

基于上限分析的挡土墙土压力及敏感性研究

蒋方媛¹, 汪辉洋¹, 王艳^{1*}, 王志远¹, 高延超²

(1. 深圳市勘察研究院有限公司, 深圳 518026; 2. 中国地质调查局成都地质调查中心, 成都 610081)

摘要: 为简便准确计算挡土墙土压力, 采用上限分析方法对挡土墙土压力问题开展分析。假定墙后滑动土楔为三角形形状, 选取更符合实际的适应度函数, 建立基于上限分析的土压力计算公式, 获得了合力作用点距墙底高度的计算方法。通过搜索算法得到滑动土楔的滑裂角, 对均匀荷载条件下的挡土墙土压力展开更直观地求解, 计算结果与库伦土压力的结果对比, 表明了该算法是合理、可靠的。采用正交试验, 对影响土压力的关键参数开展敏感性分析。对于主动土压力及被动土压力情形下, 敏感度大小排序均为填土内摩擦角 > 墙土外摩擦角 > 墙背倾角 > 填土面倾角。在多层土情形下, 根据填土倾角方向划分土层, 讨论了基于上限分析的多层土情形下的挡土墙土压力计算方法。

关键词: 挡土墙土压力; 上限分析; 敏感性分析; 正交试验; 适应度函数

中图分类号: TU432 **文献标识码:** A

STUDY THE EARTH PRESSURE AND SENSITIVITY ON RETAINING WALL BASED ON THE UPPER LIMIT ANALYSIS

JIANG Fang-yuan¹, WANG Hui-yang¹, WANG Yan^{1*}, WANG Zhi-yuan¹, GAO Yan-chao²

(1. Shenzhen Survey and Research Institute Co., Ltd., Shenzhen 518026, China;

2. Chengdu Geological Survey Center, China Geological Survey Bureau, Chengdu 610081, China)

Abstract: To facilitate the accurate computation of earth pressure on retaining walls, an upper bound analysis method was employed to address this issue. Assuming the shape of the sliding soil wedge behind the wall as triangular, a fitness function that more realistically represents actual conditions was selected. This approach established a formula for calculating earth pressure based on upper bound analysis and derived a method to determine the height above the wall base at which the resultant force acts. The angle of sliding failure was ascertained using a search algorithm, allowing for a more intuitive solution to the earth pressure on retaining walls under uniformly distributed load conditions. Comparisons with Coulomb's earth pressure theory validate the reliability and reasonableness of this algorithm. Orthogonal experiments were conducted to perform a sensitivity analysis on key parameters affecting earth pressure. The sensitivity ranking for both active and passive earth pressure scenarios is as follows: internal angle of friction in the fill > external angle of friction between wall and soil > angle of the wall's back inclination > angle of the ground surface of the fill. In cases of multilayered soil, the layers were differentiated based on the direction of the ground surface angle, and the method for calculating retaining wall earth pressure in

multilayered soil scenarios using upper bound analysis was discussed.

Key words: earth pressure on retaining wall; upper limit method; sensitivity analysis; orthogonal test; fitness function

0 引言

挡墙土压力是土力学中经典课题之一^[1]。而基于极限应力法而发展起来的朗肯土压力理论和根据滑动楔体法而建立起来的库伦土压力理论是在实际工程中应用最为广泛的两种计算理论。这两种理论存在物理概念明确、实用的优点,但也存在一些不足,如朗肯理论对于墙背和填土几何条件的严格要求及库伦理论假设散粒体材料不能直接应用于黏性土等。所以,研究一种更加便捷实用且合理的计算方法是十分必要的。

由于经典土压力理论的不足,许多研究人员都对其求解方法展开了研究。邓波等^[2]基于极限平衡分析建立了考虑吸应力效应的非饱和土主动土压力计算方法;陈建功等^[3]采用折线简化摩尔-库仑强度包络线推导了墙背土体开裂深度的计算公式,对土压力变分计算方法进行了改进;曹周阳等^[4]基于双剪统一强度理论,将平面应变条件下的强度准则引入挡土墙土压力计算中,推导了基于双剪统一强度理论的挡土墙主动以及被动土压力计算新解;Asadollah RANJBAR KARKANAKI、欧明喜、彭孝南、李昭颖等^[5-8]将上限法用于挡土墙土压力计算;田原^[9]采用单因素分析法对挡土墙稳定性影响因素的敏感性进行了分析。关于土压力的改进计算方法中,大多趋于复杂化,难以应用于实际,这和经典土压力理论的实用性产生了较大的反差,且多针对单一土层,很少讨论多层土的土压力。

本文通过上限分析方法对土压力进行求解,与以往的分析方法不同的是,本文选取更符合实际的适应度函数,同时考虑了挡墙的主动和被动土压力,应用简单搜索算法对其展开更直观的求解。具体来说,本文设置的适应度函数更加便捷实用,可通过适应度函数是否趋近于 0 来判断所得结果的可靠性。同时讨论了挡墙各点土压力、合力作用点及在多层土情况下的土压力计算方法。

1 基于上限分析的土压力计算方法

基于上限分析对挡土墙土压力问题开展研究,首先给定如下两个假设:(1)土体强度条件满足库伦准则;(2)假设不考虑墙体黏结力功率。对于假设

(1),考虑的是能够运用相关联流动法则^[10];而假设(2)是为使计算简单而设定的。

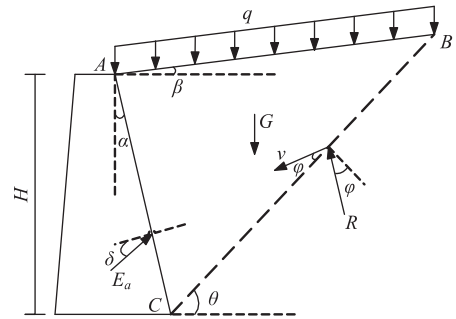


图 1 主动土压力计算简图

图 1 表示的是主动土压力的计算简图,假定墙后滑动土楔为三角形形状,按照三角形机构推导挡墙土压力的计算公式,由相关联流动法则,可知应变速度与该点的滑动线 R 角度垂直,所以功率为 0(由图 1 中几何关系可见)。得到土楔 ABC 重力功率为:

$$Q_G = G \cdot v \cdot \sin(\theta - \varphi) = \frac{\gamma H^2 v}{2} \cdot \frac{\cos(\theta - \alpha) \cos(\alpha - \beta) \sin(\theta - \varphi)}{\cos^2 \alpha \sin(\theta - \beta)} \quad (1)$$

式中, Q_G 表示重力做功; v 表示应变速度; G 表示土楔的重量; α 表示墙背倾角; β 表示填土面倾角; φ 表示填土内摩擦角; θ 表示滑动土楔滑裂角; H 表示挡墙高度; γ 表示土体容重。

均布荷载所产生的附加功率为:

$$Q_q = \frac{qHv \cos(\theta - \alpha) \sin(\theta - \varphi)}{\cos \alpha \sin(\theta - \beta)} \quad (2)$$

式中, Q_q 表示荷载功率; q 表示均布荷载。

土楔 ABC 受到的反力与挡墙主动土压力在数值上是相等的,反力所做功率为:

$$Q_E = E_a \cos(\delta + \alpha) \cdot v \cos(\theta - \varphi) + E_a \sin(\delta + \alpha) \cdot v \sin(\theta - \varphi) \quad (3)$$

式中, Q_E 表示反力功率; δ 表示墙土外摩擦角;主动土压力合力记作 E_a 。

土楔 ABC 内部耗能为:

$$Q_I = cHv \frac{\cos \varphi \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin(\theta - \beta)} \quad (4)$$

式中, Q_I 表示内部耗能; c 表示黏聚力。

应用虚功原理,可以得到(Q_E 做功为负):

$$Q_G + Q_q - Q_E = Q_I \quad (5)$$

将式(1)~(4)代入式(5)并化简,最终得到主动土压力合力计算式为:

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} \cdot K_r + qH \cdot K_q + cH \cdot K_c \quad (6)$$

式中,

$$K_r = \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\theta - \alpha) \sin(\theta - \varphi)}{\cos^2 \alpha \sin(\theta - \beta) \cos(\delta + \alpha + \varphi - \theta)} \quad (7a)$$

$$K_q = \frac{\cos(\theta - \alpha) \sin(\theta - \varphi)}{\cos \alpha \sin(\theta - \beta) \cos(\delta + \alpha + \varphi - \theta)} \quad (7b)$$

$$K_c = \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos \varphi}{\cos \alpha \sin(\beta - \theta) \cos(\delta + \alpha + \varphi - \theta)} \quad (7c)$$

式中, K_r 表示重力主动土压力系数; K_q 表示超载主动土压力系数; K_c 表示黏聚力主动土压力系数; c 表示黏聚力。

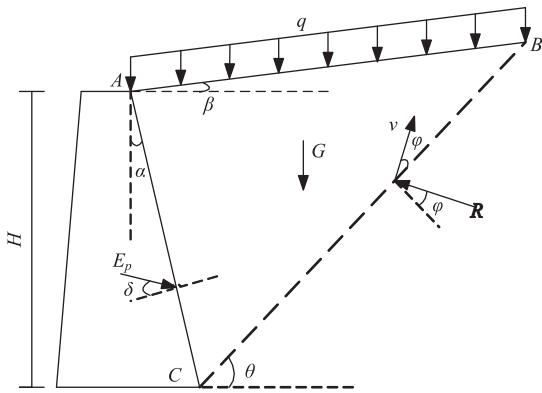


图2 被动土压力计算简图

同理,在被动土压力情形下,根据上述的分析方法,采用上限分析方法对被动土压力合力 E_p (如图2所示)进行推导,得到如下解^[11]:

$$E_p = \frac{\gamma H^2}{2} \cdot K_r + qH \cdot K_q + cH \cdot K_c \quad (8)$$

$$K_r = \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\theta - \alpha) \sin(\theta + \varphi)}{\cos^2 \alpha \sin(\theta - \beta) \cos(\delta - \alpha + \varphi + \theta)} \quad (9a)$$

$$K_q = \frac{\cos(\theta - \alpha) \sin(\theta + \varphi)}{\cos \alpha \sin(\theta - \beta) \cos(\delta - \alpha + \varphi + \theta)} \quad (9b)$$

$$K_c = \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos \varphi}{\cos \alpha \sin(\theta - \beta) \cos(\delta - \alpha + \varphi + \theta)} \quad (9c)$$

2 土压力优化求解

根据极限平衡理论可知,主动土压力应该取不同 θ 情形下计算得到的不同 E_a 中的最大值;被动土压力为 θ 取不同值时按照式(8)求解的所有 E_p 中的最小值^[6]。而由实际情况可知,在主动和被动情形下都存在一个唯一的极值,由函数极值可知,两种情形下对应的 θ 都可以通过令 $\frac{dE_{a(p)}}{d\theta} = 0$ 得到。由于

E_a 、 E_p 的表达式较为复杂,而显然 $\frac{dE_{a(p)}}{d\theta} = 0$ 是一个超越方程,采用解析方法求解困难。因此,在推导 $\frac{dE_{a(p)}}{d\theta}$ 时,通过采用搜索方法对方程进行求解。其中在求解挡墙土压力时,设置搜索的目标函数表达如下:

$$fitness(\theta) = \left| \frac{dE_{a(p)}}{d\theta} \right| \quad (10)$$

需要说明的是,与文献[6]不同,我们选择了式(10)作为适应度函数,而文献[6]直接采用对应的土压力计算式(即式(6))作为目标函数。相比之下,采用这里所建议的目标函数则更便捷实用。这主要是因为选择本文的适应度函数,物理数学意义更加清楚,能够与极值求解的数学理论联系起来;而且本文设置的适应度函数在操作上更为直观,可以通过判断适应度函数是否接近于0,从而判断求解的可靠性。而文献[6]直接采用土压力计算式作为适应度函数的方法,因为事先不知道具体土压力,从而无法判断求解的可靠性。

3 算例分析

通过引入3个不同类型的算例使用本文算法进行计算(无黏性土的主动土压力和被动土压力及黏性土的被动土压力),对比计算结果和其他方法的差异情况,验证算法是否合理。

3.1 算例1(无黏性土主动土压力计算)

已知: $\alpha = 10^\circ$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\varphi = 30^\circ$ 、 $\delta = 15^\circ$ 、 $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ 、 $H = 5 \text{ m}$ 、 $c = 0^\circ$ 、 $q = 0^\circ$,原文通过库伦理论计算得出 $E_a = 89.78 \text{ kN/m}^{[1]}$ 。按照本文的计算方法计算得到主动土压力 $E_a = 89.87 \text{ kN/m}$,滑裂面倾斜角度 $\theta = 60.71^\circ$,计算结果较为接近,说明了文中算法的合理性。其中目标函数(无量纲)的变化如图3所示,在迭代了大约100次以后,目标函数数值趋近于0,说明所得结果是可靠的。

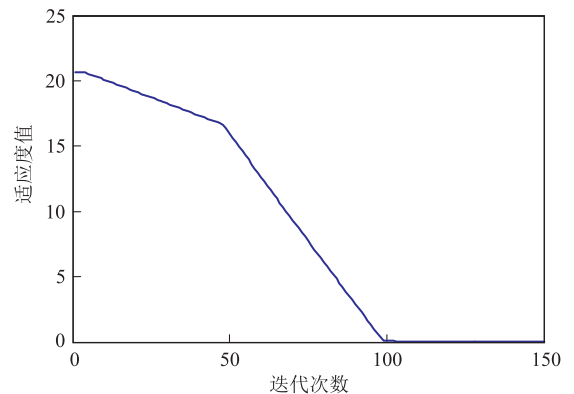


图3 算例1目标函数变化曲线

3.2 算例 2(黏性土主动土压力计算)

已知: $\alpha=10^\circ$ 、 $\beta=15^\circ$ 、 $\varphi=20^\circ$ 、 $\delta=10^\circ$ 、 $\gamma=18.5$ kN/m³、 $H=6$ m、 $c=7$ kPa、 $q=20$ kPa,原文计算得出 $E_a=237.81$ kN/m^[6]。按照本文计算方法得到 $E_a=244.21$ kN/m、 $\theta=48.5^\circ$,计算结果较为接近。其中目标函数的变化如图 4 所示,同样可以通过函数曲线看出求解结果的可靠性。

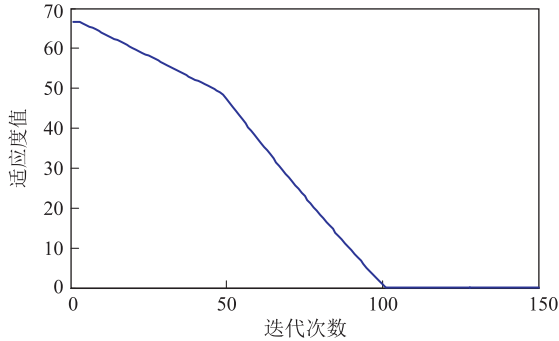


图 4 算例 2 目标函数变化曲线

3.3 算例 3(黏性土被动土压力计算)

已知: $\alpha=15^\circ$ 、 $\beta=10^\circ$ 、 $\varphi=30^\circ$ 、 $\delta=10^\circ$ 、 $\gamma=18$ kN/m³、 $H=10$ m、 $c=10$ kPa、 $q=0$ kPa,原文采用库伦理论计算 $E_p=4\ 348.85$ kN/m^[10]。按照本文计算方法得到 $E_p=4\ 265.9$ kN/m、 $\theta=37.5^\circ$,计算结果较为接近。其中目标函数变化曲线见图 5,目标函数曲线的值趋近于 0,表明了求解结果的合理性。

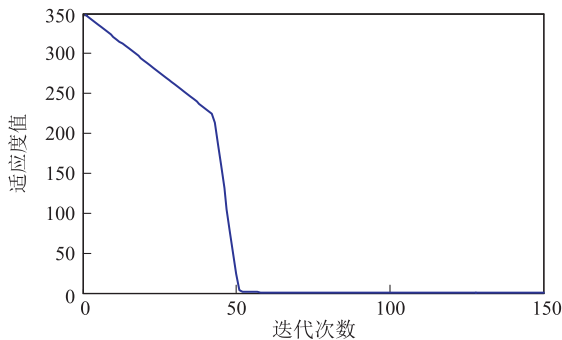


图 5 算例 3 目标函数变化曲线

4 参数的敏感性分析

由以上的分析可知,挡墙主(被)动土压力的计算首先依赖于计算滑动面破裂角 θ ,而 θ 的取值是表征墙后土体滑动面的关键参数。 θ 受到诸多因素的影响, α 增大,破裂角 θ 逐渐增大; β 增大,破裂角 θ 呈非线性减小; φ 增大,破裂角 θ 逐渐增大; δ 增大,破裂角 θ 逐渐减小^[6]。正交试验是一种在多因素系统中进行参数敏感性比较问题上应用最为广泛的数学试验方法之一^[11-12]。在此应用正交试验确定 α 、

β 、 φ 、 δ 此 4 个参数对滑动面破裂角 θ 的敏感程度大小。根据挡土墙支护设计常用墙背倾角 α 及填土的岩土性质特征,试验共设计了 3 组, α 分别取为 5° 、 10° 、 15° ; β 分别取为 5° 、 10° 、 15° ; φ 分别取为 20° 、 30° 、 40° ; δ 分别设置为 5° 、 10° 、 15° 。

根据试验的因素和水平个数安排试验次数,选用正交试验表 $L_9(3^4)$,共计安排 9 组试验,具体试验的各个参数取值见表 1。求解各水平各因素下的试验结果,列于表 1 最后一列。通过极差分析^[12]的方法开展多个因素的敏感分析,所得结果列表 1 最后一行。根据表 1 可知,对于主动土压力而言,敏感度大小排列为 $\varphi > \delta > \alpha > \beta$ 。在同样的因素和水平下,对于被动土压力,同样试验结果见表 2,最终求得影响被动土压力的因素敏感性排序为 $\varphi > \delta > \alpha > \beta$ 。

表 1 正交试验各因素极差值分析表(主动土压力)

试验编号	$\alpha/\text{deg.}$	$\beta/\text{deg.}$	$\delta/\text{deg.}$	$\varphi/\text{deg.}$	$\theta/\text{deg.}$
1	5	5	5	20	54.78
2	5	10	10	30	59.54
3	5	15	15	40	39.00
4	10	5	10	40	39.00
5	10	10	15	20	52.26
6	10	15	5	30	60.78
7	15	5	15	30	63.41
8	15	10	5	40	70.00
9	15	15	10	20	51.60
均值 K1	51.11	52.40	61.86	52.88	
均值 K2	50.68	60.60	50.05	61.24	
均值 K3	61.67	50.46	51.55	49.33	
极差 R	10.99	10.14	11.81	11.91	
敏感性排序	$\varphi > \delta > \alpha > \beta$				

表 2 正交试验各因素极差值分析表(被动土压力)

试验编号	$\alpha/\text{deg.}$	$\beta/\text{deg.}$	$\delta/\text{deg.}$	$\varphi/\text{deg.}$	$\theta/\text{deg.}$
1	5	5	5	20	70.00
2	5	10	10	30	55.00
3	5	15	15	40	41.57
4	10	5	10	40	50.00
5	10	10	15	20	65.00
6	10	15	5	30	65.00
7	15	5	15	30	60.00
8	15	10	5	40	60.00
9	15	15	10	20	70.00
均值 K1	55.52	60.00	65.00	68.33	
均值 K2	60.00	60.00	58.33	60.00	
均值 K3	63.33	58.86	55.52	50.52	
极差 R	7.81	1.14	9.48	17.81	
敏感性排序	$\varphi > \delta > \alpha > \beta$				

5 讨论

5.1 土压力分布及其合力作用点的求解

以主动土压力为例说明:在基于上限分析推导

土压力时,是将土压力作为一个合力进而得到式(6)的,而关于合力的作用点并未获得。而且在实际工程应用中,通常需要清楚土压力分布情况。文献[12]指出,求解土压力合力作用点问题是求解一个包括墙背倾角、填土的内摩擦角、填土坡角、外摩擦角等因素的复杂函数方程,求解该函数方程要经过复杂的数学运算。因此,这里通过借鉴朗肯理论^[1]的求解方法,近似给出合力作用点的计算方法以及土压力分布的计算。分析挡土墙受到的土压力主要来自3个部分:土体自重应力、土体黏聚力以及外荷载。假定土体自重应力为三角形分布,黏聚力和外荷载假定为矩形分布。在这里为了求解方便将外荷载引起的土压力假定为矩形分布,这在挡土墙高度不大时是允许的。示意图见图6。

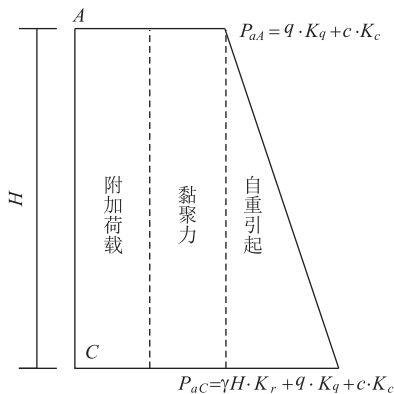


图6 土压力组成的示意图

则图6中C点的土压力可以表示为:

$$P_{aC} = \gamma H \cdot K_r + q \cdot K_q + c \cdot K_c \quad (11)$$

同理A点的土压力表示为:

$$P_{aA} = q \cdot K_q + c \cdot K_c \quad (12)$$

根据土压力分布组合,可以求得合力作用点距墙底面高度近似为:

$$H_0 = \frac{\frac{\gamma H^3}{6} \cdot K_r + \frac{1}{2} q H^2 \cdot K_q + \frac{1}{2} c H^2 \cdot K_c}{E_a} \quad (13)$$

5.2 多层土情形下土压力分析

分析多层土情形下挡墙土压力计算,下面仍然以主动土压力为例说明基于上限分析求解多层土情形下挡土墙土压力的方法。考虑土坡均布荷载 q 为0的二层土坡(图7),假设第一层土厚度为 H_1 ,第二层土厚度为 H_2 。为了便于求解,假设一、二层土分隔线 BE 与坡面 AO 平行。

按照前述的土压力分析方法可知,第一层层顶处(即A点): $P_{aA} = c \cdot K_c$;第一层层底处(即B点上): $P_{aB} = \gamma H_1 \cdot K_r + c \cdot K_c$ 。在分析第二层挡墙土

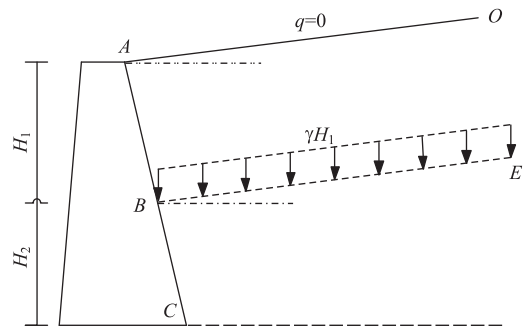


图7 多层土情形下的挡墙土压力计算简图

压力时,把第一层土自重 γH_1 (当 $q \neq 0$ 时,取值 $q + \gamma H_1$)视为均布荷载,即在式(6)中,令 $q = \gamma H_1$,则第二层的土压力问题又转化为一个极值搜索问题。通过搜索算法得到破裂角 θ 之后,同理,可以得到土压力的分布以及合力作用点。在层数更多的情形下依此类推。相比于多层土情形下采用库伦土压力理论对土压力进行求解,本文的求解方法更为直接,无需进行当量土厚换算^[1],而直接把原有问题转化为多个极值搜索过程,适用范围更广。

6 结论

(1) 假定墙后滑动土楔为三角形形状,基于上限分析,建立挡土墙合力 E_a 和 E_p 的计算式。并通过搜索算法对 $\frac{dE_{a(p)}}{d\theta} = 0$ 进行参数求解,得到滑动土楔的滑裂角 θ ,然后代入土压力计算式中,可以获取土压力的合力值。

(2) 采用正交试验,对影响挡墙滑动面角度 θ 的关键参数开展敏感性分析。对于主动土压力及被动土压力情形下,敏感度大小排序均为填土内摩擦角 $>$ 墙土外摩擦角 $>$ 墙背倾角 $>$ 填土面倾角。

(3) 假定挡墙土压力中各因子的分布形式,获得了基于上限分析的土压力及其合力作用点距墙底高度的计算方法。在多层土情形下,根据填土倾角方向划分土层,讨论了基于上限分析的多层土情形下的挡土墙土压力计算方法。

参考文献

- [1] 袁聚云,钱建国,张宏鸣,等. 土质学与土力学[M]. 北京:人民交通出版社,2009.
- [2] 邓波,杨明辉,王东星,等. 刚性挡墙后非饱和土破坏模式及主动土压力计算[J]. 岩土力学,2022,43(9):2371-2382.
- [3] 陈建功,杨扬,陈彦含,等. 考虑抗拉强度的黏性填土挡土墙主动土压力计算[J]. 岩土力学,2020,41(6):1829-1835+1844.