

Gauss-Weierstrass 算子线性组合在 Orlicz 空间的 加 Jacobi 权逼近

官心果¹, 钟宇^{1,2*}, 余泉¹, 赵静¹, 李东升¹, 徐妮¹

(1 黔南民族师范学院数学与统计学院, 贵州 都匀 558000; 2 黔南民族师范学院预科教育学院, 贵州 都匀 558000)

摘要: Gauss-Weierstrass 算子是逼近论中非常重要的逼近工具, 也是调和分析研究的主要内容。在实际应用中, 利用 Gauss-Weierstrass 算子可以实现图像的低通滤波, 从而达到图像平滑的效果。国内外学者主要研究了 Gauss-Weierstrass 算子在 L_p 空间, Besov 空间中的讨论。关于 Gauss-Weierstrass 算子线性组合在 Orlicz 空间的讨论是一个难题, 研究成果较少。本文主要研究了加 Jacobi 权 Gauss-Weierstrass 算子的线性组合, 利用 Hölder 不等式, Jensen 不等式, Hardy-Littlewood 极大函数, K -泛函推导出该算子线性组合的 Jacobi 权函数在 Orlicz 空间中的逼近定理。

关键词: Jacobi 权; Gauss-Weierstrass 算子; K -泛函; Orlicz 空间

中图分类号: O174.41

文献标志码: A

The linear combination of Gauss-Weierstrass operators in Orlicz space Jacobi weighted approximation

GUAN Xinguo¹, ZHONG Yu^{1,2*}, YU Quan¹, ZHAO Jing¹, LI Dongsheng¹, XU Ni¹

(1 School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun, Guizhou 558000, China;

2 School of Preparatory Education, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun, Guizhou 558000, China)

Abstract: Gauss-Weierstrass operator is a very important approximation tool in approximation theory, and it is also the main content of harmonic analysis. In practical applications, the Gauss-Weierstrass operator can be used to realize the low-pass filtering of the image, so as to achieve the effect of image smoothing. Scholars at home and abroad mainly study the discussion of Gauss-Weierstrass operator in L_p space and Besov space. The discussion of the linear combination of Gauss-Weierstrass operators in Orlicz space is a difficult problem, and there are few research results. In this paper, we mainly study the linear combination of Gauss-Weierstrass operators with Jacobi weights. By using Hölder inequality, Jensen inequality, Hardy-Littlewood maximal function and K -functional, we derive the approximation theorem of Jacobi weight function of the linear combination of Gauss-Weierstrass operators in Orlicz space.

Key words: Jacobi weight; Gauss-Weierstrass operators; K -functional; Orlicz space

1 引言

Gauss-Weierstrass 算子定义为

$$L_n(f, x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{n(u-x)^2}{2}} f(u) du,$$

$$\text{式中 } f \in C_{\mathbb{R}} \cap L_{+\infty}, W(n, x, u) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{n(u-x)^2}{2}}.$$

关于该算子的研究已有许多的结果^[1-4]。

为了提高算子的逼近阶, 采用方法是在该算子

的基础上加线性组合(加权)^[5]。目前, 关于 Gauss-Weierstrass 算子在 Orlicz 空间的研究, 仅有文献[1]、[6]、[7]涉及。受文献[1]的启示, 本文研究了 Gauss-Weierstrass 算子线性组合 Jacobi 权函数在 Orlicz 空间中的逼近情况, 并得到相关的逼近定理。

1.1 Orlicz 空间中的相关概念^[8]

定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实值函数 $M(u)$ 称为 N 函数(或称之为 Young 函数)。 $N(v) = \max_{u \geq 0} \{u | v - M(u)\}$, $u(x), v(x)$ 分别是定义在 \mathbb{R}^n 中的有界闭集

收稿日期: 2023-03-15

基金项目: 贵州省教育厅高等学校科学研究项目(青年项目)(黔教技[2022]378号, [2022]380号, [2022]386号)

作者简介: 官心果(1993—), 男, 讲师, 从事函数逼近论及其应用方向的研究。

* 通信作者: 钟宇(1995—), 女, 讲师, 从事函数逼近论及其应用方向的研究, e-mail: 394839064@qq.com。

上,二者皆是 Lebesgue 可测。

定义 $\rho(u;M) = \int_C M(u(x))dx$ 是 $u(x)$ 关于 $M(u)$ 的模。

$$L_M^* = \{u(x) \mid \exists k > 0, \rho(ku;M) < \infty\}.$$

Orlicz 空间中所定义的 M 范数如下:

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v,N) \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)dx \right|.$$

Orlicz 空间中, Luxemburg 范数定义为

$$\|u\|_{(M)} = \inf_{\alpha > 0} \left\{ \alpha > 0 \mid \int_{-\infty}^{+\infty} M\left(\frac{u(x)}{\alpha}\right) dx \leq 1 \right\},$$

且有式子: $\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M \leq 2\|u\|_{(M)}$ 成立。

Orlicz 空间中的 Hölder 不等式为

$$\left| \int_R u(x)v(x)dx \right| < \|u\|_M \|v\|_{(N)}.$$

Jacobi 权: $w_k = \prod_{i=1}^k |x - x_i|^{\alpha_i}$, 其中 $0 \leq \alpha_i < 1, -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_k < +\infty$ 。

Jacobi 权中所定义的 K -泛函为

$$K_{w_k}(f,t)_M = \inf_{g \in D} \left\{ \|w_k(f-g)\|_M + t \|w_k g''\|_M \right\}.$$

K -泛函中的 D 为加权 Orlicz-Sobolev 空间,

$D = \{g \mid w_k g \in L_M^*, w_k g' \in A.C.loc, w_k g'' \in L_M^*\}$ ($A.C.loc$: 局部绝对连续函数空间)。

用 $\omega_{w_k}^2(f;t)_M$ 表示 L_M^* 中 f 的二阶光滑模

$$\omega_{w_k}^2(f;t)_M = \sup_{0 < h \leq t} \|w_k \Delta_h^2(f,x)\|_M,$$

$$\Delta_h^2(f,x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h).$$

关于 Gauss-Weierstrass 算子的线性组合^[9-11] 定义为

$$L_{n,r}(f;x) = \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} f(u) du,$$

$r > 1, f \in L_M^*$ 。

式中的 $n_i \in N$ 且 n_i, C_i 满足如下条件:

(1) $n = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{r-1} \leq kn$ (k 为常数);

(2) $\sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| < C$ (C 为常数);

(3) $\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) = 1$;

(4) $\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^{-p} = 0, p = 1, 2, \dots, r-1$ 。

1.2 主要结论

文中 C 为正常数,在不同位置所代表的数不一样。

定理 1 设 $w_k f \in L_M^*(R)$, 则有

$$\|w_k L_{n,r}''(f)\|_M \leq Cn \|f\|_M.$$

定理 2 设 $g \in D$, 则有

$$\|w_k L_{n,r}''(g)\|_M \leq C \|w_k g''\|_M.$$

定理 3 设 $w_k f \in L_M^*(R)$, 则有

$$\|w_k(L_{n,r}(f;x) - f)\|_M \leq CK_{w_k}\left(f, \frac{1}{n}\right)_M \leq C\omega_{w_k}^2\left(f; \frac{1}{n}\right)_M.$$

2 相关引理

引理 1^[6] $A_m(n,x) = n^m \int_{-\infty}^{+\infty} W(n,x,u)(u-x)^m du$, 则

$$A_{m+1}(n,x) = nA_m(n,x) + \frac{d}{dx}A_m(n,x),$$

$$A_0(n,x) = 1, A_1(n,x) = 0,$$

$$A_{2r+1}(n,x) = 0, A_{2r}(n,x) = (2r-1)!!n^r.$$

引理 2^[9] 对 $\forall r \geq 0$, 存在常数 C 使得

$$I_r(w_k,n,x) = n^r \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{n(u-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(u)} |u-x|^{2r} du \leq C.$$

引理 3 设 $w_k f \in L_M^*(R)$, 则有

$$\|w_k L_{n,r}(f)\|_M \leq C \|f\|_M.$$

证明 由于

$$\|w_k L_{n,r}(f;x)\| = \left| w_k(x) \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} f(u) du \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} w_k(u) \frac{w_k(x)}{w_k(u)} f(u) du \right|,$$

根据 Orlicz 空间中的 Hölder 不等式及 $\sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| < C$ 可得

$$\left| \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} w_k(u) \frac{w_k(x)}{w_k(u)} f(u) du \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| \|w_k f\|_M \left\| \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \right\|_N \leq$$

$$C \|w_k f\|_M \left\| \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \right\|_N,$$

注意到

$$\left\| \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \right\|_N =$$

$$\sup_{\rho(u,M) \leq 1} \left| \int_R \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} u(x) dx \right|,$$

以及引理 2 中的 $r = 0, \rho(u,M) \leq 1$ 时, $u(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上几乎处处有界, 则有

$$\sup_{\rho(u, M) \leq 1} \left| \int_R \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} u(x) dx \right| \leq C_0.$$

由 $\rho(v, N) \leq 1$ 时, $v(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上几乎处处有界, 可得

$$\|w_k L_{n,r}(f; x)\|_M = \sup_{\rho(v, N) \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w_k(x) \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} f(u) v(x) du dx \right| \leq C \|w_k f\|_M,$$

引理 3 证毕。

引理 4^[1] 设 $\theta_{g'}$ 为 $g'(x)$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数, 则

$$\theta_{g'} = \sup_t \frac{1}{|t-x|} \int_x^t |g'(v)| dv, \|\theta_{g'}(x)\|_M \leq C \|g'\|_M.$$

引理 5 设 $g \in D$, 则

$$\|w_k L_{n,r}((g) - g)\|_M \leq C \frac{1}{n} \|w_k g''\|_M.$$

证明 由泰勒展开式,

$$n = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{r-1} \leq kn (k \text{ 为常数}),$$

引理 4 有

$$g(u) - g(x) = g'(x)(u-x) + \int_x^u g''(v)(u-v) dv, (x < v < u),$$

从而得

$$\begin{aligned} |w_k L_{n,r}((g) - g)| &= |w_k(x) L_{n,r}((g; x) - g(x))| = \\ &= |w_k(x) \left[\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} g(x) du + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} g'(x)(u-x) du + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} \left(\int_x^u g''(v)(u-v) dv - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. g(x) \right) du \right]| \leq \theta_{w_k g''}(x) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^2| du \leq \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n_i} \theta_{w_k g''}(x) \leq \frac{1}{n} \theta_{w_k g''}(x),$$

于是

$$\|w_k L_{n,r}((g) - g)\|_M \leq C \frac{1}{n} \|w_k g''\|_M,$$

引理 5 证毕。

3 主要结论的证明

定理 1 设 $w_k f \in L_M^*(R)$, 则

$$\|w_k L''_{n,r}(f)\|_M \leq Cn \|f\|_M.$$

证明 经计算得

$$\frac{\partial L_{n,r}(f; x)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i L_{n_i}(f; x)(u-x),$$

$$\frac{\partial^2 L_{n,r}(f; x)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^2 L_{n_i}(f; x)(u-x)^2 -$$

$$n_i \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) L_{n_i}(f; x),$$

所以有

$$|w_k L''_{n,r}(f)| = |w_k(x) \left[\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^2 \times \right.$$

$$\left. L_{n_i}(f; x)(u-x)^2 - n_i \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) L_{n_i}(f; x) \right]| =$$

$$|w_k(x) \left[\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} f(u) \times \right.$$

$$\left. (u-x)^2 du - n_i \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} f(u) du \right]| =$$

$$\left| \left[\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} w_k(u) \frac{w_k(x)}{w_k(u)} \times \right. \right.$$

$$\left. f(u)(u-x)^2 du - n_i \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} w_k(u) \frac{w_k(x)}{w_k(u)} f(u) du \right]| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| \|w_k f\|_M \times$$

$$\left[\left\| n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} (\cdot-x)^2 \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \right\|_N + \left\| n_i \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \right\|_N \right],$$

注意到

$$\left\| n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} (\cdot-x)^2 \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \right\|_N =$$

$$\sup_{\rho(\phi, M) \leq 1} \left| \int_R n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} e^{-\frac{n_i(\cdot-x)^2}{2}} \frac{w_k(x)}{w_k(\cdot)} \phi(x) dx \right|,$$

以及引理 2、引理 3 联立可得

$$\|w_k L''_{n,r}(f)\|_M \leq Cn \|f\|_M,$$

定理 1 证毕。

定理 2 设 $g \in D$, 则

$$\|w_k L''_{n,r}(g)\|_M \leq C \|w_k g''\|_M.$$

证明 因泰勒展开式得

$$g(u) = g(x) + g'(x)(u-x) + \int_x^u g''(v)(u-v) dv, (x < v < u).$$

所以有

$$|w_k L''_{n,r}(g)| = |w_k(x) \left[\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^2 - n_i \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} \right] \times (g(x) + g'(x)(u-x) + \int_x^u g''(v)(u-v)dv) du| \quad (1)$$

根据引理 1 得

$$\sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} g'(x)(u-x) du - n_i \sum_{i=1}^{r-1} C_i(n) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} g(x) du = 0。$$

结合引理 1、式(1)得

$$|w_k L''_{n,r}(g)| = |w_k(x) L''_{n,r}(g)| \leq \sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| |n_i^2 w_k(x) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} \times (u-x)^2 \int_x^u g''(v)(u-v)dv du| + \sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| \times |n_i w_k(x) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} \times \int_x^u g''(v)(u-v)dv du| \quad (2)$$

又由引理 1、引理 4、条件(2)得

$$\sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| |n_i^2 w_k(x) \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^2 \times \int_x^u g''(v)(u-v)dv du| + \sum_{i=1}^{r-1} |C_i(n)| \times |n_i w_k(x) \times \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} \int_x^u g''(v)(u-v)dv du| \leq C [n_i^2 \times \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^4 \theta_{w_k g''}(x)| du + n_i \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^2 \theta_{w_k g''}(x)| du],$$

注意到

$$n = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{r-1} \leq kn (k \text{ 为常数}),$$

$$n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^4 du = \frac{1}{n_i} n_i^4 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^4 du = 3 \leq C,$$

$$\frac{1}{n_i} n_i^2 \sqrt{\frac{n_i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_i(u-x)^2}{2}} (u-x)^2 du = 1 \leq C,$$

故有

$$\|w_k L''_{n,r}(g)\|_M \leq C \|w_k g''\|_M。$$

定理 2 证毕。

定理 3 设 $w_k f \in L_M^*(R)$, 则有

$$\|w_k(L_{n,r}(f;x) - f)\|_M \leq CK_{w_k} \left(f, \frac{1}{n}\right)_M \leq C\omega_{w_k}^2 \left(f; \frac{1}{n}\right)_M。$$

证明 $\|w_k(L_{n,r}(f) - f)\|_M = \|w_k(L_{n,r}(f - g + g) - f - g + g)\|_M \leq \|w_k(L_{n,r}(f - g))\|_M + \|w_k(L_{n,r}(g) - g)\|_M + \|w_k(f - g)\|_M,$

根据引理 3、引理 5、Jacobi 权中定义的 K -泛函得

$$\|w_k(L_{n,r}(f - g))\|_M + \|w_k(L_{n,r}(g) - g)\|_M + \|w_k(f - g)\|_M \leq C \|w_k(f - g)\|_M + \|w_k(L_{n,r}(g) - g)\|_M + \|w_k(f - g)\|_M = (C + 1) \|w_k(f - g)\|_M + \|w_k(L_{n,r}(g) - g)\|_M \leq C \|w_k(f - g)\|_M + C \frac{1}{n} \|w_k \times g''\|_M \leq CK_{w_k} \left(f, \frac{1}{n}\right)_M。$$

由光滑模与 K -泛函的等价性^[12], 则有

$$CK_{w_k} \left(f, \frac{1}{n}\right)_M \leq C\omega_{w_k}^2 \left(f; \frac{1}{n}\right)_M,$$

定理 3 证毕。

参考文献 (References)

[1] 宋文华,吴嘎日迪. Gauss-Weierstrass 算子在 Orlicz 空间内的加 Jacobi 权逼近[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2022,51(1):96-99.
SONG W H, WU G R D. Weighted-approximation by Gauss-Weierstrass operators in Orlicz spaces[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition), 2022,51(1): 96-99.

[2] 钟宇,官心果. Gauss-Weierstrass 算子在 Ba 空间中的逼近阶[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4347-4351.
ZHONG Y, GUAN X G. The approximation order of Gauss-Weierstrass operator in Ba space[J]. Advances in Applied Mathematics, 2021,10(12): 4347-4351.

[3] 官心果,钟宇,何翠玲,等. Besov 空间中 Gauss-Weierstrass 算子的正逆定理[J]. 西南大学学报(自然科学版),2020,42(10):109-115.
GUAN X G, ZHONG Y, HE C L, et al. Direct and inverse theorems of Gauss-Weierstrass operator in Besov space[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2020,42(10):109-115.

[4] 官心果,何翠玲,钟宇,等. 修正二元 Gauss-Weierstrass 算子在 $L_p(R_+^2)$ 空间中的逼近[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2019,28(6):571-575.
GUAN X G, HE C L, ZHONG Y, et al. Approximation

- of the modified binary Gauss-Weierstrass operator in $L_p(R_+^2)$ [J]. Journal of Yunnan Minzu University (Natural Sciences Edition), 2019, 28(6): 571-575.
- [5] 王军辉, 杨柱元, 雷靖. 关于 Gauss-Weierstrass 算子的加权逼近[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2012, 21(3): 188-192.
- WANG J H, YANG Z Y, LEI J. Weighted approximation by Gauss-Weierstrass operators in uniform approximation[J]. Journal of Yunnan Minzu University (Natural Sciences Edition), 2012, 21(3): 188-192.
- [6] 官心果, 钟宇, 何翠玲. Gauss-Weierstrass 算子线性组合在 Orlicz 空间中的逼近[J]. 黔南民族师范学院学报, 2020, 40(4): 1-4.
- GUAN X G, ZHONG Y, HE C L. The correlation theorem on approximation of the linear combination of Gauss-Weierstrass operators in Orlicz spaces[J]. Journal of Qiannan Normal University for Nationalities, 2020, 40(4): 1-4.
- [7] 王晓丽, 吴嘎日迪. Orlicz 空间中 Gauss-Weierstrass 算子逼近[J]. 应用数学, 2015, 28(2): 414-419.
- WANG X L, WU G R D. Approximation by Gauss-Weierstrass operators in Orlicz spaces[J]. Mathematica Applicata, 2015, 28(2): 414-419.
- [8] 吴从焮, 王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.
- [9] 赵德钧. 一类多元 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的加权逼近[J]. 绍兴文理学院学报(自然科学版), 2002, 22(3): 9-14.
- ZHAO D J. Weighted approximation by a class of linear combinations of multidimensional Gauss-Weierstrass operators in uniform approximation[J]. Journal of Shaoxing University (Natural Science), 2002, 22(3): 9-14.
- [10] 赵德钧. 一类多元 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的加权 L_p -逼近[J]. 数学杂志, 2006, 26(3): 335-342.
- ZHAO D J. Weighted L_p -approximation by a class of combinations of multidimensional Gauss-Weierstrass operators[J]. Journal of Mathematics, 2006, 26(3): 335-342.
- [11] 赵德钧. Gauss-Weierstrass 算子线性组合的加权 L_p -逼近[J]. 宁波大学学报(理工版), 2004, 17(4): 419-423.
- ZHAO D J. Weighted L_p -approximation by a class of combinations of Gauss-Weierstrass operators[J]. Journal of Ningbo University (Natural Science & Engineering Edition), 2004, 17(4): 419-423.
- [12] DITZIAN Z, TOTIK V. Moduli of smoothness[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

(责任编辑: 郭芸婕)