

doi:10.16112/j.cnki.53-1223/n.2025.06.202311240001

引用格式:唐玉萍,付英姿,丁焯青.基于变分贝叶斯框架下的动态网络演化研究[J].昆明理工大学学报(自然科学版),2026,51(1):223-230.

Citation:TANG Yuping,FU Yingzi,DING Yeqing. Dynamic Network Evolution Based on Variational Bayesian Framework[J]. Journal of Kunming University of Science and Technology (Natural Science),2026,51(1):223-230.

基于变分贝叶斯框架下的动态网络演化研究

唐玉萍¹,付英姿^{1,2*},丁焯青¹

(1. 昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650500; 2. 昆明理工大学 应用统计学研究中心,云南 昆明 650500)

摘要:为探究不同贝叶斯方法对动态社交网络模型拟合效果及收敛效率的影响,有效刻画网络随时间演变的趋势和特征,重点考虑了动态社交网络的建模问题.首先通过假设潜在位置服从马尔科夫过程,结合潜在空间建模方法,将动态有向数据嵌入到低维欧氏空间;然后在参数估计方面,采用了变分贝叶斯方法对潜在位置和模型参数进行后验推断;最后以一组真实的友谊网络数据为例进行模型构建及方法验证,在考虑节点属性的基础上揭示了参与者间友谊关系的生成和演变路径.实验结果表明,变分贝叶斯方法收敛速度更快、计算复杂度更低,更适用于处理复杂动态网络.

关键词:动态社交网络;潜在空间模型;变分贝叶斯;坐标上升变分算法

中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A **文章编号:**1007-855X(2026)01-0223-08

Dynamic Network Evolution Based on Variational Bayesian Framework

TANG Yuping¹,FU Yingzi^{1,2*},DING Yeqing¹

(1. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China;

2. Applied Statistics Research Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: In order to investigate the impact of different Bayesian methods on the model fitting performance and convergence efficiency of dynamic social networks, and to effectively characterize the trends and features of network evolution over time, this paper focuses on the modeling of dynamic social networks. By assuming that latent positions follow a Markov process and combining latent space modeling methods, dynamic directed data are embedded into a low-dimensional Euclidean space. For parameter estimation, a variational Bayesian method is used for posterior inference of latent positions and model parameters. Finally, a real friendship network dataset is used as an example for model construction and method validation. Considering node attributes, the generation and evolution pathways of friendships among participants are revealed. Experimental results show that the variational Bayesian method converges faster, has lower computational complexity, and is more suitable for handling complex dynamic networks.

Keywords: dynamic social network; latent space model; variational Bayesian; coordinate ascent variational inference

0 引言

近年来,社交网络受到人们的极大关注,其通常由参与者及其连边构成,连边衡量了每一对有序参与者之间的关系.发展至今,其相关研究已被推广至合作网络^[1]、蛋白质结构网络^[2]、经济网络^[3]等多个领域,有着巨大的应用推广前景.

收稿日期:2023-11-24. 基金项目:国家自然科学基金项目(11561035).

作者简介:唐玉萍(1998-),女,硕士研究生.主要研究方向:应用统计. E-mail:2213971143@qq.com

通信作者:付英姿(1980-),女,博士,教授.主要研究方向:应用统计. E-mail:1185546957@qq.com

社交网络分析中的一大关键问题是网络结构的捕捉和刻画. 潜在空间模型(Latent Space Model, LSM) 作为一类经典的网络建模方法, 其基本思想是为网络中的节点寻找一个潜在的向量空间, 且该潜在空间能够体现原网络的结构、特征以及其他信息. 该模型最早由 Hoff 等^[4]提出, 采用了马尔科夫链蒙特卡罗(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)方法对模型参数进行后验推断. 发展至今, 潜在空间模型已被成功地应用于超图网络、多层网络等复杂网络建模中^[5], 其相关应用场景包括社交媒体上观察到的不同关系^[6]、青少年友谊和生活方式研究^[7]、社会科学^[8]和商业营销^[9]等.

从已有的研究成果来看, 上述研究大都局限在静态网络方面, 然而在现实生活中, 网络通常是随时间变化的, 例如社交网络中新好友的加入、新关系的产生均会导致新节点和连边的出现, 以及旧节点和连边的消亡. 早期 Robinson 等^[10]引入了一类新的潜在过程模型以刻画网络结构随时间的变化趋势. 在这一背景下, 动态潜在空间建模方法孕育而生, 其代表性工作当属 2005 年 Sarkar 等^[11]将 Hoff 等^[4]提出的潜在空间模型推广至动态网络, 并提出了一种广义多维尺度(Generalized Multidimensional Scaling, GMDS)方法来寻找离散时间点上的初始潜在参与者位置, 该模型解释了网络结构随时间推移的变化情况; 随后, Sewell 等^[12]改进了动态潜在空间模型, 使其能够更好地处理有向或无向边, 并将其应用于有向排序动态网络, 实现了参与者进行排名^[13]; 除此以外, 随机块模型(Stochastic Block Model, SBM)的动态版本^[14]、时间指数随机图模型(Temporal Exponential Random Graph Model, TERGM)^[15-16]、社会网络信息扩散模型^[17]等也在一定程度上丰富了动态社交网络分析内涵.

与静态网络相比, 动态社交网络分析^[18]涉及到大量计算. 经典的方法通常采用 MCMC 方法来实施模型的后验推断, 然而该方法存在着计算量大、收敛速度慢等不足. 为了解决这一难题, 尽管 Sewell 等^[12]采用了近似似然的 MCMC 方法来减少计算成本, 但该方法在处理大型网络时仍有难度. 随后, Sewell 等^[19]针对动态网络中的投影模型提出了一种变分贝叶斯方法, 用来估计模型的参数、捕捉数据的时变.

受上述工作启发, 本文重点考虑了动态社交网络的建模问题, 通过假设潜在位置服从马尔科夫过程, 结合经典的潜在空间建模方法, 将动态有向数据成功嵌入到低维欧式空间中. 在参数估计方面, 本文采用了变分贝叶斯方法对潜在位置和模型参数进行后验推断. 即基于平均场假设理论, 推导出模型参数的变分密度以及证据下界(Evidence Lower Bound, ELBO)的形式, 结合坐标上升变分算法(Coordinate Ascent Variational Inference, CAVI)对模型的证据下界持续进行更新, 当证据下界达到最大时, 得到参数的最优近似后验. 在应用中, 本方法不仅能够深入展示社交网络结构随时间的演变过程, 同时还具有更高的计算效率和更低的计算负担, 尤其适用于大型动态社交网络分析.

1 理论基础

1.1 社交网络

社交网络普遍存在于现实生活中, 如电子邮件网络、基因蛋白质互作网络等, 其形式可以用图 $G = (V, E)$ 来表示, 其中 V 为网络中各节点的集合, E 为边的集合. 此外, 在社交网络研究中, 邻接矩阵 $Y_N = (y_{ij})_{n \times n}$ 也是一个重要概念, 是社交网络除图之外的又一表示形式^[20]. 一个常用的做法是对邻接矩阵中的元素 y_{ij} 考虑二进制, 即若参与者 i 与参与者 j 之间存在关系, 则有 $y_{ij} = 1$, 否则为 0.

1.2 潜在空间模型

在社交网络分析中, 潜在空间模型是研究网络结构的一类经典模型, 该模型最早由 Hoff 等^[4]在 2002 年提出, 其主要思想是为网络中的节点寻找一个潜在的向量空间, 该潜在空间能够体现原网络的结构、特征或其他信息. 经典的潜在空间模型通常采用条件独立的建模方法, 即对给定的两个参与者在潜在空间中的位置 z_i 和 z_j 考虑如下模型:

$$P(Y|Z, X, \theta) = \prod_{i \neq j} P(y_{i,j} | z_i, z_j, x_{i,j}, \theta) \quad (1)$$

式中: $x_{i,j}$ 表示观测到的特征; z_i 表示第 i 个参与者的潜在位置, 是一个未知的量; θ 为模型的待估参数. 潜在空间模型是一种非常灵活的模型, 其具有多种推广形式, 具体可参考文献[21-22].

1.3 动态潜在空间模型

本文将经典的潜在空间模型推广至动态的情形下, 并称其为动态潜在空间模型. 动态潜在空间模型的

基本思想是将参与者潜在位置的前后相依关系视为状态空间,并采用马尔可夫过程对其进行刻画,以揭示网络结构的动态演变过程。

令图 $G_t = (N, \{\mathcal{E}_t, t \in T\})$ 表示动态社交网络,其中 N 是节点集合, \mathcal{E}_t 是时间 $t \in T = \{1, 2, \dots, T\}$ 内所有边的集合. 类似的,令 $Y_t = y_{ijt} (n \times n)$ 为 t 时刻观察到的邻接矩阵, z_{it} 表示第 i 个参与者在时刻 t 下的潜在位置. 不失一般性,假设潜在位置构成的随机过程满足马尔可夫性,即 t 时刻的状态只与 $t-1$ 时刻的状态有关,即:

$$\pi(\mathbf{Z}_t | \mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i=1}^n MVN_p(z_{it} | z_{i(t-1)}, \sigma^2 \mathbf{I}_p) \quad (2)$$

其中:考虑初始位置 $\pi(\mathbf{Z}_1 | \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i=1}^n MVN(z_{i1} | 0, \tau^2 \mathbf{I}_p)$; $MVN_p(z | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 表示均值为 $\boldsymbol{\mu}$, 协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的多元正态分布; \mathbf{I}_p 为 $p \times p$ 单位矩阵; \mathbf{Z}_t 为 t 时刻所有参与者的潜在位置,是一个 $n \times p$ 矩阵; τ^2 和 σ^2 为未知参数; $\boldsymbol{\psi}$ 是一个参数向量.

根据潜在空间模型的一般假设,考虑两参与者之间的连接概率是条件独立的,且服从如下分布:

$$P(Y_t | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i \neq j} P(y_{ijt} = 1 | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\psi})^{y_{ijt}} \cdot P(y_{ijt} = 0 | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\psi})^{1-y_{ijt}} = \prod_{i \neq j} \frac{\exp(y_{ijt} \eta_{ijt})}{1 + \exp(\eta_{ijt})} \quad (3)$$

其中:上述概率模型连接函数定义为 $\eta_{ijt} = \log\left(\frac{P(y_{ijt} = 1 | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\psi})}{P(y_{ijt} = 0 | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\psi})}\right) = \beta_{\text{IN}} \left(1 - \frac{d_{ijt}}{r_j}\right) + \beta_{\text{OUT}} \left(1 - \frac{d_{ijt}}{r_i}\right)$; β_{IN} 表示入度效应,即参与者受欢迎程度参数; β_{OUT} 表示出度效应,即参与者社交影响力参数; r_i 表示第 i 个参与者的社交范围,其约束条件为 $\sum_{i=1}^n r_i = 1$. 本文考虑距离函数为 $d_{ijt} = \|z_{it} - z_{jt}\|^2$, 具体运算步骤如下:首先计算向量差, $z_{it} - z_{jt} = (z_{i,1} - z_{j,1}, z_{i,2} - z_{j,2}, \dots, z_{i,p} - z_{j,p})^T$, 其次对差向量的每个分量取平方, $(z_{i,1} - z_{j,1})^2, (z_{i,2} - z_{j,2})^2, \dots, (z_{i,p} - z_{j,p})^2$, 最后对所有平方分量求和, $\|z_{it} - z_{jt}\|^2 = \sum_{k=1}^p (z_{i,k} - z_{j,k})^2$.

2 变分贝叶斯推断

2.1 先验设置

本文针对动态潜在空间模型建立一类变分贝叶斯推断方法,其主要思想是将推断问题转化为优化问题来进行处理,通过最大化模型的证据下界来寻找参数的近似后验,从而实现参数的统计推断. 对前述的动态潜在空间模型,考虑如下联合后验分布:

$$p(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta} | Y_1, \dots, Y_T) \propto p(\mathbf{Z}) p(\beta_{\text{IN}}) p(\beta_{\text{OUT}}) p(\tau) p(\sigma) \times \prod_{i=1}^n p(r_i) \prod_{t=1}^T p(Y_t | \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}) \quad (4)$$

式中: $\boldsymbol{\theta} = (\beta_{\text{IN}}, \beta_{\text{OUT}}, r_{1:n}, \sigma, \tau)$ 为模型待估参数; \mathbf{Z} 是所有时刻下参与者潜在位置矩阵的集合. 与传统的 MCMC 方法类似,变分贝叶斯方法仍然需要确定待估参数的先验分布,为此本文考虑如下的先验设置,即 $\tau^2 \sim IG(v_\tau/2, v_\tau \xi_\tau^2/2)$, $\sigma^2 \sim IG(v_\sigma/2, v_\sigma \xi_\sigma^2/2)$, $\beta_{\text{IN}} \sim N(v_{\text{IN}}, \xi_{\text{IN}})$, $\beta_{\text{OUT}} \sim N(v_{\text{OUT}}, \xi_{\text{OUT}})$, $(r_1, r_2, \dots, r_n) = \text{Dirichlet}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 IG 是逆伽马分布, Dirichlet 是迪利克雷分布.

2.2 变分贝叶斯方法

2.2.1 模型参数的最优近似密度

假设所有未知参数的集合为 $\boldsymbol{\Theta} = \{\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}\}$, 根据平均场理论,考虑 $\boldsymbol{\Theta}$ 中的随机变量是相互独立的,则变分密度 $q(\boldsymbol{\Theta})$ 分解形式如下:

$$q(\boldsymbol{\Theta}) = q(\beta_{\text{IN}}) q(\beta_{\text{OUT}}) q(\tau) q(\sigma) \prod_{i=1}^n q(r_i) \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^n q(z_{it}) \quad (5)$$

变分贝叶斯方法主要通过最小化变分密度函数 $q(\boldsymbol{\Theta})$ 和后验密度函数 $p(\boldsymbol{\Theta} | Y)$ 之间的 Kullback - Leibler (KL) 散度^[23] 寻找后验密度函数 $p(\boldsymbol{\Theta} | Y)$ 的最佳近似分布,考虑到:

$$\log p(Y) = KL[q(\boldsymbol{\Theta}) \| p(\boldsymbol{\Theta} | Y)] + L\{q(\boldsymbol{\Theta})\} \geq L\{q(\boldsymbol{\Theta})\} \quad (6)$$

由式(6)易知,最小化 KL 散度等价于最大化 $L\{q(\boldsymbol{\Theta})\}$, 在这里 $L\{q(\boldsymbol{\Theta})\}$ 被称为证据下界 (Evidence Lower Bound, ELBO). 在对证据下界实施全局最优化过程中,一类常用的优化算法是坐标上升变分算法 (Coordinate Ascent Variational Inference, CAVI)^[24].

由于 $q(\Theta)$ 的因式之间是相互独立的,考虑其中的分量 $q(\Theta_j)$ 并对证据下界进行展开:

$$L\{q(\Theta)\} = \int \prod_{i=1}^m q(\Theta_i) \log p(\Theta, Y) d\Theta - \int \prod_{i=1}^m q(\Theta_i) \log \prod_{i=1}^m q(\Theta_i) d\Theta = \\ \int \Theta_j q_j(\Theta_j) E_{\prod_{i \neq j} q_i(\Theta_i)} [\log p(\Theta, Y)] d\Theta_j - \int \Theta_j q_j(\Theta_j) \log q_j(\Theta_j) d\Theta_j + c \quad (7)$$

从而证据下界可以写为:

$$ELBO = -KL[q_j(\Theta_j) | \tilde{p}(\Theta_j, Y)] + c \quad (8)$$

由于 $KL \geq 0$, 所以当且仅当 $q_j(\Theta_j) = \tilde{p}(\Theta_j, Y)$ 时, 证据下界 $ELBO$ 取得最大值, 因此可得到最优近似密度 $q_j^*(\Theta_j)$ 的一般表达式为:

$$\log q_j^*(\Theta_j) = E_{-j}[\log p(\Theta, Y)] + c \quad (9)$$

即 $q_j^*(\Theta_j) \propto \exp(E_{-j}[\log p(\Theta, Y)])$. 以参数 β_{IN} 为例, 由式(9)可得其最优近似密度 $q_{\beta_{IN}}^*(\beta_{IN})$ 表达式为:

$$\log q_{\beta_{IN}}^*(\beta_{IN}) = \sum_{i=1}^T \sum_{i \neq j} \left\{ y_{ijt} v_{IN} - y_{ijt} \frac{\text{tr}(2\tilde{\Sigma} + \|\tilde{\mu}_{it} - \tilde{\mu}_{jt}\|^2) v_{IN}}{E_{r_j}^*(r_j)} \right\} - \exp \left\{ \left(\exp \left\{ b v_{IN} + \frac{b^2 \xi_{IN}}{2} \right\} + a \exp \left\{ v_{IN} + \frac{\xi_{IN}}{2} \right\} \right) \right\} + \\ \left[\exp \{ 2(v_{IN} + \xi_{IN}) \} - \left(\exp \left\{ v_{IN} + \frac{1}{2} \xi_{IN} \right\} \right)^2 \right] / 2 + c3 \quad (10)$$

其中, $a = \exp\{\beta_{OUT}\} / \exp\{d_{ijt} \times \beta_{OUT} / r_i\}$, $b = d_{ijt} / r_j$.

接下来, 依次计算 $q_{\beta_{OUT}}^*(\beta_{OUT})$, $q_{z_{it}}^*(z_{it})$, $q_{\tau}^*(\tau^2)$, $q_{\sigma}^*(\sigma^2)$, $q_{r_i}^*(r_i)$ 的最优近似密度, 其推导过程类似, 从略.

2.2.2 模型的证据下界

变分贝叶斯算法是否收敛依据证据下界进行判别. 为此, 本文将给出证据下界的具体表达式. 利用詹森不等式有:

$$E_{q^*(\Theta)}\{\log p(Y|\Theta)\} \leq \sum_{i=1}^T \sum_{i \neq j} \{y_{ijt} [\tilde{\nu}_{IN} + \tilde{\nu}_{OUT} - \text{tr}(2\tilde{\Sigma} + \|\tilde{\mu}_{it} - \tilde{\mu}_{jt}\|^2)]\} - \\ \log \left[1 + \frac{\exp\{\tilde{\nu}_{IN} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}_{IN} + \tilde{\nu}_{OUT} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}_{OUT}\}}{\det(\mathbf{I}_p + 4\tilde{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\{-\frac{(\tilde{\mu}_{it} - \tilde{\mu}_{jt})^T (\mathbf{I}_p + 4\tilde{\Sigma})^{-1} (\tilde{\mu}_{it} - \tilde{\mu}_{jt})}{2}\} \right] \quad (11)$$

其中: $\tilde{\nu}_{IN}$, $\tilde{\nu}_{OUT}$, $\tilde{\mu}_{it}$ 分别为各个参数近似后验密度的均值; $\tilde{\xi}_{IN}$, $\tilde{\xi}_{OUT}$, $\tilde{\Sigma}$ 为各个参数近似后验密度的方差.

进一步的有:

$$E_{q^*(\Theta)}\{\log p(\Theta)\} - E_{q^*(\Theta)}\{\log q(\Theta)\} \leq \frac{nT}{2} \log[\det(\tilde{\Sigma})] - \left[\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n(T-1)}{\tau^2} \right] \text{tr}(\tilde{\Sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \|\tilde{\mu}_{it}\|^2 - \\ \frac{1}{2\tau^2} \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^n \|\tilde{\mu}_{it} - \tilde{\mu}_{i(t-1)}\|^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\tilde{\xi}_{IN}}{\xi_{IN}} - \log \frac{\tilde{\xi}_{IN}}{\xi_{IN}} + \frac{(\tilde{\nu}_{IN} - \nu_{IN})^2}{\xi_{IN}} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{\tilde{\xi}_{OUT}}{\xi_{OUT}} - \log \frac{\tilde{\xi}_{OUT}}{\xi_{OUT}} + \frac{(\tilde{\nu}_{OUT} - \nu_{OUT})^2}{\xi_{OUT}} \right] + c \quad (12)$$

式(11)给出了证据下界的具体表达式, 由变分贝叶斯的原理可知, 当证据下界 $L\{q(\Theta)\}$ 最大时, 此时对应的近似密度即为参数后验的最优近似密度, 当参数的最优近似密度已知时, 即可求出各个参数的贝叶斯估计.

变分贝叶斯估计算法的具体步骤如下:

Algorithm: 变分贝叶斯估计算法

Input: 输入模型 $p(\Theta, Y, X)$ 以及数据集 $\{Y, X\}$

Output: 变分密度函数 $q(\Theta)$ 以及各参数最终估计结果 1

Initialize: 给定变分贝叶斯因子 $q_{\beta_{IN}}^*(\beta_{IN})$, $q_{\beta_{OUT}}^*(\beta_{OUT})$, $q_{z_{it}}^*(z_{it})$ ($i=1, \dots, n, t=1, \dots, T$), $q_{\tau}^*(\tau^2)$, $q_{\sigma}^*(\sigma^2)$, $q_{r_i}^*(r_i)$ ($i=1, \dots, n$);

```

2 while 当 ELBO 没有收敛时 do
3   for  $i \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, T\}$  do
4     通过方程  $q_{\beta_{IN}}^*(\beta_{IN}) \propto \exp E_{-\beta_{IN}}[\log p(Y, \theta)]$  迭代更新  $q_{\beta_{IN}}^*(\beta_{IN})$  和  $\beta_{IN}^q$ ;
5     通过方程  $q_{\beta_{OUT}}^*(\beta_{OUT}) \propto \exp E_{-\beta_{OUT}}[\log p(Y, \theta)]$  迭代更新  $q_{\beta_{OUT}}^*(\beta_{OUT})$  和  $\beta_{OUT}^q$ ;
6     通过方程  $q_z^*(z) \propto \exp E_{-z}[\log p(Y, \theta)]$  迭代更新  $q_{z_{ii}}^*(z_{ii})$  和  $z_{ii}^q$ ;
7     通过方程  $q_\tau^*(\tau) \propto \exp E_{-\tau}[\log p(Y, \theta)]$  迭代更新  $q_\tau^*(\tau^2)$  和  $\tau^{2q}$ ;
8     通过方程  $q_\sigma^*(\sigma) \propto \exp E_{-\sigma}[\log p(Y, \theta)]$  迭代更新  $q_\sigma^*(\sigma^2)$  和  $\sigma^{2q}$ ;
9     通过方程  $q_{r_i}^*(r_i) \propto \exp E_{-r_i}[\log p(Y, \theta)]$  迭代更新  $q_{r_i}^*$  和  $r_i^q$ ;
10  end
11 计算  $L\{q^*(\theta)\} = E_{q^*(\theta)}[\log p(\theta, Y)] - E_{q^*(\theta)}[\log q(\theta)]$ 
12 当  $RC = \frac{|L^{(k)}\{q(\theta)\} - L^{(k-1)}\{q(\theta)\}|}{L^{(k-1)}\{q(\theta)\}} < \varepsilon$  时, 迭代终止; 否则, 继续重复步骤 2 到 12.
13 end
14 return  $q^*(\theta), \theta^q$ .
```

3 实验数据与结果分析

3.1 数据集

为了评估本方法的有效性及其适应性, 本文选取了 Gerhard van de Bunt 收集的一组真实友谊关系数据集 (http://www.stats.ox.ac.uk/~snijders/siena/vdBunt_data.htm), 该数据集给出了 7 个不同时刻下 32 名学生之间的友谊关系, 得到 7 个不对称的邻接矩阵, 其中 (i, j) 项表示学生 i 是否将学生 j 视为朋友, 数据集还提供了学生的其他信息, 如性别、教育计划和吸烟行为等. 本文旨在结合节点属性, 考查定向友谊网络结构以及友谊的关系随时间的动态演变过程, 其统计特征如表 1 所示.

表 1 定向友谊网络的统计特征

Tab. 1 Statistical characteristics of directed friendship networks

统计参数	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
平均度	0.25	6.875	8.125	9.312	10.938	14.375	10.688
平均入度	0.188	3.406	4.063	4.5	5.313	7.188	5.156
平均出度	0.188	3.438	4.031	4.563	5.438	7	5.25
网络密度	0.004	0.111	0.131	0.15	0.176	0.232	0.172
聚类系数	1	0.515	0.631	0.558	0.57	0.599	0.564
互惠性	0.333	0.236	0.369	0.267	0.269	0.343	0.244
直径联结	1	2	2	1	1	3	1
效率性	1	0.44	0.322	0.301	0.355	0.301	0.406
相连度	0.008	0.71	0.821	0.938	0.938	0.938	0.938

由表 1 可以发现: 1) 网络平均密度为 0.139, 表明该网络是稀疏的; 2) 网络的出度分布比入度分布更分散, 且平均度随时间的演变而不断增加; 3) 聚类系数以及互惠性几乎是恒定的, 联结效率性以及相连度随时间的变化逐渐稳定, 且相连度到后期值比较高.

3.2 实验设置

通过对潜在位置 $Z_{1:T}$ 及模型参数 $\theta = \{\tau^2, \sigma^2, \beta_{IN}, \beta_{OUT}, r_{1:n}\}$ 的初始值进行合理化设置, 可以减少迭代次数, 实现加快收敛的目的. 其余参数设置为: 1) 节点半径 r_i : 按照 $r_i^{(1)} = \sum_{t=1}^T \sum_{j \neq i} (y_{ij} + y_{ji}) / 2 / \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} y_{ij}$ 初始化节点半径 r_i , 使 r_i 与参与者出入度密切相关; 2) 潜在位置 $Z_{1:T}$ 及参数 β_{IN} 和 β_{OUT} : 首先通过将 d_{ij} 设置为 i 时刻从 i 到 j 的最短路径的长度, 以此分别构建 T 个距离矩阵 $\{d_{ij}^{(t)}\}$; 在此基础上, 利用多维尺度算法获得初始位置 $Z_1^{(1)}$, 然后进一步利用广义多维尺度^[11]对 $t = 1, 2, \dots, T$ 最小化其目标函数获得 $Z_{1:T}^{(1)}$; 最后根据半径和潜在位置的初始估计, 通过最大化似然得到 β_{IN} 和 β_{OUT} 的初始估计; 3) 参数 τ^2 和 σ^2 : 利用初始潜在位置 $Z_1^{(1)}$, 通过 $\sum_{i=1}^n$

$\|Z_{i1}\|^2/np$ 得到 τ^2 的初值. 类似的, 通过使用初始位置 $Z_{i1}^{(1)}$ 来确定 σ^2 的初始值. 进一步的, 为了使 τ^2 和 σ^2 的先验平坦, 本文将逆伽马先验的形状和尺度参数分别设置为: $\nu_\tau = \nu_\sigma = 2, \xi_\tau^2 = \tau_0^2, \xi_\sigma^2 = 0.001, r_{1:n}$ 的超参数全部设置为 1.

3.3 实验结果及分析

图 1 给出了 7 个时间点下 32 名学生的定向友谊网络结构, 八边形代表的是女孩, 三角形代表的是男孩. 本文还研究了这 32 名学生的学制以及吸烟情况, 学制由节点大小进行区分, 从小到大依次代表 2 年制、3 年制和 4 年制, 而颜色表示吸烟与否 (绿色表示吸烟的学生, 红色表示不吸烟的学生). 从图中可以看出, 女孩多于男孩, 且随着时间的演变, 网络结构逐渐复杂, 表明参与者之间的友谊关系强度增加.

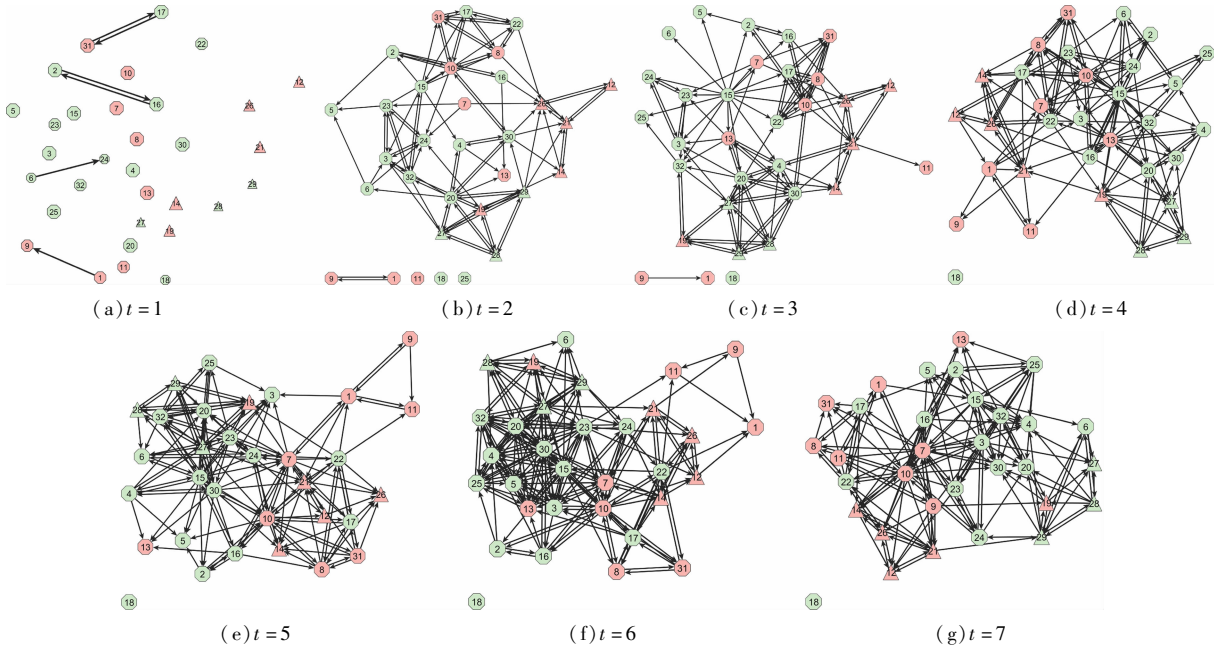


图 1 在时刻 $t=1, \dots, 7$ 时的定向学生友谊网络

Fig. 1 Directed student friendship networks at times $t=1, \dots, 7$

图 2 给出了所有参与者在各个时刻下的潜在位置以及移动轨迹, 箭头越长表示移动越大. 从位置轨迹图可以看到, 随着时间的推移, 参与者潜在位置的变化情况如下: 1) 女生大都位于潜在空间的上方, 男生大都位于潜在空间的下方, 只有少数参与者接近异性, 即在友谊选择中, 同性参与者之间的友谊更为普遍. 2) 吸烟行为相似的参与者更倾向于建立友谊关系, 例如在 $t=1$ 时, 21、26、12 号学生吸烟, 随着时间的推移, 他们在潜在空间中更趋向于建立友谊关系; 又如在 $t=2$ 时, 参与者 9 号吸烟, 他转移到临近社会群体并使得该群体内的学生 (11、1 号) 也吸烟. 3) 随着时间的推移, 具有相同学习任务的学生更趋向于建立友谊关系.

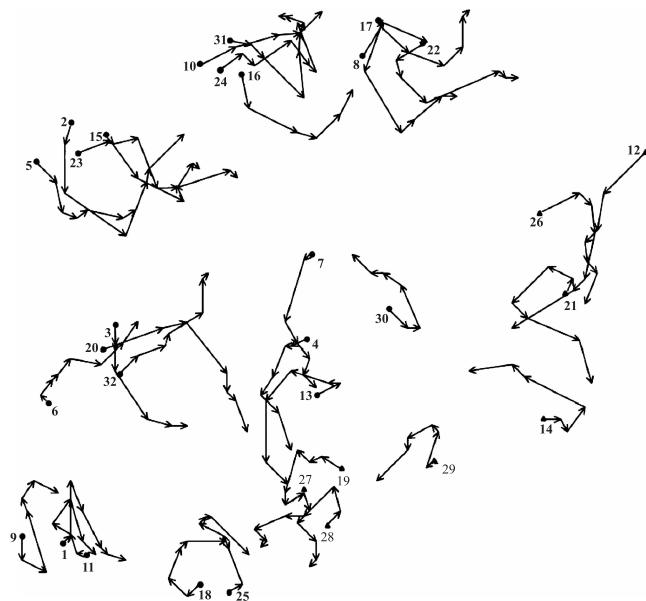


图 2 参与者在各个时刻下潜在位置估计及移动轨迹
Fig. 2 Participants' estimation of latent positions and movement trajectory at various moments

3.4 算法比较

接下来,本文重点对变分贝叶斯(Variational Bayes, VB)方法与经典的 MCMC 算法进行比较,其结果如下:

由图 3 及表 2 可以看出:1) MCMC 算法的 AUC 值为 0.888,而变分贝叶斯方法的 AUC 值为 0.919,表明后者拟合较好;2) MCMC 算法平均需要大约半个小时才能达到收敛,而变分贝叶斯方法只需要十几秒钟就可以完成收敛,这表明变分贝叶斯方法的计算速度更快。

3.5 模型比较

TERGM 是动态网络分析的主流模型之一,该模型在遵循常见网络拓扑特征的情况下产生随机连通图. 本文通过以上真实数据比较时间指数随机图模型和动态潜在空间模型在处理动态社交网络方面的优劣. 样本外预测是考查不同模型在给定数据集上性能表现的有效工具,本文用时刻 $t = 7$ 的样本外预测来评估两个模型的拟合优度. 具体的,分别基于前面 $t = 2, \dots, 6$ 个时间步长的网络节点数据预测时刻 $t = 7$ 的网络结构,并与观察到的实际网络进行比较,如图 4 所示.

图 4 中红色曲线为时间指数随机图模型的 ROC 曲线,蓝色曲线为动态潜在空间模型的 ROC 曲线. AUC 值表明,动态潜在空间模型具有更好的样本外模型拟合,即动态潜在空间模型的预测性能更好.

4 结论

本文使用动态潜在空间方法对定向学生友谊网络进行建模,该模型不仅展示了社交网络的动态演化过程,还结合了节点属性,深入揭示了参与者之间的友谊关系模式. 本文得到的主要结论如下:

1) 在参数估计方面,采用变分贝叶斯方法获取潜在位置和模型参数的解,并与经典的 MCMC 算法进行比较,实验表明,前者不仅有着更高的计算效率和更低的计算负担,更适用于大型社交网络分析.

2) 在模型比较方面,潜在空间模型的样本外预测性能依然大大优于时间指数随机图模型. 尽管本文只对有向图进行了分析,但本方法也可以很容易推广至无向图的建模领域.

参考文献:

- [1] 方炜,章蓓,张明状. 基于社团结构的新能源汽车产学研专利合作网络演化研究[J]. 情报探索,2023(2):98-106.
FANG W,ZHANG B,ZHANG M Z. Study on the evolution of new energy vehicle industry - university - research patent cooperation network based on community structure[J]. Information Research,2023(2):98-106.
- [2] PAN X Y,ZHANG Y N,SHEN H B. Large - scale prediction of human protein - protein interactions from amino acid sequence based on latent topic features[J]. Journal of Proteome Research,2010,9(10):4992-5001.
- [3] LINARDI F,DIKS C,VAN DER LEIJ M,et al. Dynamic interbank network analysis using latent space models[J]. Journal of Economic Dynamics and Control,2020,112(C):1-22.
- [4] HOFF P D,RAFTERY A E,HANDCOCK M S. Latent space approaches to social network analysis[J]. Journal of the American Statistical Association,2002,97(460):1090-1098.
- [5] SOSA J,NOSA C. Spherical latent space models for social network analysis[EB/OL]. Arxiv,2025:2508.16556. <https://arxiv.org/abs/2508.16556>.

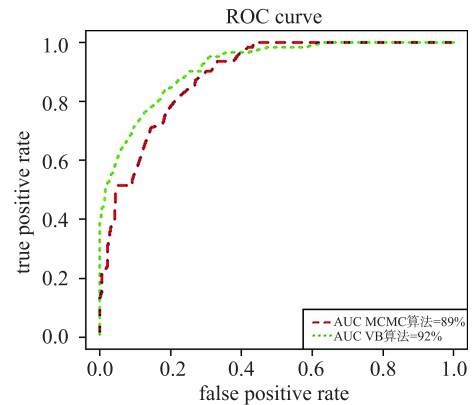


图 3 MCMC 和 VB 的 ROC 曲线

Fig. 3 ROC curves of MCMC and VB

表 2 算法复杂度及收敛时间比较

Tab. 2 Comparison of algorithm complexity and convergence time

算法	收敛时间/s	计算复杂度
VB	16	低
MCMC	1573	高

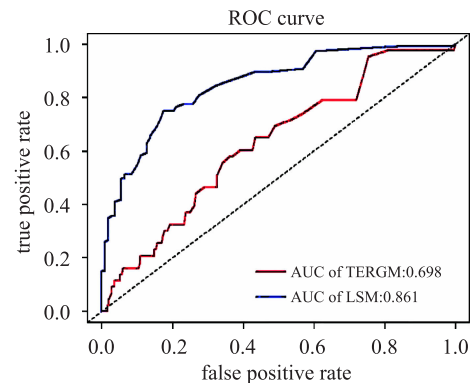


图 4 LSM 和 TERGM 的 ROC 曲线

Fig. 4 ROC curves of LSM and TERGM

- org/abs/2508.16556.
- [6] TANG L, WANG X F, LIU H. Community detection via heterogeneous interaction analysis[J]. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 2012, 25(1): 1–33.
- [7] MICHELL M P L. Smoke Rings: Social network analysis of friendship groups, smoking and drug – taking[J]. *Drugs: Education, Prevention and Policy*, 2000, 7(1): 21–37.
- [8] PEARSON M, WEST P. Drifting smoke rings[J]. *Connections*, 2003, 25(2): 59–76.
- [9] ANSARI A, KOENIGSBERG O, STAHL F. Modeling multiple relationships in social networks[J]. *Journal of Marketing Research*, 2011, 48(4): 713–728.
- [10] ROBINSON L F, PRIEBE C E. Detecting time – dependent structure in network data via a new class of latent process models [EB/OL]. Arxiv, 2012; 1212.3587. <https://arxiv.org/abs/1212.3587>.
- [11] SARKAR P, MOORE A W. Dynamic social network analysis using latent space models[J]. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 2005, 7(2): 31–40.
- [12] SEWELL D K, CHEN Y G. Latent space models for dynamic networks[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2015, 110(512): 1646–1657.
- [13] SEWELL D K, CHEN Y G. Analysis of the formation of the structure of social networks by using latent space models for ranked dynamic networks[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics*, 2015, 64(4): 611–633.
- [14] MATIAS C, MIELE V. Statistical clustering of temporal networks through a dynamic stochastic block model[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 2017, 79(4): 1119–1141.
- [15] HANNEKE S, FU W J, XING E P. Discrete temporal models of social networks[J]. *Electronic Journal of Statistics*, 2010, 4: 585–605.
- [16] LEE K H, XUE L Z, HUNTER D R. Model – based clustering of time – evolving networks through temporal exponential – family random graph models[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2020, 175.
- [17] 孙青松, 胡海波, 汪洋. 基于信息内容与用户相关性的社会网络信息扩散模型[J]. *昆明理工大学学报(自然科学版)*, 2023, 48(5): 224–231.
- SUN Q S, HU H B, WANG Y. A social network information diffusion model based on information content and user relevance [J]. *Journal of Kunming University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2023, 48(5): 224–231.
- [18] YUE Y Y, SHEN X Y. Development strategy of early childhood music education industry: An IFS – AHP – SWOT analysis based on dynamic social network[J]. *PLoS One*, 2024, 19(2): e0295419.
- [19] SEWELL D K, CHEN Y G. Latent space approaches to community detection in dynamic networks[J]. *Bayesian Analysis*, 2017, 12(2): 351–377.
- [20] 刘厚忠. 基于随机块模型的社区发现及演化研究[D]. 南昌: 南昌航空大学, 2021.
- LIU H Z. Research on community detection and evolution based on stochastic block model[D]. Nanchang: Nanchang University of Aeronautics and Astronautics, 2021.
- [21] HOFF P D. Bilinear mixed – effects models for dyadic data[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2005, 100(469): 286–295.
- [22] CHANG X Y, HUANG D Y, WANG H S. A popularity – scaled latent space model for large – scale directed social network [J]. *Statistica Sinica*, 2019, 29(3): 1277–1299.
- [23] 巴丽伟. 基于变分贝叶斯推断的因子分析法[D]. 杭州: 杭州电子科技大学, 2022.
- BA L W. Factor analysis method based on variational Bayes inference[D]. Hangzhou: Hangzhou University of Electronic Science and Technology, 2022.
- [24] BLEI D M, KUCUKELBIR A, MCAULIFFE J D. Variational inference: A review for statisticians[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2017, 112(518): 859–877.

(编辑: 朱银周)