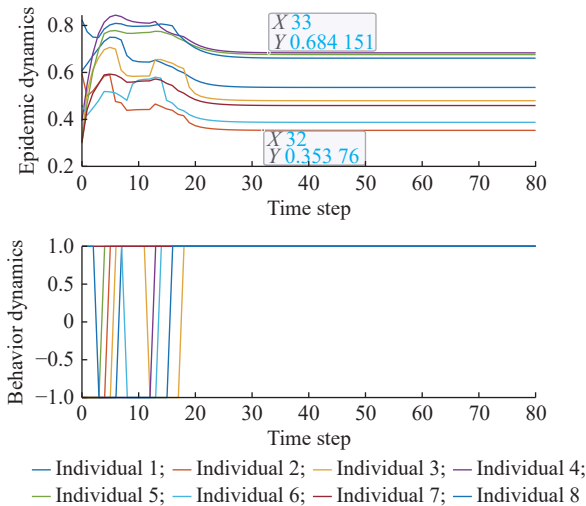


图 4 非健康态平衡点

Fig. 4 Endemic equilibrium

为了评估模型性能, 保持与图 4 一致的参数条件(包括节点数量、双层网络拓扑结构、感染率、康复率及节点更新机制), 运用文献 [33] 中的 SIS 流行病与观念动力学耦合的双层网络模型, 结果如图 5 所示。流行病变量收敛至非零平衡点, 最小值与最大值分别为 0.433802 和 0.766056。对比图 4 与图 5 中流行病的收敛平衡点可清晰地看出, 本文提出的

模型对流行病的控制效果显著优于文献 [33] 中的模型。

在实验 1 中, 由于流行病传染性较低, 行动变量的变化无法影响流行病变量平衡点的稳定性, 而在实验 2 中, 尽管采取防护行为可减低非零平衡点的数值, 但依然无法根除疾病。下面将探讨行为干预下的流行病根除。设置感染率矩阵与康复率满足 $\rho(I_n + B(1+\alpha) - D(1-\alpha)) = 1.4157 > 1$ 与 $\rho(I_n + B(1-\alpha) - D(1+\alpha)) = 0.6779 < 1$, 其他参数设置如下: $\alpha = 0.3, \lambda = [0.5 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4]^T, \theta = [0.2 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.1]^T, u = 0.25$, 此时满足推论 1 中的参数条件, 结果如图 6 所示。

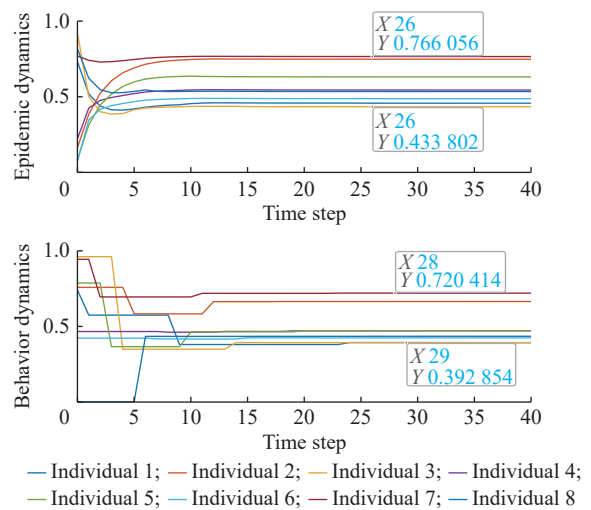


图 5 文献 [33] 中的非健康态平衡点

Fig. 5 Endemic equilibrium in reference [33]

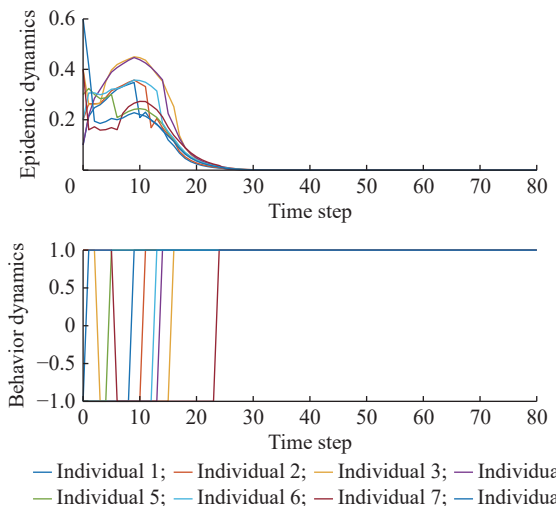


图 6 行为控制下的流行病传播

Fig. 6 Epidemic spreading under behavior control

在图 6 中, 行为变量稳定于 $y^* = \mathbf{1}_n$, 此时由于受到行动变量的控制影响, 流行病变量稳定于 $x^* = \mathbf{0}_n$ 。在系统达到稳定前, 行为变量因个体收益比较而频繁切换, 导致流行病变量随之剧烈波动, 当部分个体

未采取防护行为时, 疾病存在传播风险, 随着行为变量逐渐稳定, 感染概率持续下降直至系统收敛, 这一过程能够验证在满足推论 1 的参数条件下, 防护行为的稳定性最终促使疾病根除。

为验证耦合机制的有效性, 在与图 6 参数(包括节点数量、网络结构、感染率、康复率、节点更新机制)一致的条件下, 运行文献 [33] 中的流行病双层耦合模型, 结果如图 7 所示。结果显示, 文献 [33] 中的双层网络模型降低了流行病传播水平, 但在此感染率设置下无法根除流行病, 流行病变量最小值为 0.268639, 最大值为 0.379414。对比图 6 与图 7 可以观察到, 本文提出的式 (6) 能够对流行病起到有效根除的控制作用。

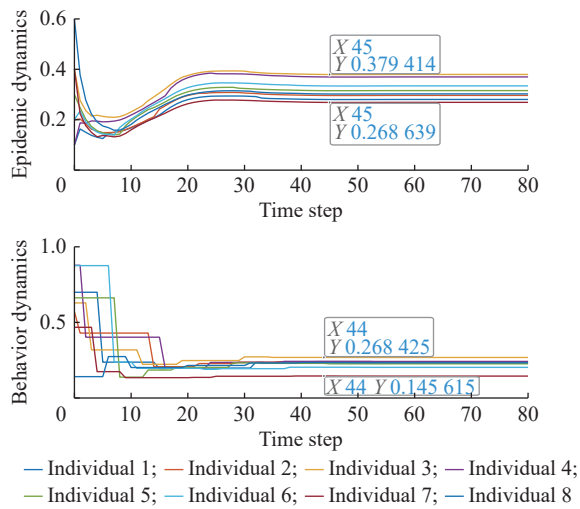


图 7 文献 [33] 中控制下的流行病传播

Fig. 7 Epidemic spreading under behavior control in reference [33]

设置参数为 $\lambda = [0.2 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.1]^T$, $\theta = [0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.4]^T$, 其他参数同图 6, 结果如图 8 所示, 行为变量稳定于

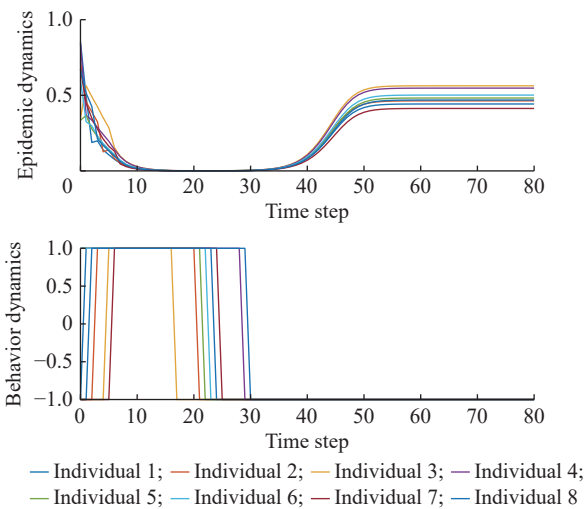


图 8 缺少行为控制的流行病传播

Fig. 8 Epidemic spreading without behavior control

$y^* = -1_n$, 可以看到由于缺少个体行动, 流行病无法被根除。对比图 6 与图 8, 感染率与康复率不变, 可以看出式 (6) 中行为变量对流行病的控制有效性。

此时设置感染率矩阵与康复率满足 $\rho(I_n + B(1 + \alpha) - D(1 - \alpha)) = 1.3266 > 1$ 与 $\rho(I_n + B(1 - \alpha) - D(1 + \alpha)) = 0.8817 < 1$, 其他参数设置如下: $\alpha = 0.2$, $u = 0.5$, $\lambda = [0.7 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.8 \ 0.6]^T$, $\theta = [0.4 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.2 \ 0.4]^T$, 系统振荡结果如图 9 所示。

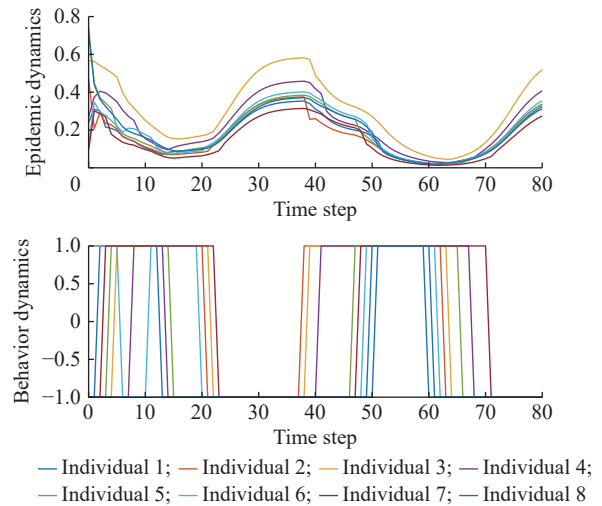


图 9 系统振荡

Fig. 9 Oscillation result

如图 9 所示, 当个体采取防护行为时, 流行病变量呈现显著下降趋势。随着流行病规模减小, 个体逐渐减少防护行为, 进而引发疫情反弹。该现象表明, 当前参数设置未能满足推论 1 所构建的稳态条件, 导致流行病变量与行为变量间产生动态振荡。在流行病传播中, 振荡现象为疫情规模的反复波动。由于本文假设 3 中未限定个体状态更新的顺序, 每个个体在激活周期内被随机激活更新状态, 这种更新机制导致振荡为非周期性的。值得注意的是, 在传统的单层 SIS 传播模型或已有的双层耦合模型(如文献 [33]、[36])中, 系统动力学通常收敛于单一平衡点(健康态平衡点或非健康态平衡点), 未出现如图 9 所示的持续振荡现象。这表明传统模型在捕捉现实流行病传播中可能出现的反复波动方面存在局限性。本文模型所展现的振荡现象, 为描述更复杂的疫情动态(如季节性复发、防控措施效果波动引发的反弹等)提供了新的建模视角。

3.2 参数敏感性分析

为了进一步了解模型的性质, 沿用上述图 9 仿真实验中由 8 个节点组成的双层网络结构, 展开参数敏感性分析实验。由定理 1 可知, 当满足条件 $\rho(I_n +$

$B(1-\alpha) - D(1+\alpha) < \rho(I_n + B(1+\alpha) - D(1-\alpha)) \leq 1$ 时, 流行病变量全局渐近稳定于 $x^* = 0_n$, 表明此时系统已实现流行病根除, 系统中存在唯一流行病平衡点, 此时参数敏感性实验的探究价值有限, 针对含有多种平衡点状态的谱半径范围展开参数敏感性实验。故聚焦于谱半径, 设置感染率与康复率满足

$\rho(I_n + B(1+\alpha) - D(1-\alpha)) = 1.4157 > 1$ 与 $\rho(I_n + B(1-\alpha) - D(1+\alpha)) = 0.6779 < 1$, 将行为放缩因子设置为 $\alpha = 0.3$, 将成本分别设置为 $u = 0.2, u = 0.4, u = 0.6, u = 0.8$, 为了便于结果展示, 将疾病感知因子与成本敏感系数统一(即 $\lambda_i = \lambda, \theta_i = \theta$), 进行敏感性分析实验, 结果如图 10 所示。

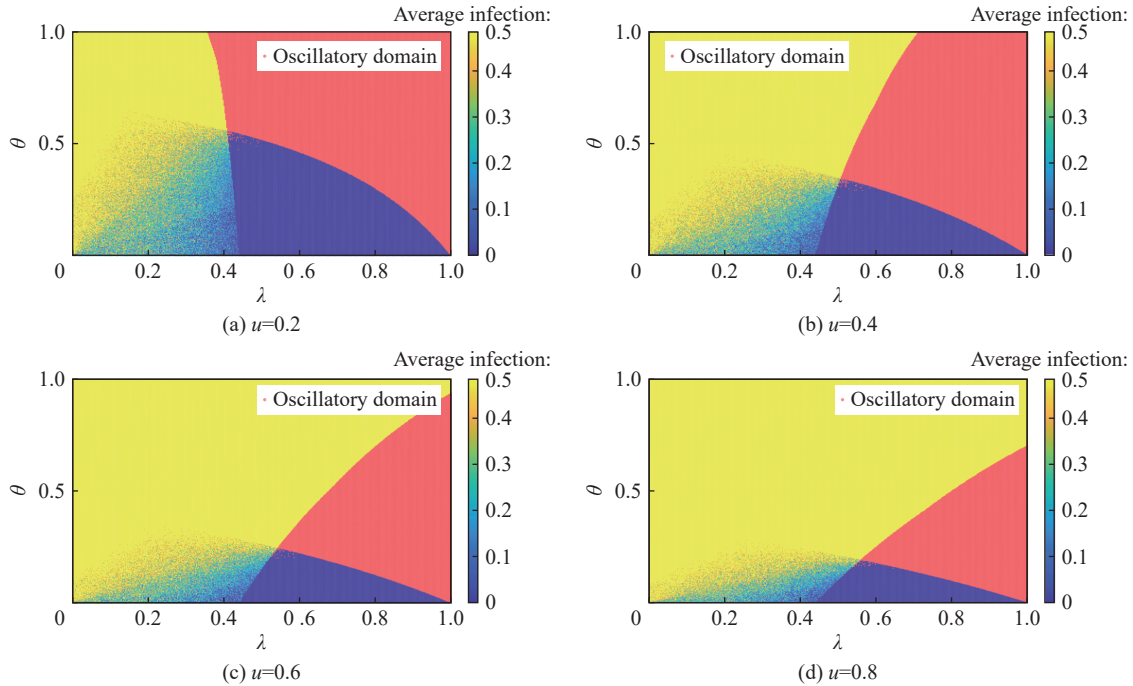


图 10 中等传染性流行病的参数敏感性分析

Fig. 10 Parameter sensitivity analysis under moderate contagion level

图 10 中横坐标为疾病感知系数 λ , 纵坐标为成本敏感系数 θ , 4 个子图分别代表成本函数不同取值 ($u=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) 下的稳定性结果。图中红色区域代表对应参数组合下系统存在振荡现象, 非红色区域均代表对应参数组合下任意流行病与行为初始状态下均能够达到稳定。在稳定区域内, 使用热力图进一步刻画了平均感染概率的大小, 颜色从深蓝(低)到黄(高)表示感染程度的升高。具体来说, 黄色区域代表流行病变量稳定于非零平衡点 x^* , 行为变量稳定于 $y^* = -1_n$ 。深蓝色区域代表流行病变量稳定于 $x^* = 0_n$, 行为变量稳定于 $y^* = 1_n$, 过渡区域代表系统稳定, 但全体行为并不统一。值得注意的是稳定区域与振荡区域边界并不是清晰边界, 这是因为在单个激活周期中, 个体被激活的顺序是任意的, 导致了一定的随机性。

随着个体疾病感知程度的提高, 系统从流行病被根除的状态逐渐向系统产生振荡的状态过渡, 此时适当的疾病感知系数与低成本敏感度的耦合作用将成为流行病消失的关键因素, 高疾病感知水

平促使个体更频繁地调整防控行为, 易引发系统振荡, 表明疾病感知若缺少成本调节机制, 可能造成过度反映或与流行病动态的过度同步。针对成本敏感度的分析可知, 个体对防控行为的成本越敏感, 越能起到抑制振荡的作用, 但此时有着流行病无法被根除的可能性。而随着成本的上升, 振荡区域明显缩小, 同时流行病被根除的深蓝色区域也明显缩小, 可知高成本降低了流行病被根除的可能性。

更改感染率与康复率, 使其满足 $\rho(I_n + B(1+\alpha) - D(1-\alpha)) = 1.8573 > 1$ 与 $\rho(I_n + B(1-\alpha) - D(1+\alpha)) = 1.1536 > 1$, 讨论流行病无法被根除时行为对流行病平衡点的影响。设置行为放缩因子 $\alpha = 0.4$, u 分别为 0.2、0.4、0.6、0.8, 图 11 示出了在流行病传染性较强的情况下, 各参数对系统行为的敏感性分析。图中深蓝色区域表示系统稳定于最低感染水平, 黄色区域表示系统稳定于最高感染水平。观察图 11 可知, 此时振荡区域主要集中在高疾病感知与低成本敏感度的组合区域, 而高疾病感知配合低成本敏感度则有助于将系统推向最低感染水平的稳

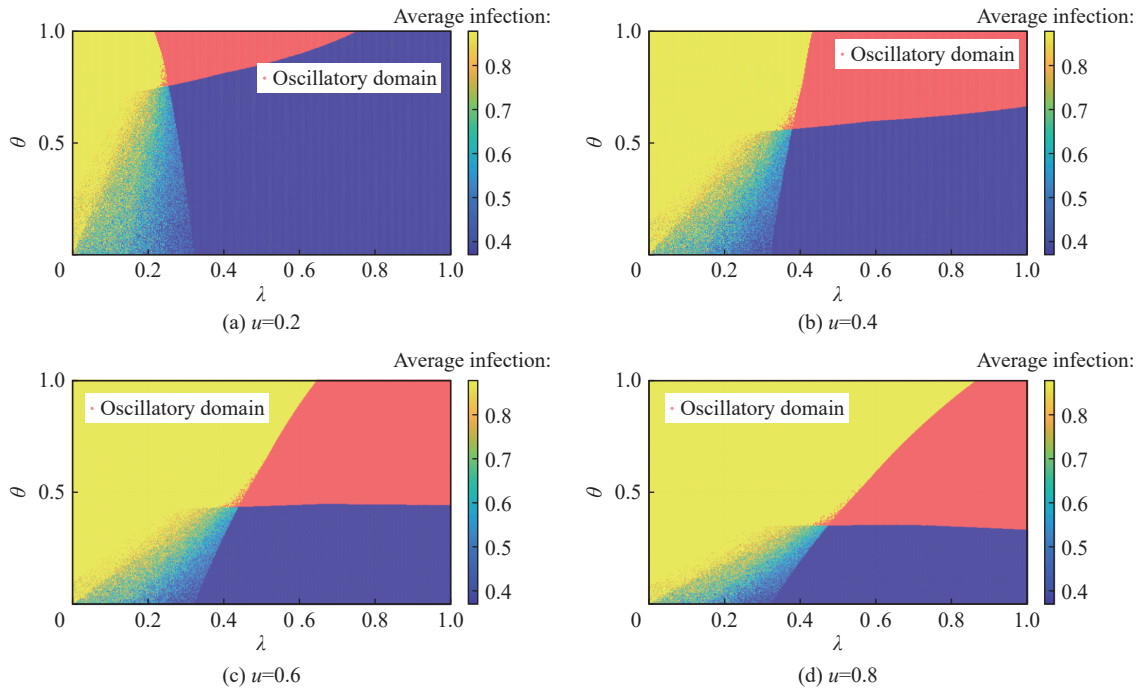


图 11 高等传染性流行病的参数敏感性分析

Fig. 11 Parameter sensitivity analysis under high contagion level

定态。随着行为成本增加,稳定在低感染水平的区域逐渐缩小,振荡区域逐步扩大,表明较高的行为成本降低了疾病被控制的可能性,同时提升了系统发生动态振荡的风险。

对比图 10 与图 11 可以发现,疾病感知水平应根据流行病的传染性动态调整,在传染性较低时,适度的疾病感知更有利于疾病控制,而过高的感知反而容易诱发系统振荡。在传染性较高的情形下,当疾病感知超过阈值时,系统能否控制疾病传播几乎完全依赖于较低的成本敏感系数。由此可知,更高的疾病感知不一定总是有利于流行病控制,需要根据具体流行病传染性进行调整,同时要与成本敏感系数进行配合。

4 结束语

针对社会网络中人类行为对流行病传播产生的影响,构建了一个考虑行为决策机制与流行病耦合的传播模型。该模型包含两种在不同网络上传播的变量,分别对应流行病状态与人类行为。具体而言,在流行病传播网络中,感染率与康复率通过个体行为进行放缩;在行为决策网络中,个体基于邻居的行为、自身健康状态及实施行为成本构建收益函数,并依据最优策略原则更新行为状态。该模型能够更真实地刻画人类行为在疫情传播过程中的影响作用,并进一步分析不同行为影响因素对疫情控制带来的潜在风险。在此基础上,通过融合李雅普诺夫理论

与序数位势博弈理论分析探讨了系统在不同平衡状态下的稳定性,包括流行病健康态平衡点和流行病存在平衡点,结果表明个体行为对流行病控制具有一定的局限性,并通过仿真实验验证了理论正确性。通过与现有双层耦合模型的对比实验,证明该模型显著降低了流行病的稳态传播水平,且在特定参数条件下可实现流行病根除效果,为传播控制策略提供了更优理论支撑。同时,本文提出的模型具备更强的复杂动力学行为捕捉能力,能够刻画疫情传播中的振荡现象,突破现有双层网络模型对动态传播过程刻画的局限性。针对模型中存在的振荡现象,进行了参数敏感性分析实验,结果表明,当成本敏感系数较低时,系统更容易实现对流行病的控制,而疾病感知系数则需根据流行病的传染性水平进行适度调节,以避免过高感知引发系统振荡,从而提升防控效果的稳定性。

展望未来的工作,可以进一步解除对单个体激活假设的限制,以得到应用性更强的耦合传播框架,同时可以考虑将行为决策模型与更多流行病过程进行融合,以得到更统一的流行病传播模型。另外,也可以加入真实流行病数据,进一步验证模型的有效性。

参考文献:

- [1] XUE D, WANG M, LIU F, *et al.* Time series modeling and forecasting of epidemic spreading processes using deep transfer learning[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, 185:

- 115092.
- [2] GRACY S, PARÉ P E, LIU J, *et al.* Modeling and analysis of a coupled SIS bi-virus model[J]. *Automatica*, 2025, 171: 111937.
- [3] MEI W, MOHAGHEGHI S, ZAMPIERI S, *et al.* On the dynamics of deterministic epidemic propagation over networks[J]. *Annual Reviews in Control*, 2017, 44: 116-128.
- [4] 何高奇, 边晓晖, 孙菲, 等. 基于传染病机制的突发事件下群体情绪感染模型 [J]. *华东理工大学学报 (自然科学版)*, 2018, 44(6): 909-917,949
- [5] LIU F, CUI S X, LI X, *et al.* On the stability of the endemic equilibrium of a discrete-time networked epidemic model[J]. *IFAC-Papers on Line*, 2020, 53(2): 2576-2581.
- [6] PARÉ P E, LIU J, BECK C L, *et al.* Analysis, estimation, and validation of discrete-time epidemic processes[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 28(1): 79-93.
- [7] PARÉ P E, JANSON A, GRACY S, *et al.* Multilayer SIS model with an infrastructure network[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2022, 10(1): 295-307.
- [8] CUI S, LIU F, JARDÓN-KOJAKHMETOV H, *et al.* Discrete-time layered-network epidemics model with time-varying transition rates and multiple resources[J]. *Automatica*, 2024, 159: 111303.
- [9] LAJMANOVICH A, YORKE J A. A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population[J]. *Mathematical Biosciences*, 1976, 28(3/4): 221-236.
- [10] ALLEN L J S. Some discrete-time SI, SIR, and SIS epidemic models[J]. *Mathematical Biosciences*, 1994, 124(1): 83-105.
- [11] FALL A, IGGIDR A, SALLET G, *et al.* Epidemiological models and Lyapunov functions[J]. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2007, 2(1): 62-83.
- [12] KHANAFER A, BAŞAR T, GHARESIFARD B. Stability of epidemic models over directed graphs: A positive systems approach[J]. *Automatica*, 2016, 74: 126-134.
- [13] ZHANG Z, MEI X, JIANG H, *et al.* Dynamical analysis of Hyper-SIR rumor spreading model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 446: 127887.
- [14] PICCIRILLO V. Nonlinear control of infection spread based on a deterministic SEIR model[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 149: 111051.
- [15] LIU F, XUE D, YU X, *et al.* Flexible mitigation of epidemics by transport management[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2025, 194: 116211.
- [16] XIE M, ZENG Z, LI Y, *et al.* Adherence strategy based on evolutionary games in epidemic spreading[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, 186: 115289.
- [17] 钟传江, 虞慧群, 范贵生. 云边场景下基于合作博弈的数
据上传优化 [J]. *华东理工大学学报 (自然科学版)*, 2025, 51(2): 250-259.
- [18] AGHBOLAGH H D, YE M, ZINO L, *et al.* Coevolutionary dynamics of actions and opinions in social networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(12): 7708-7723.
- [19] KHAN A A, ULLAH S, AMIN R. Optimal control analysis of COVID-19 vaccine epidemic model: A case study[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2022, 137(1): 1-25.
- [20] YANG W. Modeling COVID-19 pandemic with hierarchical quarantine and time delay[J]. *Dynamic Games and Applications*, 2021, 11(4): 892-914.
- [21] LI K, ZHANG H, ZHU G, *et al.* Suboptimal control and targeted constant control for semi-random epidemic networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(4): 2602-2610.
- [22] MARTINS N C, CERTÓRIO J, LA R J. Epidemic population games and evolutionary dynamics[J]. *Automatica*, 2023, 153: 111016.
- [23] MAITRA U, HOTA A R, SRIVASTAVA V. SIS epidemic propagation under strategic non-myopic protection: A dynamic population game approach[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2023, 7: 1578-1583.
- [24] HUANG Y, ZHU Q. A differential game approach to decentralized virus-resistant weight adaptation policy over complex networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2019, 7(2): 944-955.
- [25] PARINO F, ZINO L, PORFIRI M, *et al.* Modelling and predicting the effect of social distancing and travel restrictions on COVID-19 spreading[J]. *Journal of the Royal Society Interface*, 2021, 18(175): 20200875.
- [26] HUANG Z, SHU X, XUAN Q, *et al.* Epidemic spreading under game-based self-quarantine behaviors: The different effects of local and global information[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2024, 34(1): 013112.
- [27] WEITZ J S, PARK S W, EKSIN C, *et al.* Awareness-driven behavior changes can shift the shape of epidemics away from peaks and toward plateaus, shoulders, and oscillations[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2020, 117(51): 32764-32771.
- [28] YE M, ZINO L, RIZZO A, *et al.* Game-theoretic modeling of collective decision making during epidemics[J]. *Physical Review E*, 2021, 104(2): 024314.
- [29] ASCH S E. Opinions and social pressure[J]. *Scientific American*, 1955, 193(5): 31-35.
- [30] MUCHNIK L, ARAL S, TAYLOR S J. Social influence bias: A randomized experiment[J]. *Science*, 2013, 341(6146): 647-651.
- [31] 丁文杰, 杨文. 一类存在恶意观点的社会网络舆论演化与

- 防御问题研究 [J]. 华东理工大学学报 (自然科学版), 2025, 51(3): 391-399.
- [32] BETSCH C, KORN L, SPRENGHOLZ P, *et al.* Social and behavioral consequences of mask policies during the COVID-19 pandemic[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2020, 117(36): 21851-21853.
- [33] SHE B, LIU J, SUNDARAM S, *et al.* On a networked SIS epidemic model with cooperative and antagonistic opinion dynamics[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 9(3): 1154-1165.
- [34] KHALIL H K, GRIZZLE J W. Nonlinear Systems[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [35] MONDERER D, SHAPLEY L S. Potential games[J]. Games and Economic Behavior, 1996, 14(1): 124-143.
- [36] LIN Y, XUAN W, REN R, *et al.* On a discrete-time network SIS model with opinion dynamics[C]//2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Austin, TX, USA: IEEE, 2021: 2098-2103.

Modeling and Analysis of Coevolution Behavioral Decision-Making and Epidemic Spreading Processes

CHEN Xinyi, ZHU Jingxi, XUE Dong

(Key Laboratory of Smart Manufacturing in Energy Chemical Processes, Ministry of Education, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: Individual behavior critically regulates transmission dynamics during epidemic spread. However, existing coupled models often fail to fully integrate the effects of multiple realistic factors on individual behavioral decision-making or adequately characterize complex states (e.g., epidemic resurgences) in transmission processes. To address these gaps, this study proposes a bidirectional dynamic coupling model of behavioral decision-making and epidemic spread based on a two-layer network. Built on the SIS (Susceptive-Infected-Susceptive) epidemic framework, the model employs scaling factors to modulate epidemic infection and recovery rates via individual behaviors. Meanwhile, integrating social pressure, behavior implementation costs, and perceived disease risks within a game-theoretic framework, dynamic evolutionary rules for individual behavioral decisions are established to achieve bidirectional dynamic coupling between behavioral decision-making and transmission processes. Compared with existing two-layer network models, the proposed model significantly reduces the steady-state level of epidemic spread, enhances epidemic eradication capacity, and better captures complex dynamical behaviors (e.g., oscillations in transmission). For this highly nonlinear coupled system, theoretical stability analysis of multiple equilibria (including disease-free equilibrium and endemic equilibrium) is conducted by combining Lyapunov stability theory with potential game methods, and numerical simulations validate the theoretical findings. Further sensitivity analysis of key parameters reveals the interaction laws between behavioral factors and epidemic spread, providing an important theoretical basis for formulating more effective epidemic intervention strategies.

Key words: epidemic spreading; potential game; coupled propagation; nonlinear systems; multiple-layer networks

(责任编辑: 张欣)