

# Fermat型 $q$ -差分微分方程的整函数解

杨龙燕<sup>1</sup>,杨 祺<sup>1\*</sup>,刘晓文<sup>2</sup>

(1.新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830054;

2.新疆建设职业技术学院 公共教学部,新疆 乌鲁木齐 830054)

**摘 要:**采用值分布理论及复微分-差分方程理论,探讨了带有微分项及 $q$ -差分项 $(f^{(k)}(z))^2 + [f(qz+c)-f(z)]^2 = Q(z)$ 的Fermat型方程超越整函数解的解析形式。根据Hadamard因子分解定理得到满足解的一个方程组,计算出 $f^{(k)}(z)$ 与 $f(qz+c)-f(z)$ 的明确表达形式。在函数 $f_j(z)(j=1,2,3)$ 求和为1的方程中,基于亚纯函数的唯一性定理推断 $f_j(z)(j=1,2,3)$ 中的两个函数恒等于1,并分两种情形进行了探讨,系统考察了 $k$ 在所有可能取值情况下的奇偶性分布特征,得到了各个变量之间的关系,为以后复微分-差分方程解的研究提供了更多思路和技巧。

**关键词:**Fermat型 $q$ -差分微分方程;整函数解;有限级

**中图分类号:**O174.52 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-055X(2026)01-0078-07

假定已熟知复分析中有关亚纯函数值分布理论的核心工具,如奈望林纳基本定理、特征函数 $T(r,f)$ 、计数函数 $N(r,f)$ 和 $\bar{N}(r,f)$ ,以及 $S(r,f)=o(T(r,f))$ , $(r \rightarrow \infty, r \notin E)$ (其中 $E$ 是一个 $\rho(f) < \infty$ 的线性测度集合)。在复分析中,一般用 $\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$ 来刻画复平面 $C$ 上亚纯函数 $f$ 增长性的核心指标,并将 $\rho(f)$ 定义为级。在值分布论中,格罗斯(Gross)<sup>[1-2]</sup>最早研究了Fermat型函数方程,后来杨重骏等<sup>[3-8]</sup>又将Fermat型函数方程推广到了微分差分领域,并研究了其解的存在性及其存在形式。最近几年,复域差分微分方程以及 $q$ -差分方程已经成为复分析领域研究的热点问题,众多学者针对此类非线性微分-差分方程解的存在性和增长性展开了深入研究,取得了若干重要的结果<sup>[9-16]</sup>。

收稿日期:2025-06-24

基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金项目“关于费马型复微分-差分方程整函数解的研究”(2024D01A91);国家自然科学基金项目“正规族理论及其应用”(11961068)。

作者简介:杨龙燕,女,山东禹城人,主要从事复分析研究;杨祺,女,新疆阿克苏人,教授,主要从事复分析方向研究;刘晓文,女,新疆塔城人,教授,主要从事计算机技术研究。

\*通信作者:杨祺

2013年,刘凯等<sup>[17]</sup>研究了 Fermat 型微分-差分方程,见式(1):

$$[f^{(k)}(z)]^2 + f(z+c)^2 = 1 \quad (1)$$

的  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解,并证明了定理 1。

**定理 1** 若  $f(z)$  是方程(1)的  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解,则一定有下列情形之一发生:

(1) 如若  $k$  为奇数,则  $f(z) = \mp \sin(Aiz + Bi)$ ,  $A^k = \pm i$ ,  $c = \frac{k\pi i}{A}$ , 其中  $B$  为常数。

(2) 如若  $k$  为偶数,则  $f(z) = \pm \cos(Aiz + Bi)$ ,  $A^k = \pm 1$ ,  $c = \frac{k\pi i + \frac{\pi i}{2}}{A}$ , 其中  $B$  为常数。

2015年,陈敏凤等<sup>[18]</sup>研究了 Fermat 型 q-差分微分方程,见式(2):

$$[f^{(k)}(z)]^2 + [f(qz) - f(z)]^2 = 1 \quad (2)$$

的  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解,并证明了定理 2。

**定理 2** 若  $f(z)$  是方程(2)的  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解,则一定有下列情形之一发生:

(1) 如若  $q = -1$ ,  $k$  为奇数,则  $f(z) = \mp \frac{1}{2} \sin(iaz) + c$ ,  $a^k = 2i$ , 其中  $c$  为常数。

(2) 如若  $q \neq -1$  或  $k$  为偶数,则方程(2)不存在  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解。

## 1 引理

**引理 1**<sup>[4]</sup> 设  $f_1, f_2$  为两个亚纯函数,  $a, b_1, b_2$  为  $f_1, f_2$  的小函数,并满足  $ab_1b_2$  不恒等于 0 且  $b_1f_1 + b_2f_2 = a$ , 则式(3):

$$T(r, f_1) \leq \bar{N}(r, f_1) + \bar{N}(r, \frac{1}{f_1}) + \bar{N}(r, \frac{1}{f_2}) + S(r, f_1) \quad (3)$$

**引理 2**<sup>[19]</sup> 设  $f_j(z) (j=1, 2, 3)$  是复平面上的亚纯函数,  $f_1(z)$  是非常数, 如果  $\sum_{j=1}^3 f_j(z) \equiv 1$ , 且式(4):

$$\sum_{j=1}^3 N(r, \frac{1}{f_j}) + 2 \sum_{j=1}^3 \bar{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r) \quad (4)$$

其中  $\lambda < 1$ ,  $T(r) = \max_{1 \leq j \leq 3} T(r, f_j)$ , 则:  $f_2 \equiv 1$  或  $f_3 \equiv 1$

**引理 3**<sup>[17]</sup> 设  $P(z), Q(z)$  为非零多项式, 如果复微分-差分方程, 见式(5):

$$[f(z+c) - f(z)]^2 + P(z)^2 [f^{(k)}(z)]^2 = Q(z) \quad (5)$$

存在  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解, 则  $P(z) \equiv A$ ,  $Q(z) = q_1q_2$ , 其中  $A, q_1, q_2$  为常数, 且  $k$  必须是奇数。因此,  $f(z) = \frac{-q_1e^{az+b} - q_2e^{-az-b}}{4} + c_1$  (其中  $a, b, c, c_1 \in C$  为常数), 并使:

$$a^k = \frac{2i}{A}, c = \frac{(2m+1)\pi i}{a}, m \in Z$$

## 2 主要定理

通过上述定理与引理, 在前人研究的基础上, 考虑了  $\rho(f) < \infty$  的 Fermat 型带有微分项和 q-差分项方程式(6)的整函数解的存在性与解析形式。

$$[f^{(k)}(z)]^2 + [f(qz+c)-f(z)]^2 = Q(z) \tag{6}$$

其中  $Q(z)(\neq 0)$  是一个多项式,  $q, c, k$  都为非零常数, 于是便得到了定理3。

**定理3** 若  $f(z)$  是方程(6)的  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解, 则  $Q(z) = q_1 q_2 (q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$  为两个常数), 并且以下情形之一成立:

(1) 如若  $q = -1, k$  为奇数, 则  $f(z) = \frac{q_1 e^{az+b} + q_2 (-1)^k e^{-az-b}}{2a^k} + B_{k-1}(z)$ , 其中:

$$B_{k-1}(-z+c) - B_{k-1}(z) \equiv 0, a^k = -2i, q_1 = q_2 e^{-ac-2b} \quad (a, b, c \text{ 为常数}, k \in \mathbb{Z})$$

(2) 如若  $q = 1, k$  为奇数, 则  $f(z) = \frac{-q_1 e^{az+b} - q_2 e^{-az-b}}{4} + c_1, a^k = 2i, ac = (2k+1)\pi i$ , 其中  $a, b, c, c_1$  为常数,  $k \in \mathbb{Z}$ 。

(3) 如若  $q \neq \pm 1$  或  $k$  为偶数, 则方程(6)不存在  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解。

注: 如果将方程(6)中的“ $f^{(k)}(z)$ ”替换为“ $L(f)(z)$ ”, 即讨论如下更为一般形式的差分微分方程见式(7):

$$[L(f)(z)]^2 + [f(qz+c)-f(z)]^2 = Q(z) \tag{7}$$

其中,  $L(f)(z) = f^{(k)}(z) + a_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + \dots + a_0(z)f(z)$ ,  $Q(z)(\neq 0)$  为多项式,  $q, c, k$  为非零常数,  $a_{k-1}(z), \dots, a_0(z)$  为全纯函数。那么当  $a_{k-1}(z), \dots, a_0(z)$  恒为零时, 可以得到定理3的结论; 而当  $a_{k-1}(z), \dots, a_0(z)$  不恒为零且为  $f(z)$  的小函数时, 又能得到什么定理? 此时定理3的结论是否还成立? 这一问题目前还未解决, 可以猜想  $[L(f)(z)]^2 + [f(qz+c)-f(z)]^2 = Q(z)$  存在  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解。

### 3 定理的证明

假设  $f(z)$  为方程(6)的  $\rho(f) < \infty$  的超越整函数解, 那么方程(6)可以重新整理为式(8):

$$\{f^{(k)}(z) + i[f(qz+c)-f(z)]\} \{f^{(k)}(z) - i[f(qz+c)-f(z)]\} = Q(z) \tag{8}$$

由于  $Q(z)$  为多项式, 则  $f^{(k)}(z) + i[f(qz+c)-f(z)], f^{(k)}(z) - i[f(qz+c)-f(z)]$  至多只有有限多个零点。由式(8)知, 存在多项式  $h(z)$ , 使得方程组(9):

$$\begin{cases} f^{(k)}(z) + i[f(qz+c)-f(z)] = Q_1(z)e^{h(z)} \\ f^{(k)}(z) - i[f(qz+c)-f(z)] = Q_2(z)e^{-h(z)} \end{cases} \tag{9}$$

其中  $h(z)$  是一个非常数多项式,  $Q(z) = Q_1(z)Q_2(z)$ , 且  $Q_i(z)(i=1, 2)$  为非零多项式。由方程组(9)知方程组(10):

$$\begin{cases} f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z)e^{h(z)} + Q_2(z)e^{-h(z)}}{2} \\ f(qz+c)-f(z) = \frac{Q_1(z)e^{h(z)} - Q_2(z)e^{-h(z)}}{2i} \end{cases} \tag{10}$$

对方程组(10)的第二个方程求  $k$  阶导数得式(11):

$$q^k f^{(k)}(qz+c) - f^{(k)}(z) = \frac{A_1(z)e^{h(z)} + A_2(z)e^{-h(z)}}{2i} \tag{11}$$

其中:  $A_1(z) = [h'(z)]^k Q_1(z) + k[h'(z)]^{k-1} Q_1'(z) + \dots + Q_1^{(k)}(z) + Q_1(z)P_{k-1}[h'(z)]$ ,

$$A_2(z) = -[-h'(z)]^k Q_2(z) - k[-h'(z)]^{k-1} Q_2'(z) - \dots - Q_2^{(k)}(z) - Q_2(z)R_{k-1}[-h'(z)]$$

$P_{k-1}, R_{k-1}$  为关于  $h', \dots, h^{(k)}$  的多项式, 并且:  $\deg P_{k-1} \leq k-1, \deg R_{k-1} \leq k-1$

再结合方程组(10)的第一个方程得到式(12):

$$\frac{A_1(z)+iQ_1(z)}{iq^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c)+h(z)} + \frac{A_2(z)+iQ_2(z)}{iq^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c)-h(z)} - \frac{Q_1(qz+c)}{Q_2(qz+c)} e^{2h(qz+c)} \equiv 1 \quad (12)$$

断言  $A_1(z)+iQ_1(z)$  与  $A_2(z)+iQ_2(z)$  都不恒等于 0。

(i) 若  $A_1(z)+iQ_1(z) \equiv 0$  且  $A_2(z)+iQ_2(z) \equiv 0$ , 则有式(13):

$$-\frac{Q_1(qz+c)}{Q_2(qz+c)} e^{2h(qz+c)} \equiv 1 \quad (13)$$

这与  $h(z)$  为非常数多项式矛盾。

(ii) 若  $A_1(z)+iQ_1(z)$  与  $A_2(z)+iQ_2(z)$  之一恒为 0, 不失一般性, 不妨设  $A_1(z)+iQ_1(z) \equiv 0$ , 则有式(14):

$$\frac{A_2(z)+iQ_2(z)}{iq^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c)-h(z)} - \frac{Q_1(qz+c)}{Q_2(qz+c)} e^{2h(qz+c)} \equiv 1 \quad (14)$$

此时  $h(qz+c)-h(z)$  为非常数。若不然, 由  $h(z)$  为非常数多项式及式(14)知,  $Q_1(qz+c) \equiv 0$ , 矛盾。由引理 1 知式(15):

$$T(r, e^{2h(qz+c)}) \leq \bar{N}(r, e^{2h(qz+c)}) + \bar{N}(r, \frac{1}{e^{2h(qz+c)}}) + \bar{N}(r, \frac{1}{e^{h(qz+c)-h(z)}}) + S(r, e^{2h(qz+c)}) = S(r, e^{2h(qz+c)}) \quad (15)$$

与  $e^{2h(qz+c)}$  为超越亚纯函数矛盾。因此, 断言成立。

由引理 2 与式(12)知式(16):

$$\frac{A_1(z)+iQ_1(z)}{iq^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c)+h(z)} \equiv 1 \text{ 或 } \frac{A_2(z)+iQ_2(z)}{iq^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c)-h(z)} \equiv 1 \quad (16)$$

因此, 以下可以分两种情形讨论:

**情形 1** 若  $\frac{A_1(z)+iQ_1(z)}{iq^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c)+h(z)} \equiv 1$ , 则  $h(qz+c)+h(z)$  为常数。由式(12)知式(17):

$$\frac{A_2(z)+iQ_2(z)}{iq^k Q_1(qz+c)} = e^{h(qz+c)+h(z)} \quad (17)$$

下面证明  $\deg(h(z))=1$ , 否则, 不妨设  $\deg(h(z)) \geq 2$ , 由  $(h'(z))^k + P_{k-1}(h'(z)) + i$  不恒等于 0,  $-(h'(z))^k - R_{k-1}(h'(z)) + i$  不恒等于 0 可知方程组(18):

$$\begin{cases} k \deg h' + \deg Q_1 = \deg Q_2 \\ k \deg h' + \deg Q_2 = \deg Q_1 \end{cases} \quad (18)$$

则有  $2k \deg h' = 0$ , 即  $\deg h = 1$  矛盾。因此:  $\deg(h(z))=1$

为了不失一般性, 不妨设  $h(z)=az+b$  (其中  $a$  为非零常数,  $b$  为任意常数), 则  $h(qz+c)+h(z)=(q+1)az+ac+2b$ , 因为  $h(qz+c)+h(z)$  为常数, 所以  $q=-1$ , 于是:

$$(a^k+i)Q_1(z)+ka^{k-1}Q_1'(z)+\cdots+Q_1^{(k)}(z)=(-1)^k i e^{-ac-2b} Q_2(-z+c) \quad (19)$$

$$[-(-a)^k+i]Q_2(z)-k(-a)^{k-1}Q_2'(z)-\cdots-Q_2^{(k)}(z)=(-1)^k i e^{ac+2b} Q_1(-z+c) \quad (20)$$

若  $k$  为奇数, 由式(19)与式(20)知, 有式(21)和式(22):

$$(a^k+i)Q_1(z)+ka^{k-1}Q_1'(z)+\cdots+Q_1^{(k)}(z)=-i e^{-ac-2b} Q_2(-z+c) \quad (21)$$

$$(a^k+i)Q_2(z)-ka^{k-1}Q_2'(z)+\cdots-Q_2^{(k)}(z)=-i e^{ac+2b} Q_1(-z+c) \quad (22)$$

下面证明  $a^k+i \neq 0$ , 反之, 若  $a^k+i=0$ , 则由式(21)与式(22)知:  $\deg Q_1-1=\deg Q_2$ ,  $\deg Q_2-1=\deg Q_1$  矛盾。因此:  $a^k+i \neq 0$

由  $a^k + i \neq 0$  知,  $\deg Q_1(z) = \deg Q_2(z)$ , 为了不失一般性, 不妨设  $Q_1(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 (a_n \neq 0)$ ,  $Q_2(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0 (b_n \neq 0)$ , 在式(21)与式(22)中分别比较  $z^n, z^{n-1}$  的系数知式(23)和式(24):

$$\begin{cases} (a^k + i)a_n = (-1)^{n+1} i e^{-ac-2b} b_n \\ (a^k + i)b_n = (-1)^{n+1} i e^{ac+2b} a_n \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} (a^k + i)a_{n-1} + k a^{k-1} n a_n = (-1)^n i e^{-ac-2b} (n c b_n + b_{n-1}) \\ (a^k + i)b_{n-1} - k a^{k-1} n b_n = (-1)^n i e^{ac+2b} (n c a_n + a_{n-1}) \end{cases} \quad (24)$$

由方程组(23)知,  $a^k = -2i$ , 则方程组(24)可改写为方程组(25):

$$\begin{cases} -i a_{n-1} + k a^{k-1} n a_n = \frac{i a_n}{b_n} (n c b_n + b_{n-1}) \\ -i b_{n-1} - k a^{k-1} n b_n = \frac{i b_n}{a_n} (n c a_n + a_{n-1}) \end{cases} \quad (25)$$

由方程组(25)知,  $2k a^{k-1} n a_n b_n = 0$ , 则有  $n = 0$ , 即  $Q_1(z), Q_2(z)$  均为非零常数。为了不失一般性, 不妨设  $Q_1(z) = q_1, Q_2(z) = q_2$ , 由方程组(10)知方程组(26):

$$\begin{cases} f^{(k)}(z) = \frac{q_1 e^{az+b} + q_2 e^{-az-b}}{2} \\ f(-z+c) - f(z) = \frac{q_1 e^{az+b} - q_2 e^{-az-b}}{2i} \end{cases} \quad (26)$$

即式(27):

$$f(z) = \frac{q_1 e^{az+b} + q_2 (-1)^k e^{-az-b}}{2a^k} + B_{k-1}(z) \quad (27)$$

其中  $B_{k-1}(z)$  为  $z$  的多项式且  $\deg B_{k-1} \leq k-1$ 。因此:  $q_1 = q_2 e^{-ac-2b}, B_{k-1}(-z+c) - B_{k-1}(z) \equiv 0$

若  $k$  为偶数, 由式(19)与式(20)可知, 有方程(28)和方程(29):

$$(a^k + i)Q_1(z) + k a^{k-1} Q_1'(z) + \dots + Q_1^{(k)}(z) = i e^{-ac-2b} Q_2(-z+c) \quad (28)$$

$$(-a^k + i)Q_2(z) + k a^{k-1} Q_2'(z) - \dots - Q_2^{(k)}(z) = i e^{ac+2b} Q_1(-z+c) \quad (29)$$

下面证明:  $a^k + i \neq 0$  且  $-a^k + i \neq 0$

若  $a^k + i = 0$  且  $-a^k + i = 0$ , 由式(28)与式(29)知:  $\deg Q_1 - 1 = \deg Q_2, \deg Q_2 - 1 = \deg Q_1$  矛盾。

若  $a^k + i$  与  $-a^k + i$  之一为 0, 为了不失一般性, 不妨设  $a^k + i = 0$  且  $-a^k + i \neq 0$ , 由式(28)与式(29)知:  $\deg Q_1 - 1 = \deg Q_2, \deg Q_2 = \deg Q_1$  矛盾。

因此:  $a^k + i \neq 0$  且  $-a^k + i \neq 0$

由  $a^k + i \neq 0$  且  $-a^k + i \neq 0$  知:  $\deg Q_1 = \deg Q_2$ , 为了不失一般性, 不妨设  $Q_1(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 (a_n \neq 0), Q_2(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0 (b_n \neq 0)$ , 在式(28)与式(29)中比较  $z^n$  的系数知式(30):

$$\begin{cases} (a^k + i)a_n = (-1)^n i e^{-ac-2b} b_n \\ (-a^k + i)b_n = (-1)^n i e^{ac+2b} a_n \end{cases} \quad (30)$$

由方程组(30)可知,  $a^k = 0$  矛盾。

**情形 2** 若  $\frac{A_2(z) + i Q_2(z)}{i q^k Q_2(qz+c)} e^{h(qz+c) - h(z)} \equiv 1$ , 则  $h(qz+c) - h(z)$  为常数。

同理可得,  $\deg(h(z))=1$ , 为了不失一般性, 不妨设  $h(z)=az+b$  (其中  $a$  为非零常数,  $b$  为任意常数), 则  $h(qz+c)-h(z)=(q-1)az+ac$ , 因为  $h(qz+c)-h(z)$  为常数, 因此  $q=1$ 。根据引理 3 可知:  $Q(z)=q_1q_2$ , 如若  $k$  为奇数, 则  $f(z)=\frac{-q_1e^{az+b}-q_2e^{-az-b}}{4}+c_1$ , 且  $a, b, c, c_1 \in C$  为常数, 同时有  $a^k=2i, c=\frac{(2m+1)\pi i}{a}, m \in Z$ ; 如若  $k$  为偶数, 方程(6)没有  $\rho(f)<\infty$  的超越整函数解。

综上所述, 即可得证。

#### 4 研究结论

利用亚纯函数的唯一性定理, 研究  $\rho(f)<\infty$  的非线性复微分-差分方程  $(f^{(k)}(z))^2+[f(qz+c)-f(z)]^2=Q(z)$  的超越整函数解, 得到以下结论:

首先, 通过前人所得定理推出  $f_j(z)(j=1, 2, 3)$  中的两个函数恒等于 1 并分两种情形;

其次, 对每种情形进行讨论, 均能得到非线性复微分-差分方程等式右边的非零多项式  $Q(z)$  退化为常数;

最后, 整理得到复微分-差分方程  $[f^{(k)}(z)]^2+[f(qz+c)-f(z)]^2=Q(z)$  的  $\rho(f)<\infty$  超越整函数解的存在形式, 并将前人的结果推广为更一般的形式。

#### 5 参考文献

- [1] Fred G. On the equation  $x^n+y^n=z^n$  [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1966, 72(6):86-88.
- [2] Fred G. On the equation  $f(z)^n+g(z)^n=h(z)^n$  [J]. The American Mathematical Monthly, 1966, 73(10): 1093-1096.
- [3] Yang Chongjun. A generalization of a theorem of P. Montel on entire functions [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1970, 26(2):332-334.
- [4] Yang Chongjun, Li Ping. On the Transcendental Solutions type of a certain of nonlinear differential equations [J]. Arch Math, 2004, 82(5):442-448.
- [5] Liu Kai, Cao Tingbin. Entire solutions of Fermat Type  $Q$ -Difference Differential Equations [J]. Electron. J. Diff. Equ, 2013(59):1-10.
- [6] Liu Kai, Cao Tingbin, Cao Hongzhe. Entire Solutions of Fermat Type Differential-Difference Equations [J]. Archiv der Mathematik, 2012, 99(2):147-155.
- [7] Liu Xinling, Liu Kai. The growth on Entire Solutions of Fermat Type  $Q$ -Differential Equation [J]. Math, 2017, 37(4):761-768.
- [8] Xu Ling, Cao Tingbin. Solutions of Complex Fermat-Type Partial Difference and Differential-Difference Equations [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15(6):227.
- [9] Wang Qiong, Chen Wei, Hu Peichu. On Entire Solutions of two certain Fermat-Type Differential - Difference Equations [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43(4):2951-2965.
- [10] Wang Hua, Xu Hongyan, Tu Jin. The existence and forms of solutions for some Fermat-Type Differential-Difference Equations [J]. AIMS Mathematics, 2020, 5(1):685-700.
- [11] 方成鸿, 徐洪焱. Fermat 型复微分-差分方程的整函数解 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2022, 43(1):1-16.

- [12] Lin Shengqi, Chen Jianfeng. Nonexistence of solutions for a class of Nonlinear Complex Differential Difference Equations[J]. Journal of Mathematical physics, 2021, 41(1): 69–80.
- [13] Long Jin, Qin Dan. On Entire Solutions of some Fermat Type Differential–Difference Equations[J]. Applied Mathematics–A Journal of Chinese Universities, 2024, 39(1): 69–88.
- [14] 龚翌晖, 杨祺. Fermat 型复微分差分方程的整函数解[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2024, 43(3): 69–74.
- [15] 杨龙燕, 杨祺. Fermat 型复微分–差分方程的有限级超越整函数解[J]. 山东航空学院学报, 2024, 41(6): 78–84.
- [16] 邱迪. Fermat 型微分差分方程和  $q$ -微分差分方程整函数解的存在性[D]. 南昌: 江西科技师范大学, 2022.
- [17] Liu Kai, Yang Lianzhong. On Entire Solutions of some Differential–Difference Equations[J]. Computational Methods and Function Theory, 2013, 13(3): 433–447.
- [18] Chen Minfeng, Gao Zongsheng. Entire Solutions of Differential–Difference Equation and Fermat Type  $Q$ -Difference Differential Equations[J]. Communications of the Korean Mathematical Society, 2015, 30(4): 447–456.
- [19] Yang Chongjun, Yi Hongxun. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions[M]. Beijing: Science Press, 2003: 90–108.

## Entire Solutions of Fermat Type $q$ -Difference Differential Equations

Yang Longyan<sup>1</sup>, Yang Qi<sup>\*</sup>, Liu Xiaowen<sup>2</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China;

2. Department of Public Education, Xinjiang Vocational and Technical College of Construction, Urumqi 830054, China)

**Abstract:** Utilizing Nevanlinna and complex differential-difference equations theory, the precise analytic forms of transcendental entire solutions are explored for Fermat type equations of the form  $[f^{(k)}(z)]^2 + [f(qz+c) - f(z)]^2 = Q(z)$  involving  $q$ -difference and derivatives. Firstly, system of equations satisfying the solution are obtained by Hadamard factorization theorem, and the concrete forms of  $f^{(k)}(z)$  and  $f(qz+c) - f(z)$  are calculated. Secondly, in the equation that the sum of the function  $f_j(z) (j=1, 2, 3)$  is 1, the uniqueness theorem of meromorphic function is used to judge that the two functions in  $f_j(z) (j=1, 2, 3)$  are identical to 1, and the discussion is divided into two cases. Finally, in each case,  $k$  is odd and even, and the relationship between the variables is obtained. Thereby leads to more ideas and techniques for studying solutions of complex differential-difference equations in future research.

**Keywords:** Fermat-type  $q$ -difference differential equations; Entire solutions; Finite order

[责任编辑: 江伟 张俊英]