文章编号:1671-4229(2025)02-0051-06

临界密度下欧拉-泊松系统的 modified Korteweg-de Vries-ZK 极限

席肖玉，张美玲
(广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州　510006)

摘　要：文章重点研究在三维情形下等离子体中产生的欧拉-泊松系统的长波长极限,目标是在 G-M 变换 $\varepsilon^{1/2}(x_1-Vt)\to x_1$、$\varepsilon^{1/2}x_2\to x_2$、$\varepsilon^{1/2}x_3\to x_3$、$\varepsilon^{3/2}t\to t$ 下,严格推导出修正的 modified Korteweg-de Vries-ZK (mKdV-ZK)方程,并利用精细的能量方法,给出 mKdV-ZK 方程与欧拉-泊松系统之间误差的均匀 ε 估计。

关键词：欧拉泊松方程；长波长极限；mKdV-ZK 方程

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A

The mKdV-ZK limit of the Euler-Poisson system at critical densities

XI Xiao-yu, ZHANG Mei-ling
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper focuses on the long wavelength limit for the Euler-Poisson system arising in plasma including three species in a three dimensional case. The goal of this study is to deduce rigorously the modified Korteweg-de Vries-ZK(mKdV-ZK) equation, under the Gardner-Morikawa transform $\varepsilon^{1/2}(x_1-Vt)\to x_1, \varepsilon^{1/2}x_2\to x_2, \varepsilon^{1/2}x_3\to x_3, \varepsilon^{3/2}t\to t$, as$\varepsilon\to 0$. By employing delicate energy method, we give uniform in ε estimate for the error between the mKdV-ZKequation and the Euler-Poisson system.

Key words: Euler-Poisson equation; long wavelength limit; modified Korteweg-de Vries-ZK (mKdV-ZK) equation

1　引言和模型建立

本文考虑静电等离子体[1]中由热等温、热绝热流体和冷固定共3种背景物质组成的三维一般混合物。其中,较冷的绝热物质用标准流体方程来描述

$$\partial_t n_\alpha + div(n_\alpha u)=0, \tag{1}$$

$$\partial_t u + u\cdot\nabla u + T_\alpha\frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} = -\nabla\phi - \boldsymbol{e}_1\times u, \tag{2}$$

方程中,$(x,t)\in\mathbb{R}^3$表示时空位置,n_α 和 $u=(u_1,u_2,u_3)$分别表示较冷的绝热物质的密度及速度,参数 T_α 表示流体种类的温度。

热等温玻尔兹曼种用所谓的等温玻尔兹曼关系来描述 $n_\beta=N_\beta e^{\phi}/T_\beta$,其中,$T_\beta$ 为等温温度。平衡量将用大写字母表示,例如玻尔兹曼中的 N_β。

收稿日期：2024-11-18；**修回日期**：2025-02-27
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11901127)；广州市基础研究资助项目(202102020293)
作者简介：席肖玉(1990—),女,副教授,博士. E-mail: sxxixiaoyu@gzhu.edu.cn
引文格式：席肖玉，张美玲. 临界密度下欧拉-泊松系统的 modified Korteweg-de Vries-ZK 极限[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2025,24(2):51-56.

静电势 ϕ 满足泊松方程

$$\triangle\phi = N_\beta e^{\phi/T_\beta} - n_\alpha - N_\delta, \tag{3}$$

其中,N_δ 为不固定的背景物质。对于衰减缓慢的物质,可以考虑一些密度为 N_δ 的固定背景物质,这些物质可以用来模拟处理电子声孤子时的非磁化离子[2]。

许多非线性色散偏微分方程可以从欧拉－泊松系统中推导出来,如 KdV 方程、KP-Ⅱ方程和 ZK 方程,近几十年来这些方程得到了广泛的研究。Guo 等[3]严格给出了一维离子欧拉－泊松系统 KdV 方程的推导。并且 Pu[4]还考虑了高维情况,给出欧拉－泊松方程在不同尺度下的 KP-Ⅱ方程和三维情况下 ZK 方程的严格极限证明。值得一提的是,Isaza 等[5]给出了柯西方程对 KP-Ⅱ方程的推导,Linares 等[6]给出了柯西方程对 ZK 方程的推导。关于 KdV 方程、KP-Ⅱ方程和 ZK 方程的其他研究参见文献[7－10]及其参考文献。

因此,在包含所有已知的色散定律和通常局限于特定模型的一般处理和非线性方程中,重新讨论磁化等离子体中静电模式的整个场,相比早期处理是很有意义的。而对于更复杂的等离子体组成,比如具有三次非线性的 mKdV-ZK 方程,在临界密度下,孤子特性可以从压缩转换为稀疏。

在文献[1]中已经给出了热等温、热绝热流体和冷不动背景物质的普通、修正和混合 KdV-ZK 方程在 $T_\alpha \geqslant 0$ 时的形式推导。特别地,Pu 等[11]又在此基础上给出了当 $T_\alpha \geqslant 0$ 时 mKdV 方程的严格推导。

然而,到目前为止,还没有对三维情况下 mKdV-ZK 极限严格的数学证明,因此,本文的目的是严格证明当 $T_\alpha > 0$ 时的极限,至少为其准备良好的初始数据。

本文组织如下:第 2 节利用 G-M 变换正式推导了三维欧拉－泊松系统中的 mKdV-ZK 方程;第 3 节陈述主要定理 1。通过引入一些新的微分符号,推导出余项方程,并给出定理 1 的证明。关键问题是为余数方程提供统一的 ε 估计,在这里需要更精细的估计以及连续性的方法来封闭估计。在本文中,使用 $[A,B] = AB - BA$ 表示 A 和 B 的换向子;范数 $\|\cdot\|_X$ 表示 X－范数,当 $X = L^2$ 时,$\|\cdot\|_{L^2}$ 被 $\|\cdot\|$ 取代;$\langle f,g\rangle = \int fg\mathrm{d}x$ 表示两个 L^2 函数的内积。

2 形式的 mKdV-ZK 推导及主要结果

通过经典的 G-M 变换

$$\varepsilon^{1/2}(x_1 - Vt)\to x_1, \varepsilon^{1/2}x_2 \to x_2, \\ \varepsilon^{1/2}x_3 \to x_3, \varepsilon^{3/2}t \to t, \tag{4}$$

从式(1)～式(3)得到参数化系统

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t n_\alpha - V\partial_{x_1} n_\alpha + \nabla\cdot(n_\alpha u) = 0, \\ \varepsilon\partial_t u - V\partial_{x_1} u + u\cdot\nabla u + T_\alpha\dfrac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} = \\ \quad -\nabla\phi + \dfrac{1}{\varepsilon^{1/2}} u\times \boldsymbol{e}_1, \\ \varepsilon\Delta\phi = N_\beta e^{\phi/T_\beta} - n_\alpha - N_\delta, \end{cases} \tag{5}$$

其中,$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon$ 为初始扰动的振幅,假设与单位相比较小,V 为待确定的波速。考虑以下形式上的扩展:

$$\begin{cases} n_\alpha = N_\alpha(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} n_\alpha^{(1)} + \varepsilon n_\alpha^{(2)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} n_\alpha^{(3)} + \varepsilon^2 n_\alpha^{(4)} + \cdots), \\ u_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_1^{(1)} + \varepsilon u_1^{(2)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_1^{(3)} + \varepsilon^2 u_1^{(4)} + \cdots \\ \phi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi^{(1)} + \varepsilon\phi^{(2)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi^{(3)} + \varepsilon^2\phi^{(4)} + \cdots \\ u_2 = \varepsilon u_2^{(1)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2^{(2)} + \varepsilon^2 u_2^{(3)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}} u_2^{(4)} + \cdots \\ u_3 = \varepsilon u_3^{(1)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_3^{(2)} + \varepsilon^2 u_3^{(3)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}} u_3^{(4)} + \cdots \end{cases} \tag{6}$$

将式(6)代入式(5),得到一个 ε 的幂级数,其系数依赖于 $k \geqslant 1$ 的 $(n_\alpha^{(k)}, u^{(k)}, \phi^{(k)})$。

接下来推导关于 $n_\alpha^{(1)}$ 的 mKdV-ZK 方程,从幂级数可以得到 ε 阶的以下系数:

(1) 在 ε^0 的阶数下,设置 ε^0 的系数为 0,得到 $N_\beta - N_\alpha - N_\delta = 0$,这意味着平衡时的整体电荷均为中性。

(2) 在 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 的阶数下,将 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 的系数设为 0,得到 $V^2 = T_\alpha + \dfrac{N_\alpha T_\beta}{N_\beta}$,为确定 $(n_\alpha^{(1)}, u^{(1)}, \phi^{(1)})$,只需要确定 $n_\alpha^{(1)}$。

(3) 在 ε^1 的阶数下,将 ε^1 的系数设为 0,可以得到

$$\mathcal{F}(n_\alpha^{(1)})^2 = 0,$$

其中,$\mathcal{F} = 3V^2 - T_\alpha - \dfrac{T_\beta N_\alpha^2}{N_\beta^2}$。

当等离子体处于临界密度时,考虑$\mathcal{F}=0$,即有

$$3V^2 = T_\alpha + \frac{T_\beta N_\alpha^2}{N_\beta^2}。$$

(4)对于 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ 的系数和 $n_\alpha^{(1)}$ 的 mKdV-ZK 方程,将 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ 的系数设为 0,可以得到

$$V\partial_{x_2}u_2^{(2)} + V\partial_{x_3}u_3^{(2)} = \left(V^4 + \frac{T_\beta^2 N_\alpha}{N_\beta^2}\right)\partial_{x_1}(\partial_{x_2}^2 n_\alpha^{(1)} + \partial_{x_3}^2 n_\alpha^{(1)})。$$

通过计算,可以推断出 $n_\alpha^{(1)}$ 满足以下 mKdV-ZK 方程:

$$\partial_t n_\alpha^{(1)} + \left(\frac{T_\beta N_\alpha^3}{2VN_\beta^3} - 3V + \frac{T_\alpha}{2V}\right)(n_\alpha^{(1)})^2\partial_{x_1}n_\alpha^{(1)} + \frac{T_\beta^2 N_\alpha}{2VN_\beta^2}\partial_{x_1}^3 n_\alpha^{(1)} + \left(\frac{V^3}{2} + \frac{T_\beta^2 N_\alpha}{2VN_\beta^2}\right)\partial_{x_1}(\partial_{x_2}^2 n_\alpha^{(1)} + \partial_{x_3}^2 n_\alpha^{(1)}) = 0,$$

并且$(n_\alpha^{(1)}, u_1^{(1)}, \phi^{(1)})$是相对独立的,并不依赖于$(n_\alpha^{(i)}, u_1^{(i)}, \phi^{(i)})$。

对于 $i \geqslant 2$,经过上述步骤,通过平衡 $\varepsilon^{(k+2)/2}(k \geqslant 2)$的系数,可以得到

$$\begin{cases} u_1^{(k)} = Vn_a^{(k)} + h^{(k-1)}, \\ \phi^{(k)} = \dfrac{N_a T_b}{N_b} n_a^{(k)} + g^{(k-1)}, \end{cases}$$

其中,$h^{(k-1)}$ 和 $g^{(k-1)}$ 只依赖于$(n_\alpha^{(i)}, u_1^{(i)}, \phi^{(i)})$,$1 \leqslant i \leqslant k-1$。

进一步得到线性化的 mKdV-ZK 方程:

$$\partial_t n_\alpha^{(k)} + \left(\frac{T_\beta N_\alpha^3}{2VN_\beta^3} - 3V + \frac{T_\alpha}{2V}\right)\partial_{x_1}((n_\alpha^{(1)})^2 n_\alpha^{(k)}) + \frac{T_\beta^2 N_\alpha}{2VN_\beta^2}\partial_{x_1}^3 n_\alpha^{(k)} + \left(\frac{V^3}{2} + \frac{T_\beta^2 N_\alpha}{2VN_\beta^2}\right)\partial_{x_1}(\partial_{x_2}^2 n_\alpha^{(k)} + \partial_{x_3}^2 n_\alpha^{(k)}) = G^{(k-1)},$$

这里 $G^{(k-1)}$ 只跟 $n_\alpha^{(1)}, n_\alpha^{(2)}, \cdots, n_\alpha^{(k-1)}$ 有关。

假设之后 $n_\alpha^{(k)}$ 的解在任何时间间隔$[-\tau_*, \tau_*]$上都是足够光滑的,对于任何$\tau_* > 0$。虽然在连续步骤之间可能存在正则性损失,但本文仍然可以假设在有限步之内具有光滑性。

3　严格推导证明

为证明 $n_\alpha^{(1)}$ 在任意有限的时间区间内收敛于 mKdV-ZK 方程 $\varepsilon \to 0$ 的解,必须使上述过程严格。设(n_α, u, ϕ)为以下扩展比例系统的解

$$\begin{aligned} n_\alpha &= N_\alpha(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}n_\alpha^{(1)} + \varepsilon n_\alpha^{(2)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}n_\alpha^{(3)} + \varepsilon^2 n_\alpha^{(4)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}n_\alpha^{(5)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}n_R^\varepsilon), \\ u_1 &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}n_1^{(1)} + \varepsilon u_1^{(2)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_1^{(3)} + \varepsilon^2 u_1^{(4)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}u_1^{(5)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_{1R}^\varepsilon, \\ \phi &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi^{(1)} + \varepsilon\phi^{(2)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi^{(3)} + \varepsilon^2\phi^{(4)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}\phi^{(5)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_R^\varepsilon, \\ u_2 &= \varepsilon u_2^{(1)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_2^{(2)} + \varepsilon^2 u_2^{(3)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}u_2^{(4)} + \varepsilon^3 u_2^{(5)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_{2R}^\varepsilon, \\ u_3 &= \varepsilon u_3^{(1)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_3^{(2)} + \varepsilon^2 u_3^{(3)} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}u_3^{(4)} + \varepsilon^3 u_3^{(5)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_{3R}^\varepsilon, \end{aligned} \tag{7}$$

其中,$u_R^\varepsilon = (u_{1R}^\varepsilon, u_{2R}^\varepsilon, u_{3R}^\varepsilon)$,$(n_R^\varepsilon, u_R^\varepsilon, \phi_R^\varepsilon)$是余数。经过仔细的计算,得到了以下余数系统:

$$\begin{cases} \partial_t n_R^\varepsilon - \dfrac{V\boldsymbol{e}_1 - u}{\varepsilon} \cdot \nabla n_R^\varepsilon + \dfrac{n_\alpha}{\varepsilon}\nabla \cdot u_R^\varepsilon + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}n_R^\varepsilon \nabla \cdot \tilde{u} + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_R^\varepsilon \cdot \nabla\tilde{n}_\alpha + \sqrt{\varepsilon}R_n = 0, \\ \partial_t u_R^\varepsilon - \dfrac{V\boldsymbol{e}_1 - u}{\varepsilon} \cdot \nabla u_R^\varepsilon + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_R^\varepsilon \nabla \cdot \tilde{u} + \dfrac{T_\alpha}{\varepsilon}\nabla n_R^\varepsilon - \dfrac{T_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\dfrac{\tilde{n}_\alpha + \varepsilon n_\alpha^\varepsilon}{n_\alpha}\right)\nabla n_R^\varepsilon - \dfrac{T_\alpha p}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}n_R^\varepsilon - \\ \qquad \dfrac{T_\alpha\sqrt{\varepsilon}}{n_\alpha}R_T + \sqrt{\varepsilon}R_u = \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla\phi_R^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}u_R^\varepsilon \times \boldsymbol{e}_1, \\ \varepsilon\Delta\phi_R^\varepsilon = \dfrac{N_\beta}{T_\beta}\phi_R^\varepsilon - N_\alpha n_R^\varepsilon + \dfrac{\sqrt{\varepsilon}N_\beta}{T_\beta^2}\phi^{(1)}\phi_R^\varepsilon + \varepsilon R_\phi, \end{cases} \tag{8}$$

其中,$\tilde{A} = A_\alpha^1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}A_\alpha^2 + \varepsilon A_\alpha^3 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}A_\alpha^4 + \varepsilon^2 A_\alpha^5$,对于 $A = n_\alpha, u$。

可以假设之后已知的$(\tilde{n}_\alpha, \tilde{u}, \tilde{\phi})$足够平滑,因此,存在一些 $C > 0$ 和一些 $s \geqslant 4$,使得

$$\sup_{[0,\tau_*]} \|(\tilde{n}_\alpha, \tilde{u}, \tilde{\phi}), R_n, R_u, R_T\|_{H^s} \leqslant C, \tag{9}$$

其中,τ_*为存在时间。

那么,关键是在 ε 中推导出一致余数$(n_R^\varepsilon, u_R^\varepsilon, \phi_R^\varepsilon)$的估计数。主要定理如下:

定理 1　设 $4 \leqslant s' \leqslant s$,并且欧拉 - 泊松方程式(1) ~ 式(3)的初始值$(n_{\alpha 0}, u_0, \phi_0)$满足上述的扩展形式,对于任何 $0 < \tau_0 < \tau_*$,存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $C_{\tau_0} > 0$,当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时,方程(8)的解$(n_R^\varepsilon, u_R^\varepsilon, \phi_R^\varepsilon)$满足:当 $T_\alpha > 0$ 时,

$$\sup_{[0,\tau_0]} \|(n_R^\varepsilon, u_R^\varepsilon, \phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2 \leqslant C_{\tau_0}(1 + \|(n_{R0}^\varepsilon, u_{R0}^\varepsilon, \phi_{R0}^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)。 \tag{10}$$

在接下来的内容中,采用重新调整的 $\bar{t}=t/\sqrt{\varepsilon}$,为简单起见,记 $t=\bar{t}$。在本节中,将 $N_\alpha=2$ 并令所有其他常数为 1。得到新的余项方程:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_t n_R^\varepsilon-\dfrac{\boldsymbol{e}_1-u}{\varepsilon}\cdot\nabla n_R^\varepsilon+\dfrac{n_\alpha}{\varepsilon}\nabla\cdot u_R^\varepsilon+ \\
\quad \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}n_R^\varepsilon\nabla\cdot\tilde{u}\,\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_R^\varepsilon\cdot\nabla\tilde{n}_\alpha+\sqrt{\varepsilon}R_n=0, \\
\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_t u_R^\varepsilon-\dfrac{\boldsymbol{e}_1-u}{\varepsilon}\cdot\nabla u_R^\varepsilon+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_R^\varepsilon\nabla\cdot\tilde{u}+ \\
\quad \dfrac{T_\alpha}{\varepsilon}\nabla n_R^\varepsilon-\dfrac{T_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\dfrac{\tilde{n}+\varepsilon n_R^\varepsilon}{n_\alpha}\right)\nabla n_R^\varepsilon-\dfrac{T_\alpha p}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}n_R^\varepsilon- \\
\quad \dfrac{T_\alpha\sqrt{\varepsilon}}{n_\alpha}R_T+\sqrt{\varepsilon}R_u=-\dfrac{1}{\varepsilon}\nabla\phi_R^\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon}u_R^\varepsilon\times\boldsymbol{e}_1, \\
\varepsilon\Delta\phi_R^\varepsilon=\phi_R^\varepsilon-2n_R^\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\phi^{(1)}\phi_R^\varepsilon+\varepsilon R_\phi。
\end{cases}
\tag{11}
$$

假设新的余项方程式(11)在时间 τ_ε 上有光滑解,得到

$$\sup_{[0,\tau_\varepsilon]}\|(n_R^\varepsilon,u_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{s'}\leqslant\tilde{C},\tag{12}$$

其中,$\tilde{C}$ 是常数。根据 n_α,u 的表达式,有

$$1/2<n_\alpha<3/2,\ |u|\leqslant1/2,\tag{13}$$

为了更好证明定理 1,首先证明以下命题。

命题 1 设 $s'\geqslant4$ 是一个整数,并且(n_R^ε,u_R^ε,ϕ_R^ε)是式(11)的解。那么对于任何整数 $0\leqslant k\leqslant s'$,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2+ \\
&\quad \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1+\sqrt{\varepsilon}\phi^{(1)}+\varepsilon\phi_R^\varepsilon}{n_\alpha}|\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2+ \\
&\quad \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{\varepsilon}{n_\alpha}|\nabla\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2+ \\
&\quad \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}|\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon|^2\mathrm{d}x\leqslant \\
&\quad CC_1(C_1+\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)\{1+ \\
&\quad \|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中,$|\alpha|=k\leqslant s'$。

接着证明 u_R^ε 及 ϕ_R^ε。

引理 1 对于 u_R^ε、ϕ_R^ε,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2+ \\
&\quad \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1+\sqrt{\varepsilon}\phi^{(1)}+\varepsilon\phi_R^\varepsilon}{n_\alpha}|\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2+ \\
&\quad \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{\varepsilon}{n_\alpha}|\nabla\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2\leqslant \\
&\quad CC_1(C_1+\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)\{1+ \\
&\quad \|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\}+F_{561},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中,$F_{561}=\dfrac{T_\alpha}{\varepsilon}\langle(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n_\alpha})\partial_x^\alpha\nabla n_R^\varepsilon,\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle$。

证明 对方程组(11)的第二个方程取 ∂_x^α,再与 $\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon$ 做内积,得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2=\frac{1}{\varepsilon}\langle\partial_{x_1}\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon,\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle- \\
&\quad \frac{1}{\varepsilon}\langle\partial_x^\alpha(u\cdot\nabla u_R^\varepsilon),\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle- \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\langle\partial_x^\alpha(u_R^\varepsilon\cdot\nabla\tilde{u}),\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle-\sqrt{\varepsilon}\langle\partial_x^\alpha R_u,\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle- \\
&\quad T_\alpha\langle\partial_x^\alpha\left(\frac{\nabla n_R^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}\right),\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle-\frac{1}{\varepsilon}\langle\partial_x^\alpha\nabla\phi_R^\varepsilon,\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle+ \\
&\quad T_\alpha\langle\partial_x^\alpha\left(\frac{p}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}n_R^\varepsilon\right),\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle+T_\alpha\langle\partial_x^\alpha\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}R_T}{n_\alpha}\right),\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle+ \\
&\quad \frac{1}{\varepsilon}\langle\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\times\boldsymbol{e}_1,\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\rangle=:F_1+\cdots+F_9,
\end{aligned}
$$

其中,F_1,$F_9=0$,对其他项进行估计得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4}|F_i|+|F_7|+|F_8|+|F_9|\leqslant \\
&\quad CC_1(1+\sqrt{\varepsilon}\|(\boldsymbol{u}_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}})(1+\|(\boldsymbol{u}_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)。
\end{aligned}
\tag{16}
$$

对 F_6 需要利用余项方程式组(11)的结构来进行更加细致的估计。通过对方程组(11)的第一个方程取 ∂_x^α,并代入 F_6 的表达式中,得到

$$
\begin{aligned}
F_6=&\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{\boldsymbol{e}_1-u}{\varepsilon n_\alpha}\cdot\nabla\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle-\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}\partial_t\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle- \\
&\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon n_\alpha}[\partial_x^\alpha,u]\cdot\nabla n_R^\varepsilon\rangle- \\
&\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon n_\alpha}[\partial_x^\alpha,n]\nabla\cdot u_R^\varepsilon\rangle- \\
&\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{1}{n_\alpha}\partial_x^\alpha(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}n_R^\varepsilon\nabla\cdot\tilde{u}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_R^\varepsilon\cdot\nabla\tilde{n}_\alpha+\sqrt{\varepsilon}R_n)\rangle=: \\
&F_{61}+\cdots+F_{65}。
\end{aligned}
\tag{17}
$$

利用交换子估计和 Hölder 不等式可以估计 $F_{63}-F_{65}$,即

$$
\begin{aligned}
&|F_{63}+F_{64}+F_{65}|\leqslant C\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[\|\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+ \\
&\quad C(1+\varepsilon\|u_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2)\|(n_R^\varepsilon,u_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2]。
\end{aligned}
\tag{18}
$$

通过对方程组(11)的第三个方程取∂_x^α,有

$$2\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon=\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon-\varepsilon\Delta\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\partial_x^\alpha(\phi^{(1)}\phi_R^\varepsilon)+\varepsilon\partial_x^\alpha R_\phi。\tag{19}$$

F_{61}被分成4个部分:

$$\begin{aligned}F_{61}=&\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{e_1-u}{2\varepsilon n_\alpha}\cdot\nabla\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon\rangle-\\&\varepsilon\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{e_1-u}{2\varepsilon n_\alpha}\cdot\nabla\Delta\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon\rangle+\\&\sqrt{\varepsilon}\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{e_1-u}{2\varepsilon n_\alpha}\cdot\nabla\partial_x^\alpha(\phi^{(1)}\phi_R^\varepsilon)\rangle+\\&\varepsilon\langle\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon,\frac{e_1-u}{2\varepsilon n_\alpha}\cdot\nabla\partial_x^\alpha R_\phi\rangle=:\\&F_{611}+F_{612}+F_{613}+F_{614}。\end{aligned}\tag{20}$$

经过对分项进行估计,

$$\begin{aligned}|F_{61}|\leqslant&C\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(1+C_1(\sqrt{\varepsilon}\|\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}})+\\&\varepsilon\|(n_R^\varepsilon,u_R^\varepsilon)\|_{H^4}^2)(1+\|\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\varepsilon\|\nabla\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2)。\end{aligned}\tag{21}$$

同理,可以得到F_{62}的估计。

$$\begin{aligned}F_{62}\leqslant&-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1+\sqrt{\varepsilon}\phi^{(1)}+\varepsilon\phi_R^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}|\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2-\\&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{\sqrt{\varepsilon}}{n_\alpha}|\nabla\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2+\\&CC_1\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(C_1+\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)\{1+\\&\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\}。\end{aligned}\tag{22}$$

接下来对n_R^ε进行估计。

引理2　设$s'\geqslant4$是一个整数,并且$(n_R^\varepsilon,u_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)$是方程组(11)的解,那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}|\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon|^2\mathrm{d}x\leqslant&C(\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,\\&n_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}})\{1+\|(n_R^\varepsilon,u_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\}+I_{31},\end{aligned}\tag{23}$$

其中,$I_{31}=-T_\alpha\langle(\nabla\cdot\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon),\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle$。

证明　对方程组(11)的第一个方程取∂_x^α,再与$\frac{T_\alpha(2+n_\alpha)}{2n_\alpha^2}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon$做内积,并对$t$积分得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{T_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha^2}|\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon|^2\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}\int\partial_t\left(\frac{T_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}n_\alpha^2}\right)|\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\\&\langle\partial_x^\alpha\left(\frac{\boldsymbol{e}_1-u}{\varepsilon}\cdot\nabla n_R^\varepsilon\right),\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle-\langle\partial_x^\alpha\left(\frac{n_\alpha}{\varepsilon}\nabla\cdot u_R^\varepsilon\right),\\&\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle-\langle\partial_x^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}n_R^\varepsilon\nabla\cdot\tilde{u}\right),\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle-\\&\langle\partial_x^\alpha(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_R^\varepsilon\cdot\nabla\tilde{n}_\alpha),\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle-\\&\langle\partial_x^\alpha(\sqrt{\varepsilon}R_n),\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon\rangle=I_1+\cdots+I_6。\end{aligned}\tag{24}$$

对$I_1\sim I_6$分别做估计,

$$|I_1|\leqslant C(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon)\|_{H^3})\|n_R^\varepsilon\|_{H^k}^2。\tag{25}$$

利用分部积分将I_2、I_3展开并利用算子估计可以得到

$$|I_2|\leqslant C(1+\sqrt{\varepsilon}(\|u_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}+\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}))\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2,$$

$$|I_{32}|\leqslant C(1+\varepsilon\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}})(\|u_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}+\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}),$$

这里$I_4\sim I_6$的估计是简单的。

接下来证明命题1。

证明　结合方程式(15)及式(23)可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_x^\alpha u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2+\\&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1+\sqrt{\varepsilon}\phi^{(1)}+\varepsilon\phi_R^\varepsilon}{n_\alpha}|\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2+\\&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{\varepsilon}{n_\alpha}|\nabla\partial_x^\alpha\phi_R^\varepsilon|^2+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int\frac{T_\alpha}{n_\alpha^2}|\partial_x^\alpha n_R^\varepsilon|^2\leqslant\\&CC_1(C_1+\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)\{1+\\&\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\}+F_{51}+I_{31}。\end{aligned}\tag{26}$$

利用分部积分并估计,

$$F_{51}+I_{31}\leqslant C(1+\varepsilon\|n_R^\varepsilon\|_{H^3})\{\|n_R^\varepsilon\|_{H^k}+\|u_R^\varepsilon\|_{H^k}\},\tag{27}$$

将式(27)代入式(26),证毕。

最后证明定理1。

证明　将式(14)在$[0,t]$上进行积分,并对$|\alpha|=k$和$0\leqslant k\leqslant s'$进行求和,可以得到

$$\begin{aligned}&\|u_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\|\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\varepsilon\|\bar{\nabla}\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\\&T_\alpha\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2\leqslant CC_\varepsilon(0)+\\&CC_1\int_0^t(C_1+\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2)\{1+\\&\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\}\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}C_\varepsilon(0)=&\|(u_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)(0)\|_{H^{s'}}^2+\\&\varepsilon\|\bar{\nabla}\phi_R^\varepsilon(0)\|_{H^{s'}}^2+T_\alpha\|n_R^\varepsilon(0)\|_{H^{s'}}^2。\end{aligned}$$

从式(12)可知,存在一些常数 $0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$ 使得 $\varepsilon\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\leqslant 1$,对于任意的 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$。由 $C_1=C_1(\sqrt{\varepsilon}\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}})$ 可知,当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时,有 $C_1\leqslant C_1(1)$。而当 $T_\alpha>0$ 时,可以找到 $C_3>1$,使得

$$\|u_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\|\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2\leqslant C_3C_\varepsilon(0)+C_3\int_0^t\{1+\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}^2\}\,\mathrm{d}r,$$

对于任意给定的 $0<\tau_0<\tau_*$,令 $C'_0=\sup\limits_{0<\varepsilon<1}C_\varepsilon(0)$ 以及式(12)中的 $\tilde{C}$ 满足 $\tilde{C}\geqslant 2(1+CC'_0)e^{C_3\tau_0}$,利用 Gronwall 不等式推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau_0}\|u_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\|\phi_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2+\|n_R^\varepsilon\|_{H^{s'}}^2\leqslant (1+CC_3)e^{C_3\tau_0}\leqslant\tilde{C}。$$

根据连续性估计方法可以得到 $\|(u_R^\varepsilon,n_R^\varepsilon,\phi_R^\varepsilon)\|_{H^{s'}}$ 与 ε 无关的一致估计,证毕。

参考文献:

[1] Verheest F, Mace R, Pillay S, et al. Unified derivation of Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov equations in multispecies plasmas[J]. Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 2002, 35: 795-806.

[2] Liu H L, Tadmor E. Spectral dynamics of the velocity gradient field in restricted flows[J]. Communications in Mathematical Physics, 2002, 228(3): 435-466.

[3] Guo Y, Pu X K. KdV limit of the Euler-Poisson system[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2014, 211(2): 673-710.

[4] Pu X K. Dispersive limit of the Euler-Poisson system in higher dimensions[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2013, 45 (2):834-878.

[5] Isaza J P, López J C, Mejia L J. The Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-Ⅱ) equation in three space dimensions[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2007, 32(4): 611-641.

[6] Linares F, Saut J C. The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems – A, 2009,24(2): 547-565.

[7] Su C H, Gardner C S. Korteweg-de Vries equation and generalizations. Ⅲ. derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1969, 10 (3): 536-539.

[8] Tadmor E, Liu H L. Critical thresholds in 2D restricted Euler-Poisson equations[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,2003, 63 (6):1889-1910.

[9] Taniuti T, Wei C C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. Ⅰ[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1968, 24(4): 941-946.

[10] Zakharov V E, Kuznetsov E A. Three dimensional solitons[J]. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1974, 39: 285-286.

[11] Pu X K, Xi X Y, Derivation of the mKdV equation from the Euler-Poisson system at critical densities[J]. Journal of Differential Equations, 2021, 282:446-480.

【责任编辑: 卓祯雨】