数学研究

DOI:10.16595/j.1671-055X.2026.01.006

# 加权Bers空间中具有Hadamard间隙的解析函数

张应琴,杨丛丽*,罗 玲
(贵州师范大学 数学科学学院,贵州 贵阳 550025)

**摘 要**:通过引入一个在区间(0,1]上正的连续函数 $\omega$,定义了小加权Bers空间 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}$ 和小加权Bers空间 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^{\infty}$,进而刻画了在单位开圆盘上具有Hadamard gaps的解析函数属于这类空间的充分必要条件。同时,借助当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup n_k^{-\alpha}|a_k|1/\omega(1/n_k)=0$ 时 $f(x)\in\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}$ 这一结论,证明了在Bers空间 $\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}$ 中存在2个不同的函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,它们模的和满足 $|f_1(z)|+|f_2(z)|\geq C/(1-|z|)^{\alpha}$ 这样的下界。在未构造测试函数的情况下,利用该下界能够得到单位圆盘上从 $\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}$ 到 $\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 的加权复合算子是有界的充分必要条件。

**关键词**:Hadamard间隙;加权Bers空间;解析函数;有界性

**中图分类号**:O174 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-055X(2026)01-0062-16

函数空间是由某些具有相同特征的函数构成的集合,通常具有拓扑结构。这类结构一般由范数引导,其中,Banach空间是完备的赋范线性空间,空间中任何柯西序列都收敛于该空间的一个函数。在满足一定的条件下,各个空间还存在着嵌入关系。常见的函数空间有Bloch空间、Hardy空间、Bergman空间、Zygmund空间及Bers空间等。算子理论广泛应用于泛函分析,它是一个函数空间到另一个函数空间的映射。算子的种类繁多,例如积分算子、广义的积分算子、微分算子、复合算子、加权复合算子和广义的加权复合算子等。Bers空间是函数空间的一种,是复平面上的全纯函数空间和线性空间。同时也是Hardy空间的推广,一直以来都备受众多学者的关注和研究,特别是在函数论方面,例如,朱(Zhu)[1]研究得到了从Bers型空间到Bloch型空间的广义加权复合算子是有界的且紧的充分必要条件。

Hadamard gaps又称为Lacunary series,是解析函数一个非常重要的性质,应用也十分

**收稿日期**:2025-03-26
**基金项目**:国家自然科学基金项目“对数凹函数集的几何理论研究”(12361011)。
**作者简介**:张应琴,女,贵州铜仁人,硕士研究生,主要从事函数论研究;杨丛丽,女,贵州黎平人,理学博士,副教授,主要从事函数论研究;罗玲,女,贵州毕节人,硕士研究生,主要从事函数论研究。
*通信作者:杨丛丽

广泛，可以用Hadamard缺项幂级数解决偏微分方程、物理、几何、函数论和数值分析等方面的问题：第一，在偏微分方程方面，可以用缺项幂级数形式表示复杂的函数，从而简化求解方程的过程；第二，在数值分析方面，因为Hadamard缺项幂级数可以更快地收敛到函数本身，所以对比传统泰勒级数近似值，可以提供更精确的近似值；第三，在几何和物理方面，可以用于研究双曲型完备极小曲面族。例如，张建肖等[2]运用具有 Hadamard gaps的缺项幂级数，构造出了位于三维空间中两个平行平面之间的双曲型完备极小曲面族及其具体形式。

Hadamard gaps在函数空间的研究可以追溯到1980年，Yamashita[3]研究发现，具有Hadamard gaps的解析函数属于 $\mu$-*Bloch* 空间和小 $\mu$-*Bloch* 空间的充分必要条件；Luo[4]运用该结论得到了 $\mu$-*Bloch* 空间中两个不同函数的一阶导的绝对值的和的一个不等式，并借助该不等式证明了 $\mu$-*Bloch* 空间中复合算子的有界性和紧性。之后，Stevi[5]将Yamashita的结论推广到了更一般的 $\mu$-*Bloch* 空间。不过，Stevi只得到了充分条件，且还对权重函数 $\mu$ 增加了许多限制条件，使空间范围被缩小。杜俊涛[6]对Stevi的结果进行了完善，对Bloch空间的定义进行了合理的修正，将权重函数 $\mu$ 修改为正规函数，得到了具有Hadamard gaps的解析函数属于 $\mu$-*Bloch* 空间和小 $\mu$-*Bloch* 空间的充分必要条件。Qian等[7]在权重函数 $\rho$ 的一些温和条件下，又将Hadamard gaps推广到了Dirichlet空间。

Ahmed等[8]利用 $(0,1]$ 上正的连续函数 $\omega$，定义了加权对数 $\alpha-$*Bloch* 空间和小的加权对数 $\alpha-$*Bloch* 空间，发现具有Hadamard gaps的解析函数属于这两个空间的充要条件。本文通过权函数 $\omega$ 定义了加权Bers空间和小加权Bers空间，刻画了单位开圆盘上具有Hadamard gaps的解析函数属于这两个空间的充分必要条件。利用该结论，得到了加权Bers空间中两个函数的绝对值的和的一个不等式，在未构造测试函数的前提下，运用这个不等式，得到了单位圆盘上从Bers空间 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 到Bers空间 $\mathscr{H}_\beta^\infty$ 的加权复合算子有界的充分必要条件。

## 1 预备知识

如果存在正的常数C，使得 $\frac{A}{C}\leqslant B\leqslant CA$，则记为符号 $A\approx B$。

令 $D$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位开圆盘，$H(D)$ 是 $D$ 上全体解析函数构成的集合，其拓扑结构在 $D$ 的紧子集上一致收敛。

对于 $0\leqslant\alpha<\infty$，$D$ 上Bers空间 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 和小Bers空间 $\mathscr{H}_{\alpha,0}^\infty$ 分别定义为式（1）和式（2）：

$$\mathscr{H}_\alpha^\infty=\left\{f(z)\in H(D):\|f\|_{\mathscr{H}_\alpha^\infty}=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f(z)|<\infty\right\}\qquad(1)$$

$$\mathscr{H}_{\alpha,0}^\infty=\left\{f(z)\in \mathscr{H}_\alpha^\infty:\lim_{|z|\to1^-}\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f(z)|=0\right\}\qquad(2)$$

显然，$\mathscr{H}_{\alpha,0}^\infty$ 是 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 的一个闭子空间，且 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 是一个Banach空间。假设 $v(z)$ 是复单位圆盘上的正规函数，即 $v(z)$ 是 $[0,1)$ 上的连续函数，并且存在 $0\leqslant a<b$，使：

$\frac{v(r)}{(1-r)^a}$ 在 $[\delta,1)$ 上是单调递减的，并且 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{v(r)}{(1-r)^a}=0$

$\frac{v(r)}{(1-r)^b}$ 在 $[\delta,1)$ 上是单调递增的，并且 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{v(r)}{(1-r)^b}=0$

显然，$v(|z|)$ 在 $[\delta,1)$ 上是单调递减的，并且 $\lim\limits_{|z|\to 1}v(|z|)=0$

在定义1中，若用正规函数 $v(|z|)$ 替换 $\left(1-|z|^2\right)^\alpha$，就得到了Bers型空间。苏简兵等[9]研究了第二类广义华罗庚域上从a-Bloch空间到Bers空间的加权复合算子的有界性和紧性，柏宏斌[10]研究了第一类Cartan-Hartogs域上Bers空间上的加权复合算子，余建[11]刻画了Bers空间上加权复合微分的前置算子。

若解析函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n_k}z^{n_k}$，对任意 $z\in D$，其中 $k\in N$，$\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1$，则称 $f$ 是单位开圆盘上具有Hadamard gaps的解析函数。

有学者对具有Hadamard gaps的解析函数进行了研究，例如：Miao[12]刻画了 $D$ 上具有Hadamard gaps的解析函数的5个必要条件，Fughs[13]研究了具有Hadamard gaps的幂级数的零点情况。从这两篇文章中能对Hadamard gaps有初步的认识。

下面将用一个合理的权函数 $\omega$ 定义加权Bers空间和小的加权Bers空间。

设 $0\leqslant\alpha<\infty$，$\omega$ 是(0,1]上正的连续函数，加权Bers空间 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}$ 和小的加权Bers空间 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^{\infty}$ 分别定义为式(3)和式(4)：

$$\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}=\left\{f(z)\in H(D):\|f\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}}=\sup_{z\in D}\frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f(z)|}{\omega(1-|z|)}<\infty\right\}\quad(3)$$

$$\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^{\infty}=\left\{f(z)\in\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}:\lim_{|z|\to 1^-}\frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f(z)|}{\omega(1-|z|)}=0\right\}\quad(4)$$

显然，当 $\omega=1$ 时，$\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}$ 即为 $\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}$，$\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^{\infty}$ 即为 $\mathscr{H}_{\alpha,0}^{\infty}$，在这个范数下的 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}$ 是一个Banach空间，并且 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^{\infty}$ 是 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^{\infty}$ 的一个闭子空间。这样的 $\omega$ 存在很多，比如常规权 $\omega(r)\approx\frac{\int_r^1\omega(t)\mathrm{d}t}{1-r}$，其中 $\omega$ 是连续的，且 $0\leqslant r<1$；双倍权 $\hat{\omega}(r)\leqslant C\hat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right)$，其中 $C\geqslant 1$，且 $0\leqslant r<1$。

令 $\phi$ 是 $D$ 上的全纯自映射函数，复合算子的定义与 $\phi$ 有关，记作 $C_\phi$，将函数论的性质与不同空间上的性质联系起来。对于 $z\in D$ 和 $f\in H(D)$，其定义为式(5)：

$$C_\phi f=f\circ\phi=f[\phi(z)]\quad(5)$$

显然，用这种方式定义的复合算子是线性的。由闭图像定理可知，从巴纳赫空间 $X$ 到另一个巴纳赫空间 $Y$ 的 $C_\phi f$: $X\to Y$ 是有界的，当且仅当 $C_\phi f$ 将 $X$ 映射到 $Y$；有界线性算

子 $C_\phi f$ 是紧的，当且仅当 $X$ 中闭单位圆盘上的像在Y中是紧的。

复合算子的一个基本问题是将全纯自映射 $\phi$ 的函数理论性质与 $C_\phi f$ 限制到各个解析函数的巴纳赫空间上的算子理论性质联系起来，且复合算子保持 $H(D)$ 不变。也就是说，只要有函数 $f\in H(D)$，就有 $C_\phi f\in H(D)$。众所周知，$C_\phi f$ 也保持 $H(D)$ 的许多子空间不变，例如Hardy空间和Bergman空间，在这些空间上，学者们发现了许多与复合算子有关的有趣的结果。

设 $u\in H(D)$，$\phi$ 是 $D$ 上的全纯自映射函数，加权复合算子的定义与 $u$ 和 $\phi$ 有关，记作 $uC_\phi$，其定义为式(6)：

$$uC_\phi f(z)=u(z)f\left[\phi(z)\right] \tag{6}$$

若 $\mu=1$，加权复合算子即为复合算子。目前，有很多关于复合算子的研究，如：何维湘等[14]、税显钊[15]、苏简兵等[16]、徐瀚[17]在各个空间和领域上刻画了复合算子的紧性和有界性。若 $\phi(z)=z$，加权复合算子即为乘法算子。例如：Zhu[18]研究了从Bergman空间到Bers空间的微分算子、复合算子和乘法算子的性质；Liang等[19]刻画了单位圆盘上从Bers空间到Bloch空间的加权复合算子有界的充分必要条件；Jiang[20]研究了Loo-Keng Hua域上Bers空间中加权复合算子的有界性，将研究推广到了一个新的领域。而本文主要探讨如何利用 $\phi$ 的性质来确定在什么条件下，从Bers空间 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 到Bers空间 $\mathscr{H}_\beta^\infty$ 的复合算子是有界的，即用主要定理来刻画从Bers空间 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 到Bers空间 $\mathscr{H}_\beta^\infty$ 的加权复合算子是有界的充要条件。

## 2 重要的引理

由Bers空间的定义可知其中的函数皆为解析函数，但并不是所有的解析函数都属于该空间，定义中还需要满足与其绝对值有关的一个式子的上确界是有限的。幂级数在满足什么条件下属于加权Bers空间和小加权Bers空间的呢？这个部分将解决这个问题，同时为主要定理的证明提供必要的结论。事实上，这个部分的引理1和引理2分别为下一部分定理1和定理2必要性的证明。

令 $0\leqslant\alpha<\infty$，假设权函数 $\omega$ 是(0,1]上正的单调递减的连续函数，解析函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，则下面两个结论成立。

**引理1** 如果 $f(z)\in\mathscr{H}_\alpha^\infty$，则式(7)：

$$\lim_{n\to\infty}\sup n^{-\alpha}|a_n|\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant e\|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty} \tag{7}$$

证明：由柯西积分公式可知，对于 $n\geqslant1$，有式(8)：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi \tag{8}$$

根据 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 的定义可得式(9)：

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| r^{-n} d\theta \\ &\leqslant \frac{\|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty} r^{-n}\omega(1-r)}{2\pi\left(1-r^2\right)^\alpha}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= \|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty} \frac{r^{-n}\omega(1-r)}{(1-r^2)^\alpha} \end{aligned} \tag{9}$$

令 $r=1-\frac{1}{n}$，对于 $n>1$，有式(10)：

$$|a_n| \leqslant \|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{-\alpha}} \tag{10}$$

因此式(11)：

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sup n^{-\alpha}|a_n|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} &\leqslant \|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty}\lim_{n\to\infty}\sup\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= e\|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty} \end{aligned} \tag{11}$$

通过上面的计算结果可知，如果：$f(z)\in\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty$，则：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup n^{-\alpha}|a_n|\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant e\|f(z)\|_{\mathscr{H}_{\alpha,\omega}^\infty}$

综上，引理1是成立的。

**引理2** 若 $f(z)\in\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^\infty$，则式(12)：

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}|a_n|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}=0 \tag{12}$$

证明：由(9)可知式(13)：

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|r^{-n}d\theta \tag{13}$$

由 $f(z)\in\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^\infty$ 及 $\mathscr{H}_{\alpha,\omega,0}^\infty$ 的定义可知，任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $r\in(0,1)$，当 $1-r<\delta$ 时，有式(14)：

$$\frac{\left(1-r^2\right)^\alpha\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\omega(1-r)}<\varepsilon \tag{14}$$

令 $r=1-\frac{1}{n}$，则 $n=\frac{1}{1-r}>\frac{1}{\delta}$，因此，式(15)：

$$\begin{aligned} |a_n| &\leqslant \left|\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^{-n}\omega(1-r)}{\left(1-r^2\right)^\alpha}d\theta\right| \\ &= \varepsilon\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{-\alpha}} \end{aligned} \tag{15}$$

所以式(16):

$$n^{-\alpha}|a_n|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}<\varepsilon\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \tag{16}$$

又因为式(17):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e \tag{17}$$

所以存在 $N_0>0$,使当 $n>N_0$ 时,$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}<e+1$,令 $N=\max\left\{\frac{1}{\delta},N_0\right\}$,则当 $n>N$ 时有式(18):

$$n^{-\alpha}|a_n|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}<\varepsilon(1+e) \tag{18}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性可知式(19):

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\alpha}|a_n|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}=0 \tag{19}$$

综上可知,如果:$f(z)\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega,0}$,则:$\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\alpha}|a_n|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}=0$

因此,引理2是成立的。

运用与周锋[21]相同的证明方法可以得到下列结论。

**引理3** 假设 $\phi$ 是 $D$ 上的全纯自映射函数,$u\in H(D)$,$uC_\phi f:\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}\to\mathscr{H}^{\infty}_{\beta}$ 是紧的,当且仅当 $uC_\phi f:\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}\to\mathscr{H}^{\infty}_{\beta}$ 是有界的,且对 $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}$ 中任一列在 $D$ 的紧子集上内闭一致收敛于0的有界序列 $\{f_n\}_{n\in N}$,都有:$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|(uC_\phi)(f)\right\|_{\mathscr{H}^{\infty}_{\beta}}=0$

## 3 主要结果及证明

这个部分研究 $D$ 上具有Hadamard gaps的缺项幂级数属于加权Bers空间和小的加权Bers空间的充分必要条件。特别指出,假设 $0\leqslant\alpha<\infty$,$\omega$ 是 $(0,1]$ 上正的单调递减的连续函数,缺项幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n_k}z^{n_k}$,其中 $k\in N^+$,且式(20):

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1 \tag{20}$$

则下列结论成立:

**定理1** $f(z)\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega}$,当且仅当式(21):

$$\lim_{k\to\infty}\sup n_k^{-\alpha}|a_k|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)}<\infty \tag{21}$$

证明:由引理1可知必要性成立,因此,只需证明充分性即可。

因为一个数列增加、减少或改变有限项并不会影响该数列的性质,所以不妨设 $n_k>1$,因为式(21)成立,所以存在 $M>0$,使得式(22):

$$|a_k| \leqslant M n_k^{\alpha} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \tag{22}$$

因此,式(23):

$$\begin{aligned}\frac{|f(z)|}{1-|z|} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\alpha} M \omega\left(\frac{1}{n_k}\right)|z|^{n_k} \sum_{n=0}^{\infty}|z|^n \\ &\leqslant M\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{n_k \leq n} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\alpha}\right]|z|^n\right\}\end{aligned} \tag{23}$$

结合式(20)和 $\omega$ 单调递减的性质可知,式(24):

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) n_{k+1}^{\alpha}}{\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\alpha}} \geqslant \lambda^{\alpha} > 1 \tag{24}$$

移项可得式(25):

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\alpha} \leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) n_{k+1}^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} \tag{25}$$

任意的 $n_{k_0} \leqslant n \leqslant n_{k_0}+1$ ,对于 $1 \leqslant k \leqslant k_0$ ,由不等式(25)可得式(26):

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\alpha} \leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n_{k_0}}\right) n_{k_0}^{\alpha}}{\lambda^{\alpha(k_0-k)}} \leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right) n^{\alpha}}{\lambda^{\alpha(k_0-k)}} \tag{26}$$

所以,式(27):

$$\sum_{k=1}^{k_0} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\alpha} \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}\right) n^{\alpha} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\lambda^{\alpha(k_0-k)}} \leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right) n^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}-1} \tag{27}$$

根据可知存在一个正的常数 $R$ ,使得式(28):

$$\sum_{n_k \leq n} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^{\alpha} \leqslant R \omega\left(\frac{1}{n}\right) n^{\alpha} \tag{28}$$

当 $n_k > 1$ 时,结合式(23)和式(27)可得式(29):

$$\begin{aligned}\frac{|f(z)|}{1-|z|} &\leqslant MR \sum_{n=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) n^{\alpha}|z|^n \\ &\leqslant MR \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{\alpha+1}}\end{aligned} \tag{29}$$

因此,式(30):

$$\frac{|f(z)|(1-|z|)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)} \leqslant MR \tag{30}$$

通过计算可知式(31):

$$\sup_{z\in D}\left|f(z)\right|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)}\leqslant\sup_{z\in D}\left|f(z)\right|\frac{\left[(1-|z|)(1+|z|)\right]^{\alpha}}{\omega(1-|z|)}$$
$$\leqslant 2^{\alpha}\sup_{z\in D}\left|f(z)\right|\frac{(1-|z|)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)} \tag{31}$$

再结合式(30)和式(31)可得式(32)：

$$\sup_{z\in D}\left|f(z)\right|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)}\leqslant 2^{\alpha}MR<\infty \tag{32}$$

由 $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega}$ 的定义知：$f(z)\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega}$

综上可知定理1是成立的。

**定理2** $f(z)\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega,0}$，当且仅当式(33)：

$$\lim_{k\to\infty}\sup n_k^{-\alpha}|a_k|\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)}=0 \tag{33}$$

证明：由引理2可知必然性成立，因此，只需证明充分性即可。

记 $A=\sup n_k^{-\alpha}|a_k|\omega^{-1}\left(\frac{1}{n_k}\right)<\infty$，且对任意的e≤0，存在一个正常数 $K=K(\varepsilon)>0$，使对任意的 $k>K$，有 $n_k^{-\alpha}|a_k|\omega^{-1}\left(\frac{1}{n_k}\right)<\varepsilon$，记 $m=\sum_{k=1}^{K}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k^{\alpha}$，因为 $m$ 是一个有限项的和，所以 $m<\infty$，故式(34)：

$$\frac{|f(z)|}{1-|z|}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k||z|^{n_k}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{n}\right)$$
$$\leqslant A\sum_{k=1}^{K}\frac{|z|^{n_k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)}{n_k^{-\alpha}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{n}\right)+\varepsilon\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{|z|^{n_k}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)}{n_k^{-\alpha}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{n}\right) \tag{34}$$
$$\leqslant\frac{Am}{1-|z|}+\varepsilon MR\frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{\alpha+1}}$$

右边第二项是根据定理1的证明得到的，所以式(35)：

$$\left|f(z)\right|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)}\leqslant\left|f(z)\right|\frac{\left[(1-|z|)(1+|z|)\right]^{\alpha}}{\omega(1-|z|)}$$
$$\leqslant 2^{\alpha}\left|f(z)\right|\frac{(1-|z|)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)} \tag{35}$$
$$\leqslant\frac{2^{\alpha}Am(1-|z|)^{\alpha}}{\omega(1-|z|)}+2^{\alpha}MR\varepsilon$$

又由于式(36)：

$$\lim_{z\to 1^-}\frac{\left(1-|z|\right)^{\alpha}}{\omega\left(1-|z|\right)}=0 \tag{36}$$

所以存在 $r\in(0,1)$ ,对任意的 $|z|>r$ ,有式(37)：

$$\frac{Am\left(1-|z|\right)^{\alpha}}{\omega\left(1-|z|\right)}<\varepsilon \tag{37}$$

因此,当 $|z|>r$ 时式(38)：

$$\left|f(z)\right|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}}{\omega\left(1-|z|\right)}\leqslant 2^{\alpha}\varepsilon(1+MR) \tag{38}$$

这意味着式(39)：

$$\lim_{|z|\to 1^-}\left|f(z)\right|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}}{\omega\left(1-|z|\right)}=0 \tag{39}$$

由 $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega,0}$ 的定义知：$f(z)\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega,0}$

综上可知,定理2是成立的。

## 4 应用

运用本文的主要定理,在Bers空间中找到了两个不同的函数,经计算得到了这两个函数绝对值的和在Bers空间中的一个不等式。对于算子在函数空间有界性必要条件的证明,传统的方法是构造测试函数,但想要构造出一个满足条件的函数并不容易。有了定理3中的不等式,就可以在不构造测试函数的前提下,得到单位圆盘上从Bers空间 $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}$ 到Bers空间 $\mathscr{H}^{\infty}_{\beta}$ 的加权复合算子是有界的充分必要条件,很大程度上简化了计算过程。

首先证明该不等式成立。

**定理3** 假设权函数 $\omega=1$ ,对于 $0<\alpha<\infty$ 和 $z\in D$ ,存在 $f_1,f_2\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}$ ,使得式(40)：

$$\left|f_1(z)\right|+\left|f_2(z)\right|\geqslant\frac{C}{\left(1-|z|\right)^{\alpha}} \tag{40}$$

证明:对任意 $z\in D$ ,定义函数式(41)：

$$g_1(z)=\sum_{m=0}^{\infty}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}z^{q^m} \tag{41}$$

其中 $a_m=q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}$ , $n_m=q^m$ , $q$ 是一个很大的正整数,显然 $g_1(z)$ 是一个具有Hadamard gaps的解析函数,且式(42)：

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sup n_m^{-\alpha}|a_m|&=\lim_{m\to\infty}\sup\frac{q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}}{(q^m)^{\alpha}}\\&\leqslant\lim_{m\to\infty}\sup\frac{(q^m)^{\alpha}q^{\frac{\alpha}{2}}}{(q^m)^{\alpha}}<q^{\frac{\alpha}{2}}<\infty\end{aligned} \tag{42}$$

由定理1可知：$g_1(z)\in\mathscr{H}_\alpha^\infty$

接下来证明式(43)：

$$|g_1(z)|\geqslant\frac{C_1}{(1-|z|)^\alpha}\tag{43}$$

对任意 $k=1,2,3\cdots$ 和 $z\in D$，满足式(44)：

$$1-\frac{1}{q^k}\leqslant|z|\leq 1-\frac{1}{q^{k+\frac{1}{2}}}\tag{44}$$

满足不等式(44)的 $z$ 有以下结果，如式(45)：

$$\begin{aligned}|g_1(z)|&=\left|\sum_{m=0}^{\infty}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}z^{q^m}\right|\\&\geqslant q^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}}|z|^{q^k}-\sum_{m=0}^{k-1}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}|z|^{q^m}-\sum_{m=k+1}^{\infty}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}|z|^{q^m}\\&=K_1-K_2-K_3\end{aligned}\tag{45}$$

由不等式(44)可得式(46)：

$$\frac{1}{3}\leqslant\left(1-\frac{1}{q^k}\right)^{q^k}\leqslant|z|^{q^k}\tag{46}$$

所以式(47)：

$$K_1\geqslant\frac{1}{3}q^{\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)}\tag{47}$$

通过计算可得式(48)：

$$K_2=\sum_{m=0}^{k-1}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}|z|^{q^m}\leqslant\sum_{m=0}^{k-1}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}=q^{\frac{\alpha}{2}}\frac{q^{k\alpha}}{q^\alpha-1}=\frac{q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}}{q^\alpha-1}\tag{48}$$

又有式(49)：

$$\begin{aligned}K_3&=\sum_{m=k+1}^{\infty}q^{m\alpha+\frac{\alpha}{2}}|z|^{q^m}\\&\leqslant q^{\frac{\alpha}{2}}q^{\alpha(k+1)}|z|^{q^{k+1}}\sum_{m=k+1}^{\infty}|z|^{q^m-q^{k+1}}\cdot q^{m\alpha}\\&\leqslant q^{\frac{\alpha}{2}+\alpha(k+1)}|z|^{q^{k+1}}\sum_{m=0}^{\infty}(|z|^{q^{k+2}-q^{k+1}}q^\alpha)^m\\&=q^{\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{q^\alpha|z|^{q^{k+1}}}{1-q^\alpha|z|^{q^{k+2}-q^{k+1}}}\end{aligned}\tag{49}$$

由式(44)可得 $|z|^{q^k}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{q^{-\frac{1}{2}}}$ 和 $q^{k+\frac{1}{2}}\geqslant\frac{1}{1-|z|}$，所以有式(50)：

$$K_3\leqslant q^{\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{q^\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{q^{\frac{1}{2}}}}{1-q^\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{q^{\frac{3}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}}\tag{50}$$

且对于足够大的 $q$ 和满足不等式的 $z$ 有式(51):

$$\left|g_1(z)\right| \geqslant q^{\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{\left(q^{\alpha}-1\right)}-\frac{q^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{q^{\frac{1}{2}}}}{1-q^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{q^{\frac{3}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}}\right] \geqslant C_1\frac{1}{\left(1-|z|\right)^{\alpha}} \tag{51}$$

类似地,令 $n_m$ 最接近 $q^{k+\frac{1}{2}}$ 的数,定义函数式(52):

$$g_2(z)=\sum_{m=0}^{\infty} q^{m(\alpha-1)+\frac{\alpha}{2}} z^{n_m} \tag{52}$$

当 $z$ 满足式(44)时可以得到类似的结果:$\left|g_2(z)\right| \geqslant C_2\frac{1}{\left(1-|z|\right)^{\alpha}}$

当 $|z|<1-\frac{1}{q}$ 时,若 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 不同时为0,令 $f_1(z)=g_1(z)$ , $f_2(z)=g_2(z)$ ;若 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 同时为 0 ,令 $f_1(z)=A+g_1(z)$ , $f_2(z)=g_2(z)$ ,其中 $A$ 是常数,可确保 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 $|z|<1-\frac{1}{q}$ 时不同时为 0 ,且式(53):

$$\left|f_1(z)\right| \geqslant C_1\frac{1}{\left(1-|z|\right)^{\alpha}} \text{ 和 } \left|f_2(z)\right| \geqslant C_2\frac{1}{\left(1-|z|\right)^{\alpha}} \tag{53}$$

综上所述,定理3是成立的。

算子有线性算子和非线性算子之分,而线性算子又分为有界算子和无界性算子,有界算子可以通过其范数来描述某种“作用”和“功能”。假设 $Y$ 是一个赋范线性空间 $X_1$ 到另一个赋范线性空间 $X_2$ 的线性算子,如果 $\sup\left\{\frac{\|Y(x)\|}{\|x\|}\right\}$ 有界,那么就称算子 $Y$ 是有界算子。其中 $x$ 属于赋范线性空 $X_1$ ,且 $X_1$ 中的每个有界集合在 $Y$ 的映射下在 $X_2$ 中都对应着一个有界集合。若 $Y$ 是一个线性算子,如果存在 $C>0$ ,使得 $\|Y(x)\| \leqslant C\|x\|$ ,也称 $Y$ 是一个有界算子。

下面将运用定理3中的不等式来刻画 $uC_{\phi}f(z):\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\rightarrow\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 的有界性。

**定理4** 对于 $\alpha,\beta>0$ ,假设 $u\in H(D)$ , $\phi$ 是 $D$ 上的全纯自映射函数,那么 $uC_{\phi}f(z):\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\rightarrow\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是有界的。

当且仅当式(54):

$$\sup_{z\in D}\frac{\left|u(z)\right|\left(1-|z|^{2}\right)^{\beta}}{\left(1-\left|\phi(z)\right|\right)^{\alpha}}<\infty \tag{54}$$

首先证明必要性。

假设 $uC_{\phi}f(z):\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\rightarrow\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是有界的,令 $f_1$ , $f_2$ 是定理3中所构造的函数,则由定理3可知:

$\left|f_1[\phi(z)]\right|+\left|f_2[\phi(z)]\right|\geqslant\frac{C}{\left[1-\left|\phi(z)\right|\right]^{\alpha}}$，通过计算可以得到式(55)：

$$\begin{aligned}\infty &> \left\|uC_{\phi}f_1(z)\right\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}+\left\|uC_{\phi}f_2(z)\right\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}\\ &=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\beta}\left|u(z)\right|\left|\left|f_1[\phi(z)]\right|+\left|f_2[\phi(z)]\right|\right|\\ &\geqslant C\frac{\left|u(z)\right|(1-|z|^2)^{\beta}}{\left[1-\left|\phi(z)\right|\right]^{\alpha}}\end{aligned}\tag{55}$$

综上必要性成立，下面证明充分性。

假设式(54)成立，则存在 $C>0$，使得 $\frac{\left|u(z)\right|(1-|z|^2)^{\beta}}{\left[1-\left|\phi(z)\right|\right]^{\alpha}}<C$，对于任意的 $f\in\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}$，有式(56)：

$$\begin{aligned}\left\|uf[\phi(z)]\right\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}&=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\beta}\left|u(z)f[\phi(z)]\right|\\ &\leqslant\sup_{z\in D}\left|u(z)\right|(1-|z|^2)^{\beta}\frac{(1-\left|\phi(z)\right|^2)^{\alpha}f[\phi(z)]}{(1-\left|\phi(z)\right|^2)^{\alpha}}\\ &\leqslant\|f\|_{\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}}\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)^{\beta}\left|u(z)\right|}{(1-\left|\phi(z)\right|^2)^{\alpha}}\\ &\leqslant\|f\|_{\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}}\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)^{\beta}\left|u(z)\right|}{(1-\left|\phi(z)\right|)^{\alpha}}\leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}}\end{aligned}\tag{56}$$

综上可知，定理4是成立的。

若 $A$ 的任何开覆盖含有有限子覆盖，就称 $A$ 是一个紧集。$A$ 是紧集，当且仅当它是一个有界闭集；假设 $X_1$ 和 $X_2$ 是赋范线性空间，如果 $Y$ 将 $X_1$ 中的任何有界集合映射成 $X_2$ 中的列紧集，就称线性算子 $Y{:}X_1\to X_2$ 是紧算子。通常会运用引理3来刻画算子的紧性，将得到 $uC_{\phi}f(z){:}\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是紧的充分必要条件。

**定理5** 对于 $\alpha,\beta>0$，假设 $u\in H(D)$，$\phi$ 是 $D$ 上的全纯自映射函数，$uC_{\phi}f(z){:}\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是紧的。当且仅当 $uC_{\phi}f(z){:}\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是有界的，$u(z)\in\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$，且式(57)：

$$\lim_{|\phi(z)|\to1}\frac{\left|u(z)\right|(1-|z|^2)^{\beta}}{\left(1-\left|\phi(z)\right|\right)^{\alpha}}=0\tag{57}$$

首先证明必要性。

假设 $uC_{\phi}f(z){:}\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是有界的且成立。令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}$ 中一列在 $D$ 的紧子集上内闭一致收敛于0的有界序列，则存在 $M>0$，使 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_{\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}}<M$，由引理3可知，要证明 $uC_{\phi}f(z){:}\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是紧的仅需证明 $\lim_{n\to\infty}\left\|(uC_{\phi})(f_n)\right\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}=0$ 即可。由式(57)成立知对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta\in(0,1)$，使得当 $\phi(z)>\delta$ 时，有式(58)：

$$\frac{|u(z)|(1-|z|^2)^{\beta}}{\left[1-|\phi(z)|\right]^{\alpha}}<\frac{\varepsilon}{M} \tag{58}$$

所以,对任意 $z\in D$ ,当 $\phi(z)>\delta$ 时,有式(59):

$$\begin{aligned}\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\left|u(z)f_n[\phi(z)]\right| &= \frac{\left(1-|z|^2\right)^{\beta}|u(z)|}{\left[1-|\phi(z)|\right]^{\alpha}}\left[1-|\phi(z)|\right]^{\alpha}\left|f_n[\phi(z)]\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon\end{aligned} \tag{59}$$

因为 $u(z)\in\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ ,所以存在由 $\delta$ 决定的 $C_{\delta}>0$ ,使得式(60):

$$\sup_{|\phi(z)|\leqslant\delta}\frac{|u(z)|\left(1-|z|^2\right)^{\beta}}{\left[1-|\phi(z)|^2\right]^{\alpha}}\leqslant C_{\delta}\|u(z)\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}} \tag{60}$$

因为 $\{f_n\}_{n\in N}$ 是 $\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}$ 中一列在 $D$ 的紧子集上内闭一致收敛于0的序列,所以: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\phi(z)\leqslant\delta}f_n[\phi(z)]=0$

因此,对任意 $\varepsilon>0$ ,存在 $N\in\mathbb{N}$ ,使得当 $n\geqslant N$ 时,有式(61):

$$\begin{aligned}\sup_{\phi(z)\leq\delta}\left[1-|z|^2\right]^{\beta}\left|u(z)f_n[\phi(z)]\right| &= \sup_{\phi(z)\leqslant\delta}\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\beta}|u(z)|}{\left[1-|\phi(z)|^2\right]^{\alpha}}\left[1-|\phi(z)|^2\right]^{\alpha}\left|f_n[\phi(z)]\right| \\ &\leqslant C_{\delta}\|u(z)\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}\varepsilon\end{aligned} \tag{61}$$

所以式(62):

$$\|uC_{\phi}f(z)\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}=\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\left|u(z)f[\phi(z)]\right|\leqslant\left[1+C_{\delta}\|u(z)\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}\right]\varepsilon \tag{62}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|u(z)f[\phi(z)]\right\|_{\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}}=0$ ,由引理3可得: $uC_{\phi}f(z):\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$

接着证明充分性。

现在运用反证法证明。若 $uC_{\phi}f(z):\mathscr{H}_{\alpha}^{\infty}\to\mathscr{H}_{\beta}^{\infty}$ 是紧的,则式(57)成立。假设式(57)不成立,则存在一个 $\varepsilon_0>0$ 和数列 $\{z_n\}\subset D$ ,使得当 $\phi(z_n)\leqslant1-\frac{1}{n}$ 时,有式(63):

$$\frac{|u(z)|(1-|z|^2)^{\beta}}{\left[1-|\phi(z)|\right]^{\alpha}}\geqslant\varepsilon_0 \tag{63}$$

假设 $w_n=\phi(z_n)\to w_0$ ,且 $|w_0|=1$ ,设置函数式(64):

$$\begin{aligned}f_0(z)&=\frac{1}{\left(1-\overline{w_0}z\right)^{\alpha}}\\ f_n(z)&=\frac{1}{\left[1-\overline{\phi(z)}z\right]^{\alpha}}=\frac{1}{\left(1-\overline{w_n}z\right)^{\alpha}}\end{aligned} \tag{64}$$

因为式(65):

$$\sup_{z\to D}\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left|f_n(z)\right|=\sup_{z\to D}\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left|\frac{1}{\left[1-\overline{\phi(z)}z\right]^\alpha}\right|\leqslant 2^\alpha \tag{65}$$

所以 $f_n(z)\in\mathscr{H}_\alpha^\infty$，$\left\|f_n(z)\right\|_{\mathscr{H}_\alpha^\infty}\leqslant 2^\alpha$，且当 $n\to\infty$ 时，$f_n(z)\to f_0(z)$，由 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 的定义可得式(60)：

$$\begin{aligned}&\left\|uC_\phi f_n(z)-uC_\phi f_0(z)\right\|_{\mathscr{H}_\beta^\infty}\geqslant\left(1-|z_n|^2\right)^\beta\left|uC_\phi f_n(z_n)-uC_\phi f_0(z_n)\right|\\&=|u(z)|\left(1-|z_n|^2\right)^\beta\left|\frac{1}{\left(1-|w_n|^2\right)^\alpha}-\frac{1}{\left(1-\overline{w_0}w_n\right)^\alpha}\right|\\&=\frac{|u(z)|\left(1-|z_n|^2\right)^\beta}{\left(1-|w_n|^2\right)^\alpha}\left|1-\left(1+w_n\frac{\overline{w_0-w_n}}{1-w_0w_n}\right)^\alpha\right|\\&\geqslant\varepsilon_0\left|1-\left(1+w_n\frac{\overline{w_0-w_n}}{1-w_0w_n}\right)^\alpha\right|\end{aligned}\tag{66}$$

因为 $uC_\phi f$ 是紧的，所以当 $n\to\infty$ 时，$\left\|uC_\phi f_n(z)-uC_\phi f_0(z)\right\|_{\mathscr{H}_\beta^\infty}\to 0$，所以存在一个子序列 $\left\{w_{n_k}\right\}\subset\left\{w_n\right\}$，使得式(67)：

$$\lim_{k\to\infty}\left|1-\left(1+w_{n_k}\frac{\overline{w_0-w_{n_k}}}{1-\overline{w_0}w_{n_k}}\right)^\alpha\right|=0 \tag{67}$$

所以有式(68)：

$$\lim_{k\to\infty}w_{n_k}\frac{\overline{w_0-w_{n_k}}}{1-\overline{w_0}w_{n_k}}=0 \tag{68}$$

因为 $|w_0|=1$，且 $\overline{w_{n_k}}\in D$，所以当 $k\to\infty$ 时，$\left|w_{n_k}\frac{\overline{w_0-w_{n_k}}}{1-w_0w_{n_k}}\right|=\left|w_{n_k}\right|\to 0$

这意味着，对任意 $n$，有 $w_n=\phi(z_n)\geqslant 1-\frac{1}{n}$，与前面的假设相矛盾，因此，若 $uC_\phi f(z)$:$\mathscr{H}_\alpha^\infty\to\mathscr{H}_\beta^\infty$ 是紧的，则式(57)成立。

综上可知，定理5成立。

对复合算子和加权复合算子的研究目前还存在许多问题没有解决，针对单位开圆盘上的Bers空间，利用加权Bers空间中的一个定理，给出了一个关于加权复合算子有界性和紧性的结果。当然，刻画有界性的方法还有很多。例如：Giménez等[22]定义了 $\mu-Bloch$ 空间，其中 $\mu$:(0，1]$\to R$ 是一个正的连续函数，且满足 $\lim_{t\to 0^+}\mu(t)=0$，在研究该空间的有界性时，对 $\mu$ 进行了真实且合理的拓展，$\mu$ 推广到复平面空间上得到了全纯函数 $\tilde{\mu}$，其中 $\tilde{\mu}$ 需要满足3个特定的条件。运用 $\tilde{\mu}$ 与 $\mu$ 的关系得到了加权复合算子在 $\mu-Bloch$ 空间中有界和紧的充分必要条件，且运用采样集的概念得到了 $\mu-Bloch$ 空间中加权复合算子的一个下界。

## 5 结论和讨论

复函数空间已经经历了令人瞩目的蜕变，在这一系列的重大进展中，被认为难以解决

的核心问题得到了解决，丰富的理论知识也应运而生。其现代学科是复函数理论与泛函分析的结合，并在高维空间中得到了推广。本文研究的Hadamard gaps在复函数论方面可以用来研究全纯和超全纯函数的某些类和空间，例如，表征各种各样的全纯函数以及泰勒级数和傅里叶级数的系数展开，而利用这些系数展开研究函数的特征是研究函数空间和算子理论的重要任务之一。通过研究得到具有Hadamard gaps的解析函数属于加权Bers空间和加权Bers空间的充分必要条件。

复函数空间与算子理论的关系十分密切。例如，通过算子可以将一个空间映射到另一个空间，而这两个空间可以相同，也可以不同，也可以在单个空间里研究算子的性质，比如Bergman空间上积分算子的有界性、线性和紧性。现在，算子理论也已经被推广到了无穷维空间上。本文在Bers空间中找到了两个不同的函数，运用定理1得到了这两个函数绝对值的和的一个不等式。有了这个不等式，可以在不构造测试函数的前提下得到单位开圆盘上从Bers空间 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 到 $\mathscr{H}_\beta^\infty$ 的加权复合算子是有界的充分必要条件，这个下界对复函数空间和算子理论具有重要意义。算子的紧性是一种特殊的有界性，保证算子的像空间是紧的，是一个重要概念，而且本文在定理5中刻画了从Bers空间 $\mathscr{H}_\alpha^\infty$ 到 $\mathscr{H}_\beta^\infty$ 的加权复合算子是紧的充分必要条件。

## 6 参考文献


[1] Xiang Lingzhu. Generalized weighted composition operators from Bers-type spaces into Bloch-type spaces[J]. Mathematical Inequalities & Applications, 2014,17(1):187-195.

[2] 张建肖，刘晓俊. Hadamard缺项幂级数及双曲完备极小曲面[J]. 上海理工大学学报，2022,44(4):364-367.

[3] Yamashita H. Gap series and α-Bloch functions[J]. Yokohama Mathematical Journal, 1980,28(1&2):31-36.

[4] Lou ZengJian. Composition operator on Bloch type spaces[J]. Analysis, 2003,23(1):81-96

[5] Stević S. Bloch-type functions with Hadamard gaps[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 208(2): 416-422.

[6] 杜俊涛. Hadamard缺项的μ-Bloch函数的系数特征[J]. 太原学院学报（自然科学版），2018,36(3):14-16.

[7] Qian Ruishen, Li Songxiao. Lacunary series in Dirichlet-type spaces and pseudoanalytic extension[J]. Computational Methods and Function Theory, 2018,18(3):409-425.

[8] Ahmed E A, Rashwan A R, Kama A. Hadamard Gaps in Weighted Logarithmic Bloch Space[M]. Weimar, Germany, Bauhaus-Universität, 2010:13-25.

[9] 苏简兵，王子燕. 第二类广义华罗庚域上从α-Bloch空间到Bers型空间的加权复合算子的有界性和紧性[J]. 江苏师范大学学报（自然科学版），2024,42(3):39-48.

[10] 柏宏斌. 第一类Cartan-Hartogs域上的Bers型空间上的加权复合算子[J]. 四川大学学报（自然科学版），2022,59(4):36-41.

[11] 余建. Bers型空间上加权复合微分前置算子[J]. 科技风，2017(6):39-40.

[12] Miao Jie. A property of analytic functions with Hadamard gaps[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1992,45(1):105-112.

［13］ Wilhelm H F. On the zeros of power series with Hadamard gaps［J］. Nagoya Mathematical Journal，1967，29：167-174.

［14］ He Xiangwei,Jiang Lijian. Composition operator on Bers-type spaces［J］. Acta Mathematica Scientia，2002，22（3）：404-412.

［15］ 税显钊. Hardy空间中几类具有特殊性质的复合算子［D］. 成都：电子科技大学，2024：12-38

［16］ 苏简兵，吴鑫. 一类广义Cartan-Hartogs域上加权Bloch空间之间复合算子的有界性和紧性［J］. 数学年刊A辑（中文版），2023，44（4）：435-448.

［17］ 徐瀚. Toeplitz算子与复合算子［D］. 重庆：重庆大学，2023:18-24

［18］ Zhu Xiangling. Products of differentiation，composition and multiplication from Bergman type spaces to Bers type spaces［J］. Integral Transforms and Special Functions，2007，18（3）：223-231.

［19］ Liang Yuxia, ZhouZehua, Dong Xingtang. Weighted composition operator from Bers-type space to Bloch-type space on the unit ball［J］. The Bulletin of the Malaysian Mathematical，2013，36（3）：833-844.

［20］ Jiang Zhijie，Li Zuoan. Weighted composition operators on Bers-type spaces of Loo-Keng Hua domains［J］. Bulletin of the Korean Mathematical Society，2020，57（3）：583-595.

［21］ 周锋. 从单位球上Bergman型空间到Bers型空间的加权复合算子［J］. 四川大学学报（自然科学版），2012，49（2）：294-298.

［22］ Jiménez J，María T R，César J F. Composition operators on -Bloch type spaces［J］. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo，2010，59：107-119.

## Analytic Functions with Hadamard Gaps on the Weighted Bers Space

Zhang Yingqin, Yang Congli*, Luo Ling

（School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China）

**Abstract:** By using a positive continuous function $\omega$ on $(0,\ 1]$, the weighted Bers space $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega}$ and the little weighted Bers space $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega,0}$ are defined. The necessary and sufficient conditions for an analytic function with Hadamard gaps on the unit open disk to belong to these two spaces are characterized. By using the conclusion that $f(x)\in\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha,\omega}$ if and only if $\sup n_k^{-\alpha}|a_{n_k}|/\omega(1/n_k)=0$ as $k\to\infty$, it is proved that there exist two different functions $f_1(x)$ and $f_2(x)$ in the Bers space $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}$, and the sum of their moduli has a lower bound, that is, $|f_1(z)|+|f_2(z)|\geq C/(1-|z|)^{\alpha}$. The value of this paper is that, without constructing test functions, by using this lower bound, the necessary and sufficient conditions for the boundedness of the weighted composition operator from the Bers space $\mathscr{H}^{\infty}_{\alpha}$ to the Bers space $\mathscr{H}^{\infty}_{\beta}$ on the unit disk are obtained.

**Keywords:** Hadamard gaps; Weighted Bers space; Analytic function; Boundedness

〔责任编校：江　伟　杨　洪〕