第 24 卷　第 2 期　　广州大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 2
2025 年　4 月　　Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)　　Apr.　2025

文章编号:1671-4229(2025)02-0057-08

Landau-Lifshitz-Gilbert 方程强解的爆破准则

陈金妹，邓　姮*，王光武
(广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州　510006)

摘　要：文章研究了 Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG)方程强解的爆破准则,特别强调了这些解何时不存在。同时,构建了一个全面的模型,并得出多个爆破准则,包括二维和三维空间中的 Serrin 型、Besov 型、BMO 型和 Beale-Kato-Majda (BKM)型的爆破准则。

关键词：Landau-Lifshitz-Gilbert 方程；爆破准则；强解
中图分类号：O175　　　**文献标志码**：A

Blow-up criteria for strong solutions of Landau-Lifshitz-Gilbert equation

CHEN Jin-mei, *DENG Heng** , *WANG Guang-wu*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This investigation delves into the blow-up criteria for strong solutions of the Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) equation, with particular emphasis on when these solutions cease to exist. We construct a comprehensive model and derive multiple blow-up criteria, encompassing Serrin-type, Besov-type, BMO-type, and Beale-Kato-Majda (BKM) type within two- and three-dimensional spaces.

Key words: Landau-Lifshitz-Gilbert equation; blow-up criteria; strong solution

1　背景介绍

著名的 Landau-Lifshitz(LL)方程是由 Landau 等[1]首次推导出来的,它作为铁磁自旋链的基本演化方程,是基于现象学基础来探索铁磁材料中磁化弥散理论的。Gilbert[2]随后推导出了所谓的 Landau-Lifshitz-Gilbert(LLG)方程,其中包含一个耗散项,其数学表达式如下:

$$\partial_t u + \alpha u \times \Delta u + \beta u \times u \times \Delta u = 0, \tag{1}$$

方程的初始条件如下:

$$u(x,0) = u_0(x), |u_0| = 1。 \tag{2}$$

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 其中, $n = 2,3$。方程(1)~方程(2)的主要变量为磁化场 $u: \Omega \times (0,T) \to \mathbb{S}^2$。该系统的关键参数包括正的粘度常数 $\alpha > 0$ 和吉尔伯特阻尼常系数 $\beta > 0$。这些参数受如下标准约束: $|u| = 1$ a. e. in $\Omega \times (0,T)$,该约束反映了饱和磁化的存在。这里,边界条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ 中的 ν 表示 Ω 边界的外法向量。

LL 方程已经被研究了很多年,该方程对微磁性磁场的铁磁性磁场性质,从基本发现到当代进展领域都具有显著贡献,研究该方程及其应用有着重要的意义。Visintin[3]是这一领域的先驱,他证明了具有磁致伸缩效应的 LL 方程存在弱解,为该领域奠定了基础。在这一开创性工作的基础上,Sulem 等[4]通过验证 R^n 上无耗散 LL 方程的全局弱解和局部光滑解的存在性,在该领域取得了

收稿日期：2024－09－23；**修回日期**：2024－12－19
作者简介：陈金妹(1998—),女,硕士研究生. E-mail:2509336037@qq.com
*通信作者. E-mail:1292351179@qq.com
引文格式：陈金妹，邓姮，王光武. Landau-Lifshitz-Gilbert 方程强解的爆破准则[J]. 广州大学学报(自然科学版),2025,24(2):57-64.

重大进展。Ding 等[5-6]以及其他研究者[7-8]对这些基本发现作出创新和改进;Wang[9]实质性地证明了 Schrödinger 流的弱解全局存在性;Alouges 等[10]说明了具有 Neumann 边界条件的 LLG 方程弱解的非唯一性;Guo 等[11]通过建立二维 LL 方程与调和映射之间的联系,证明了部分正则弱解的整体存在唯一性;Bejenaru 等[12]研究了临界 Besov 空间中小数据的全局适定性;Di Fratta 等[13]证明了具有 Dzyaloshinskii-Moriya(DM)相互作用的 LLG 流的弱解与唯一强解之间的等价性。

本文为了方便起见,在分析中考虑 $\alpha=\beta=1$,这些参数不影响最终的结果。

Fan 等[14-16]提出了三维 LLG 方程的爆破条件。此外,Wang 等[17]提出另外的爆破条件:

$$\lim_{T\to T^*}\int_0^T \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p(6-n)}{p-n}}\mathrm{d}t=\infty$$

$$(2\leqslant n\leqslant 3, n<p<4),$$

$$\lim_{T\to T^*}\int_0^T \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{4(2n+4p-pn-4)}{(p-2)(4-n)}}\mathrm{d}t=\infty$$

$(2\leqslant n\leqslant 3, 4\leqslant p<\infty$, or $n\geqslant 4, n<p<\infty)$。

本文给出了 LLG 方程(1)~方程(2)强解的爆破条件。接下来将介绍本文的主要结果。

首先,对多重指标微分算子和 LLG 方程(1)~方程(2)的强解定义作出介绍。

定义1 带 α 多重指标的微分算子定义如下:

$$D^\alpha=\prod_{i=1}^n \partial x_i^{\alpha_i},\ |\alpha|=\sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

其中,每个 α_i 为非负整数。为了简单起见,用 D^k 表示在 $|\alpha|=k$ 情形下的 D^α。当 $k=1$ 时,符号可记为 D。

定义2 令 $T>0$,称函数 u 为简化的 LLG 方程(1)~方程(2)定义在 $\mathbb{R}^n\times(0,T)$ 的局部强解,如果它满足正则性条件:

$\nabla u\in L^\infty([0,T];H^2(\mathbb{R}^n))\cap L^2([0,T];H^3(\mathbb{R}^n))$,以及 u 在 $\mathbb{R}^n\times(0,T)$ 中几乎处处满足方程(1)~方程(2)。

方程(1)~方程(2)的4种不同的爆破条件如下。

定理1 $\Omega=\mathbb{R}^n$,其中,$n=2,3$。设 $\nabla u_0\in H^s(\Omega)$,$|u_0|=1$。假设 u 是 LLG 方程(1)~方程(2)的局部强解,如果 $T^*<\infty$ 是局部强解存在的最大时间,则成立如下的爆破条件:

(i)若 k,l 满足 $\frac{2}{k}+\frac{n}{l}\leqslant 1$ 和 $n<l\leqslant\infty$,则有

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla u\|_{L^k([0,T];L^l(\Omega))}=\infty; \tag{3}$$

(ii)若 k,l 满足 $\frac{1}{k}+\frac{l}{2}\leqslant 1$ 和 $0\leqslant l<2$,则有

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla^2 u\|_{L^k([0,T];\dot{B}^{-l}_{\infty,\infty}(\Omega))}=\infty。 \tag{4}$$

由定义1可得如下推论。

推论1 假设 $\Omega=\mathbb{R}^n$,其中,$n=2,3$。假设 $\nabla u_0\in H^s(\Omega)$,$|u_0|=1$。若 u 是 LLG 方程(1)~方程(2)的一个局部强解,如果 $T^*<\infty$ 是这些局部强解存在的最大时间,则有以下爆破条件成立:

(i)当 $s\geqslant n$ 时,

$$\int_0^{T^*}\|\nabla u(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}t=\infty; \tag{5}$$

(ii)对于 $k\geqslant n-1$ 时,

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla u\|_{L^k([0,T];BMO(\Omega))}=\infty。 \tag{6}$$

备注1 当 $n=3$ 时,式(3)中的结果与文献[18]中讨论的 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Gilbert(NSLL)系统的爆破准则一致。具体来说,对于 $n=3$ 和 $4\leqslant p<6$,该条件与文献[16]中详细描述的 LLG 方程的爆破条件一致。另外,通过令 $k=2$ 和 $l=\infty$,可以直接从式(3)中推导出爆破准则(5)。因为不等式 $\|\nabla^2 u\|_{\dot{B}^{-l}_{\infty,\infty}}\leqslant C\|\nabla u\|_{\dot{B}^{1-l}_{\infty,\infty}}$,可以从式(4)中推导出额外的爆破准则,特别是当 $\frac{1}{k}+\frac{l}{2}\leqslant 1$ 和 $0\leqslant l<2$ 时有

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla u\|_{L^k([0,T];\dot{B}^{1-l}_{\infty,\infty}(\Omega))}=\infty。 \tag{7}$$

此外,令 $l=1$,可以从式(7)中推导出爆破准则(6),这是因为 $BMO(\mathbb{R}^n)\subset\dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$。

本文安排如下:第2节展示一些后续分析中所需的引理,第3节建立在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中的基本能量估计,第4节给出二维情况下爆破准则的证明,第5节证明三维情况下的爆破准则。此外,简化了爆破准则的详细推导,因为当较低阶的先验估计建立后,高阶的估计会自动成立。

2 预备知识

本小节介绍几个基本引理和不等式,它们将为后续的分析奠定基础。

引理1 [Gronwall's inequality (differential form)] 设 $\eta(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负绝对连续函数,

对于几乎所有的 t 都满足微分不等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t)\leqslant\phi(t)\eta(t)+\psi(t),$$

其中，$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可求和函数。那么，函数 $\eta(t)$ 满足：

$$\eta(t)\leqslant e^{\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s\right]$$

对所有的 $0\leqslant t\leqslant T$ 都成立。

特别地，如果在 $[0,T]$ 中有 $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\leqslant\phi\psi$ 并且 $\eta(0)=0$，则在 $[0,T]$ 中 $\eta\equiv0$。

引理 2　[Gronwall′s inequality (integral form)] 设 $\xi(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负绝对连续函数，对于几乎所有的 t 都满足积分不等式：

$$\xi(t)\leqslant C_1\int_0^t\xi(s)\mathrm{d}s+C_2。$$

对于某些常数 $C_1,C_2\geqslant0$ 成立上式。那么，函数 $\xi(t)$ 满足：

$$\xi(t)\leqslant C_2(1+C_1te^{C_1t}),$$

对几乎所有的 $t\in[0,T]$ 成立上式，则在 $[0,T]$ 上几乎处处都有 $\xi(t)=0$。

引理 3　[Gagliardo-Nirenberg inequality] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 或者 $\mathbb{R}^n$ 中带上边界 $\partial\Omega$ 的有界 Lipschitz 区域，对于任意函数 $u\in W^{m,r}(\Omega)\cap W^{k,q}(\Omega)$，其中，$1\leqslant r$，$q\leqslant\infty$，任意整数 j 满足 $0\leqslant k<j<m$ 且任意 α 满足 $0<\alpha\leqslant1$，下面结论成立：

$$\|\nabla^j u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C_G\|u\|_{W^{m,r}(\Omega)}^{\alpha}\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)}^{1-\alpha},$$

其中，$\frac{1}{p}-\frac{j}{n}=\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{1}{q}-\frac{k}{n}\right)$ 且 C_G 是一个仅依赖于 n、m、j、q、r、k 和 Ω 的常数。

Besov 空间中的重要插值不等式详见文献[19]。

引理 4　[interpolation inequalities in Besov space] 设 $1\leqslant q<p<\infty$ 且 $\alpha>0$。对于 $\beta=\alpha\left(\frac{p}{q}-1\right)$ 且 $\theta=\frac{q}{p}$，有下面不等式成立：

$$\|f\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}^{1-\theta}\|f\|_{\dot{B}^{\beta}_{q,q}}^{\theta},$$

其中，C 是常数。值得注意的是，由于对于 $n\geqslant1$ 而言，齐次 Besov 空间 $\dot{B}^{\beta}_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 与齐次 Sobolev 空间 $(\dot{H}^{\beta})(\mathbb{R}^n)$ 是等价的，因此，可以得出

$$\|f\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{\dot{H}^{\lambda}}^{\frac{p}{2}}\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}^{1-\frac{p}{2}},$$

其中，$\lambda=\alpha\left(\frac{p}{2}-1\right)$。

在证明定理 1 之前，先概述本文所采用的策略。首先，假设其中一个定理不成立，然后，建立低阶导数估计，从而得到高阶导数的相应估计。这些估计表明，当局部强解接近最大时间 $T*$ 时，它仍然是有界的，这意味着它可以超出其最大时间周期进行解的延拓，这与 $T*$ 的定义相矛盾。这一矛盾证实了这些定理的有效性。

3　基本能量估计

在本节中推导方程(1)～方程(2)在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中解的基本能量估计，这些估计作为纵向调控系统性能的基石，且在定义后续部分阐明的爆破准则中起着至关重要的作用。

引理 5　如果初始数据满足 $\nabla u_0\in L^2(\Omega)$，那么以下能量估计成立：

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^T\|u\times\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant\tilde{K},$$

其中，$\tilde{K}=\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$。

证明　首先，将方程(1)乘以 $-\Delta u$，并且在 Ω 上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u\times\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2=0,$$

这里使用了

$$\langle\partial_t u,-\Delta u\rangle=-\langle\partial_t\nabla u,-\nabla u\rangle=$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,\ -\langle u\times\Delta u,-\Delta u\rangle=0,$$
$$-\langle u\times u\times\Delta u,-\Delta u\rangle=$$
$$\langle u\times\Delta u,u\times(-\Delta u)\rangle=-\|u\times\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2。$$

然后，继续计算得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^T\|u\times\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant\tilde{K},$$

其中，$\tilde{K}=\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$。

为了方便，方程(1)可以写成

$$\partial_t u+u\times\Delta u-\Delta u-|\nabla u|^2u=0,\tag{8}$$

其中，使用以下事实：

$$|u|=1,\ \Delta|u|^2=2(u\cdot\Delta u)+2|\nabla u|^2,$$
$$u\times u\times\Delta u=((u\cdot\Delta u)u-(u\cdot u)\Delta u)=$$
$$\left(\frac{1}{2}\Delta|u|^2-|\nabla u|^2\right)u-\Delta u=$$
$$-|\nabla u|^2u-\Delta u。$$

4　当 $n=2$ 时的爆破准则

在本节中推导二维 LLG 方程(1)～方程(2)

的两个爆破准则,这些准则将提供系统解可能在有限时间内不再存在的条件。

4.1 Serrin 型爆破准则的证明

基于文献[18]中的工作,采用从 NSLL 系统推导出的 Serrin 型爆破准则,来分析二维框架下的 LLG 方程。通过结合两个基本引理和基础能量估计,构建证明过程,以建立低阶导数的估计,进而推导出高阶估计。

假设以下条件:

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla u\|_{L^k(0,T;L^l(\Omega))}<\infty。\tag{9}$$

引理 6 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$。在假设(9)下,以下估计成立:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\|D^3u\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C,$$

其中,常数 C 仅取决于 $\tilde{K}$ 和 C_G。

证明 为了证明引理 6 的有效性,将利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|D^2u\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}\leqslant C_G\|D^3u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|D^2u\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}。$$

首先,对方程(1)关于 D^2 求导,乘以 D^2u,并在 Ω 上对 x 进行积分,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|^2_{L^2}+\|D^3u\|^2_{L^2}=$$
$$-\langle D^2(u\times\Delta u),D^2u\rangle+\langle D^2(|\nabla u|^2u),D^2u\rangle。$$

然后,对这些项进行估计,得到

$$\langle D^2\partial_t u,D^2u\rangle=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|^2_{L^2},$$
$$\langle D^2\Delta u,D^2u\rangle=-\langle D^2\nabla u,D^2\nabla u\rangle=-\|D^3u\|^2_{L^2}。$$

由于 $\frac{2}{k}+\frac{2}{l}\leqslant 1$ 和 $2<l\leqslant\infty$,且满足 $\frac{2l}{l-2}\leqslant k$,得到以下估计:

$$\begin{aligned}
&|-\langle D^2(u\times\Delta u),D^2u\rangle|=\\
&|\langle D^2(u\times\nabla u),\nabla D^2u\rangle|=\\
&|\langle D^2u\times\nabla u+2Du\times D\nabla u+u\times D^2\nabla u,\nabla D^2u\rangle|=\\
&|\langle D^2u\times\nabla u+2Du\times D\nabla u,\nabla D^2u\rangle|\leqslant\\
&3\|D^3u\|_{L^2}\|Du\|_{L^l}\|D^2u\|_{L^{\frac{2l}{l-2}}}\leqslant\\
&\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+C(\frac{\varepsilon_1}{3})\|Du\|^2_{L^l}\|D^2u\|^2_{L^{\frac{2l}{l-2}}}\leqslant\\
&\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+\\
&C(\frac{\varepsilon_1}{3})C_G^{\frac{6}{l}}\|Du\|^2_{L^l}\|D^2u\|^{2-\frac{4}{l}}_{L^2}\|D^3u\|^{\frac{4}{l}}_{L^2}\leqslant\\
&2\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+\\
&C(\frac{\varepsilon_1}{C(\frac{\varepsilon_2}{3})C_G^{\frac{6}{l}}})(\|Du\|^k_{L^l}+1)\|D^2u\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&|\langle D^2(|\nabla u|^2u),D^2u\rangle|=\\
&|-\langle D(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle|=\\
&|-\langle D|\nabla u|^2u+|\nabla u|^2Du,D^3u\rangle|=\\
&|-\langle 2\nabla u\cdot D\nabla u\cdot u+|\nabla u|^2Du,D^3u\rangle|\leqslant\\
&2\|D^3u\|_{L^2}\|Du\|_{L^l}\|D^2u\|_{L^{\frac{2l}{l-2}}}+\\
&\|Du\|^3_{L^6}\|D^3u\|_{L^2}\leqslant 2\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+\\
&C(\frac{\varepsilon_1}{2})\|Du\|^2_{L^l}\|D^2u\|^2_{L^{\frac{2l}{l-2}}}+\\
&C(\varepsilon_1)\|Du\|^6_{L^6}\leqslant 2\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+\\
&C(\frac{\varepsilon_1}{2})C_G^{\frac{6}{l}}\|Du\|^2_{L^l}\|D^2u\|^{2-\frac{4}{l}}_{L^2}\|D^3u\|^{\frac{4}{l}}_{L^2}+\\
&C(\varepsilon_1)\|Du\|^6_{L^6}\leqslant 4\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+\\
&(C(\frac{\varepsilon_1}{C(\frac{\varepsilon_1}{2})C_G^{\frac{6}{l}}})+C(\frac{\varepsilon_2}{C(\varepsilon_1)C_G^{\frac{6}{l}}}))\\
&(\|Du\|^k_{L^l}+1)\|D^2u\|^2_{L^2}。
\end{aligned}$$

其中,最后一个等式利用了 $|u|=1$ 和 $|\nabla u|^2=-\Delta u\cdot u\leqslant|\Delta u|\leqslant|D^2u|$。

$$\begin{aligned}
&C(\varepsilon_1)\|Du\|^6_{L^6}\leqslant C(\varepsilon_1)\int_\Omega|Du|^2|D^2u|^2\mathrm{d}x\leqslant\\
&C(\varepsilon_1)\|Du\|^2_{L^l}\|D^2u\|^2_{L^{\frac{2l}{l-2}}}\leqslant\\
&C(\varepsilon_1)C_G^{\frac{6}{l}}\|Du\|^2_{L^l}\|D^2u\|^{2-\frac{4}{l}}_{L^2}\|D^3u\|^{\frac{4}{l}}_{L^2}\leqslant\\
&\varepsilon_1\|D^3u\|^2_{L^2}+C(\frac{\varepsilon_1}{C(\varepsilon_1)C_G^{\frac{6}{l}}})\\
&(\|Du\|^k_{L^l}+1)\|D^2u\|^2_{L^2}。
\end{aligned}$$

最后,将上述估计结合起来,并选择足够小的 ε_1,可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|^2_{L^2}+\|D^3u\|^2_{L^2}\leqslant$$
$$\tilde{C}(\|Du\|^k_{L^l}+1)\|D^2u\|^2_{L^2}。$$

因此,应用 Gronwall 不等式以及假设(9)和引理 5,完成了引理 6 的证明。

引理 7 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$。在给出的假设(9)下成立下面估计:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|Du\|^2_{H^2(\Omega)}+\int_0^T\|Du\|^2_{H^3(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C,$$

其中,常数 C 依赖 $\tilde{K}$ 和 C_G。

证明 首先,对方程(1)关于 D^3 求导,乘以 D^3u,并在 Ω 上对 x 进行积分,可以得到关于 D^3 求导,乘以 D^3u,并在 Ω 上对 x 进行积分,可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^3u\|^2_{L^2}+\|D^4u\|^2_{L^2}=$$
$$-\langle D^3(u\times\Delta u),D^3u\rangle+\langle D^3(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle。$$

应用以下 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|Du\|_{L^8(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G \|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{4}},$$
$$\|Du\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G \|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{6}} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{5}{6}},$$
$$\|D^2u\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G \|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|Du\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{4}},$$
$$\|D^3u\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G \|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{4}} \|Du\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}},$$
$$\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G \|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2}{3}} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{3}},$$

有估计如下:

$$\begin{aligned}
&|-\langle D^3(u\times\Delta u),D^3u\rangle| = \\
&\quad |\langle D^3(u\times\nabla u),\nabla D^3u\rangle| = \\
&\quad |\langle D^3u\times\nabla u+3D^2u\times D\nabla u+3Du\times \\
&\quad D^2\nabla u+u\times\nabla D^3u,\nabla D^3u\rangle| = \\
&\quad |\langle D^3u\times\nabla u+3D^2u\times D\nabla u+3Du\times \\
&\quad D^2\nabla u,\nabla D^3u\rangle| \leqslant \\
&\quad 4\|D^3u\|_{L^4}\|Du\|_{L^4}\|D^4u\|_{L^2} + \\
&\quad 3\|D^2u\|_{L^4}\|D^2u\|_{L^4}\|D^4u\|_{L^2} \leqslant \\
&\quad 4C_G^2\|Du\|_{H^3}^{\frac{23}{12}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{13}{12}} + \\
&\quad 4C_G^2\|Du\|_{H^3}^{\frac{3}{2}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \leqslant \\
&\quad 2\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2 + C\left(\frac{\varepsilon_1}{4C_G^2}\right)\|Du\|_{H^1}^{26} + \\
&\quad C\left(\frac{\varepsilon_1}{4C_G^2}\right)\|Du\|_{H^1}^{6} \leqslant 2\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2 + 2\tilde{C}\left(\frac{\varepsilon_1}{4C_G^2}\right)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&|\langle D^3(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle| = \\
&\quad |-\langle D^2(|\nabla u|^2u),D^4u\rangle| = \\
&\quad |-\langle D^2|\nabla u|^2u+2D|\nabla u|^2Du+ \\
&\quad |\nabla u|^2D^2u,D^4u\rangle| = \\
&\quad |-\langle 2D\nabla u\cdot D\nabla u\cdot u+2\nabla u\cdot D^2\nabla u\cdot u+ \\
&\quad 4\nabla u\cdot\nabla Du\cdot Du+|\nabla u|^2D^2u,D^4u\rangle| \leqslant \\
&\quad 2\|D^2u\|_{L^4}\|D^2u\|_{L^4}\|D^4u\|_{L^2} + \\
&\quad 2\|Du\|_{L^\infty}\|D^3u\|_{L^2}\|D^4u\|_{L^2} + \\
&\quad 5\|Du\|_{L^8}\|Du\|_{L^8}\|D^2u\|_{L^4}\|D^4u\|_{L^2} \leqslant \\
&\quad 2C_G^2\|Du\|_{H^3}^{\frac{3}{2}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} + \\
&\quad 2C_G^2\|Du\|_{H^3}^{\frac{5}{3}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{4}{3}} + \\
&\quad 5C_G^3\|Du\|_{H^3}^{\frac{7}{4}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{9}{4}} \leqslant \\
&\quad 3\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2 + C\left(\frac{\varepsilon_1}{2C_G^2}\right)\|Du\|_{H^1}^{6} + \\
&\quad C\left(\frac{\varepsilon_1}{2C_G^2}\right)\|Du\|_{H^1}^{8} + C\left(\frac{\varepsilon_1}{5C_G^3}\right)\|Du\|_{H^1}^{18} \leqslant \\
&\quad 3\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2 + 2\tilde{C}\left(\frac{\varepsilon_1}{2C_G^2}\right) + \tilde{C}\left(\frac{\varepsilon_1}{5C_G^3}\right)。
\end{aligned}$$

将结果代入原等式,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^3u\|_{L^2}^2 + \|D^4u\|_{L^2}^2 \leqslant \varepsilon\|Du\|_{H^3}^2 + \tilde{C},$$

然后,将 $\|Du\|_{H^2}^2$ 加到不等式的两边以吸收 $\|Du\|_{H^3}^2$,并选择足够小的 ε,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^3u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{H^3}^2 \leqslant \|Du\|_{H^2}^2 + \tilde{C}。$$

最后,将上述不等式在$[0,T]$上进行积分,两边同时加上 $\|Du\|_{H^1}^2$,并利用引理 5 和引理 6,可以得出如下结论:

$$\begin{aligned}
&\|Du\|_{H^2}^2 + \int_0^T \|Du\|_{H^3}^2\mathrm{d}t \leqslant \\
&\quad \int_0^T \|Du\|_{H^2}^2\mathrm{d}t + u(T+1),
\end{aligned}$$

其中,u 是一个非负常数。

因此,通过应用积分形式的 Gronwall 不等式以及引理 6,完成了引理 7 的证明。

4.2 Besov 空间中 Serrin 型爆破准则的证明

基于引理 6 和引理 7 的证明,注意到引理 7 的有效性依赖于引理 6。因此,定理 1 中公式(4)的真实性由引理 8 的真实性来保证。

首先,假设

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla^2u\|_{L^k(0,T;\dot{B}^{-l}_{\infty,\infty}(\Omega))} < \infty。\tag{10}$$

引理 8　设 Ω 为$\mathbb{R}^2$。在假设(10)下,以下估计成立:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|D^3u\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}t \leqslant C,$$

其中,常数 C 仅取决于 $\tilde{K}$ 和 C_G。

证明　首先,将方程(1)乘以 D^2u,并分别在 Ω 上对 x 进行积分,得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|_{L^2}^2 + \|D^3u\|_{L^2}^2 = \\
&\quad -\langle D^2(u\times\Delta u),D^2u\rangle + \langle D^2(|\nabla u|^2u),D^2u\rangle。
\end{aligned}$$

然后,利用以下 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Besov 空间中的插值定理,得到

$$\|Du\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G\|D^2u\|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}},$$
$$\|D^2u\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\|D^2u\|_{\dot{H}^{\frac{l}{2}}(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2}{3}}\|D^2u\|_{\dot{B}^{-l}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{3}},$$
$$\|D^2u\|_{\dot{H}^{\frac{l}{2}}(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{l}{2}}\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{l}{2}},$$
$$\|D^2u\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_G\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}。$$

现在可以估计非线性项:

$$\begin{aligned}
&|-\langle D^2(u\times\Delta u),D^2u\rangle + \langle D^2(|\nabla u|^2u),D^2u\rangle| = \\
&\quad |\langle D^2(u\times\nabla u),\nabla D^2u\rangle - \langle D(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle| = \\
&\quad |\langle D^2u\times\nabla u+2Du\times D\nabla u,\nabla D^2u\rangle - \\
&\quad \langle 2\nabla u\cdot D\nabla u\cdot u+|\nabla u|^2Du,D^3u\rangle| \leqslant
\end{aligned}$$

$$4\|D^2u\|_{L^3}\|Du\|_{L^6}\|D^3u\|_{L^2}+$$
$$\|Du\|_{L^6}^3\|D^3u\|_{L^2}\leqslant$$
$$4C_G\|D^2u\|_{L^3}^{\frac{3}{2}}\|u\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|D^3u\|_{L^2}+$$
$$C_G^3\|D^2u\|_{L^3}^{\frac{3}{2}}\|u\|_{L^\infty}^{\frac{3}{2}}\|D^3u\|_{L^2}\leqslant$$
$$2\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+C\left(\frac{\varepsilon_1}{4C_G}\right)\|D^2u\|_{L^3}^3+$$
$$C\left(\frac{\varepsilon_1}{C_G^3}\right)\|D^2u\|_{L^3}^3\leqslant 2\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+$$
$$C^3C_G^2\left(C\left(\frac{\varepsilon_1}{4C_G}\right)+C\left(\frac{\varepsilon_1}{C_G^3}\right)\right)$$
$$\|D^2u\|_{L^2}^{2-l}\|D^3u\|_{L^2}^{l}\|D^2u\|_{\dot B^{-l}_{\infty,\infty}}\leqslant 3\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+$$
$$C\left(\frac{\varepsilon_1}{C^3C_G^2\left(C\left(\frac{\varepsilon_1}{4C_G}\right)+C\left(\frac{\varepsilon_1}{C_G^3}\right)\right)}\right)\|D^2u\|_{L^2}^2$$
$$(\|D^2u\|_{\dot B^{-l}_{\infty,\infty}}^{k}+1)。$$

现在可以估计非线性项 $|u|=1$ 和 $\frac{1}{k}+\frac{l}{2}\leqslant 1$。

最后,选择足够小的 ε_1,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|_{L^2}^2+\|D^3u\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$\tilde C(\|D^2u\|_{\dot B^{-l}_{\infty,\infty}}^{k}+1)\|D^2u\|_{L^2}^2。$$

因此,通过应用微分形式的 Gronwall 不等式、引理 5 以及假设(10),证明了引理 8,从而完成了在具有负指标的 Besov 空间中爆破准则的证明。

5 $n=3$ 时的爆破准则

本节中将对 LLG 方程(1)~方程(2)(在三维空间中的情况)的两个爆破准则进行证明。

5.1 Serrin 型爆破准则的证明

该证明紧密遵循二维情况的过程,结合两个引理来推导三维空间中的 Serrin 型爆破准则。在进一步推导之前,作出以下假设。对于满足 $\frac{2}{k}+\frac{3}{l}\leqslant 1$ 和 $3<l\leqslant\infty$ 条件的 k 和 l,假设

$$\lim_{T\to T^*}\|\nabla u\|_{L^k(0,T;L^l(\Omega))}<\infty。\qquad(11)$$

引理 9 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$。在假设(11)下,下面不等式成立:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^T\|D^3u\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant C,$$

其中,常数 C 仅依赖于 $\tilde K$ 和 C_G。

证明 利用以下 Gagliardo-Nirenberg 不等式来推进推导过程。

$$\|D^2u\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}。$$

对方程(1)关于 D^2 求导,乘以 D^2u,并在 Ω 上对 x 进行积分,可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|_{L^2}^2+\|D^3u\|_{L^2}^2=$$
$$-\langle D^2(u\times\Delta u),D^2u\rangle+\langle D^2(|\nabla u|^2u),D^2u\rangle。$$

由于条件 $\frac{2}{k}+\frac{3}{l}\leqslant 1$ 和 $3<l\leqslant\infty$ 满足 $\frac{2l}{l-3}\leqslant k$,故可以得到下面的估计:

$$|-\langle D^2(u\times\Delta u),D^2u\rangle|=$$
$$|\langle D^2(u\times\nabla u),\nabla D^2u\rangle|=$$
$$|\langle D^2u\times\nabla u+2Du\times D\nabla u+u\times D^2\nabla u,\nabla D^2u\rangle|=$$
$$|\langle D^2u\times\nabla u+2Du\times D\nabla u,\nabla D^2u\rangle|\leqslant$$
$$3\|D^3u\|_{L^2}\|Du\|_{L^l}\|D^2u\|_{L^{\frac{2l}{l-2}}}\leqslant$$
$$\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+C\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)\|Du\|_{L^l}^2\|D^2u\|_{L^{\frac{2l}{l-2}}}^2\leqslant$$
$$\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+C\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)C_G^{\frac{6}{l}}\|Du\|_{L^l}^2$$
$$\|D^2u\|_{L^2}^{2-\frac{6}{l}}\|D^3u\|_{L^2}^{\frac{6}{l}}\leqslant 2\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+$$
$$C\left(\frac{\varepsilon_1}{C\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)C_G^{\frac{6}{l}}}\right)(\|Du\|_{L^l}^k+1)\|D^2u\|_{L^2}^2$$

和

$$|\langle D^2(|\nabla u|^2u),D^2u\rangle|=$$
$$|-\langle D(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle|=$$
$$|-\langle D|\nabla u|^2u+|\nabla u|^2Du,D^3u\rangle|=$$
$$|-\langle 2\nabla u\cdot D\nabla u\cdot u+|\nabla u|^2Du,D^3u\rangle|\leqslant$$
$$2\|D^3u\|_{L^2}\|Du\|_{L^l}\|D^2u\|_{L^{\frac{2l}{l-2}}}+$$
$$\|Du\|_{L^6}^3\|D^3u\|_{L^2}\leqslant 2\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+C\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$$
$$\|Du\|_{L^l}^2\|D^2u\|_{L^{\frac{2l}{l-2}}}^2+C(\varepsilon_1)\|Du\|_{L^6}^6\leqslant$$
$$2\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+$$
$$C\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\|Du\|_{L^l}^2\|D^2u\|_{L^2}^{2-\frac{6}{l}}\|D^3u\|_{L^2}^{\frac{6}{l}}+$$
$$C(\varepsilon_1)\|Du\|_{L^6}^6\leqslant 4\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+$$
$$\left(C\left(\frac{\varepsilon_1}{\frac{\varepsilon_1}{2}}\right)+C\left(\frac{\varepsilon_1}{C(\varepsilon_1)C_G^{\frac{6}{l}}}\right)\right)$$
$$(\|Du\|_{L^l}^k+1)\|D^2u\|_{L^2}^2,$$

其中,最后一个等式利用了 $|u|=1$ 和 $|\Delta u|^2=-\Delta u\cdot u\leqslant|\Delta u|\leqslant|D^2u|$。

$$C(\varepsilon_1)\|Du\|_{L^6}^6\leqslant C(\varepsilon_1)\int_\Omega|Du|^2|D^2u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(\varepsilon_1)\|Du\|_{L^l}^2\|D^2u\|_{L^{l-2}}^{2\frac{2l}{}}\leqslant$$
$$C(\varepsilon_1)C_G^{\frac{6}{l}}\|Du\|_{L^l}^2\|D^2u\|_{L^2}^{2-\frac{6}{l}}\|D^3u\|_{L^2}^{\frac{6}{l}}\leqslant$$
$$\varepsilon_1\|D^3u\|_{L^2}^2+$$
$$C\Big(\frac{\varepsilon_1}{C(\varepsilon_1)C_G^{\frac{6}{l}}}\Big)(\|Du\|_{L^l}^k+1)\|D^2u\|_{L^2}^2。$$

基于之前的估计并选择足够小的 ε_1,可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^2u\|_{L^2}^2+\|D^3u\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$\tilde{C}(\|Du\|_{L^l}^k+1)\|D^2u\|_{L^2}^2,$$

因此,由差分形式的 Gronwall 不等式和假设(11)共同完成引理 9 的证明。

引理 10　设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$。由假设(11),以下结论成立:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|Du\|_{H^2(\Omega)}^2+\int_0^T\|Du\|_{H^3(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant C,$$

其中,常数 C 仅取决于 $\tilde{K}$ 和 C_G。

证明　首先,对方程(1)关于 D^3 求导,乘以 D^3u,并在 Ω 上对 x 进行积分,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^3u\|_{L^2}^2+\|D^4u\|_{L^2}^2=$$
$$-\langle D^3(u\times\Delta u),D^3u\rangle+\langle D^3(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle。$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}},$$
$$\|Du\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|Du\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}},$$
$$\|Du\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|Du\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}},$$
$$\|D^2u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|Du\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}},$$
$$\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|Du\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|Du\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}},$$

可以得到

$$|-\langle D^3(u\times\Delta u),D^3u\rangle|=$$
$$|\langle D^3(u\times\nabla u),\nabla D^3u\rangle|=$$
$$|\langle D^3u\times\nabla u+3D^2u\times D\nabla u+3Du\times D^2\nabla u+u\times\nabla D^3u,\nabla D^3u\rangle|=$$
$$|\langle D^3u\times\nabla u+3D^2u\times D\nabla u+3Du\times D^2\nabla u,\nabla D^3u\rangle|\leqslant$$
$$4\|D^3u\|_{L^2}\|Du\|_{L^\infty}\|D^4u\|_{L^2}+$$
$$3\|D^2u\|_{L^3}\|D^2u\|_{L^6}\|D^4u\|_{L^2}\leqslant$$
$$7C_G^2\|Du\|_{H^3}^{\frac{7}{4}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{5}{4}}\leqslant$$
$$\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2+C\Big(\frac{\varepsilon_1}{7C_G^2}\Big)\|Du\|_{H^1}^{10}\leqslant$$
$$\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2+\tilde{C}\Big(\frac{\varepsilon_1}{7C_G^2}\Big)$$

和

$$|\langle D^3(|\nabla u|^2u),D^3u\rangle|=$$
$$|-\langle D^2(|\nabla u|^2u),D^4u\rangle|=$$
$$|-\langle D^2|\nabla u|^2u+2D|\nabla u|^2Du+|\nabla u|^2D^2u,D^4u\rangle|=$$
$$|-\langle 2D\nabla u\cdot D\nabla u\cdot u+2\nabla u\cdot D^2\nabla u\cdot u+4\nabla u\cdot\nabla Du\cdot Du+|\nabla u|^2D^2u,D^4u\rangle|\leqslant$$
$$2\|D^2u\|_{L^3}\|D^2u\|_{L^6}\|D^4u\|_{L^2}+$$
$$2\|Du\|_{L^\infty}\|D^3u\|_{L^2}\|D^4u\|_{L^2}+$$
$$5\|Du\|_{L^\infty}^2\|D^2u\|_{L^2}\|D^4u\|_{L^2}\leqslant$$
$$4C_G^2\|Du\|_{H^3}^{\frac{7}{4}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{5}{4}}+5C_G^3\|Du\|_{H^3}^{\frac{3}{2}}\|Du\|_{H^1}^{\frac{5}{2}}\leqslant$$
$$2\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2+C\Big(\frac{\varepsilon_1}{4C_G^2}\Big)\|Du\|_{H^1}^{10}+$$
$$C\Big(\frac{\varepsilon_1}{5C_G^3}\Big)\|Du\|_{H^1}^{10}\leqslant 2\varepsilon_1\|Du\|_{H^3}^2+$$
$$\tilde{C}\Big(\frac{\varepsilon_1}{4C_G^2}\Big)+\tilde{C}\Big(\frac{\varepsilon_1}{5C_G^3}\Big)。$$

最后,像引理 7 那样重复上述步骤,选择足够小的 ε_1,并对两边关于 t 进行积分,完成引理 10 的证明。因此,在 $n=3$ 的情况下建立了式(3)。

5.2　Besov 空间中 Serrin 型爆破准则的证明

注意到 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Besov 空间中的插值不等式:

$$\|Du\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|D^2u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}},$$
$$\|D^2u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\leqslant C\|D^2u\|_{\dot{H}^{\frac{l}{2}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}}\|D^2u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-l}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{3}},$$
$$\|D^2u\|_{\dot{H}^{\frac{l}{2}}(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-\frac{l}{2}}\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{l}{2}},$$
$$\|D^2u\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_G\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|D^3u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}},$$

这些用于证明当 $n=3$ 时,式(4)情况的不等式与引理 8 中使用的不等式是相同的。因此,当 $n=3$ 时,式(4)可以直接得出。

参考文献:

[1]　Landau L, Lifshitz E. Perspectives in theoretical physics[M]. Oxford: Pergamon Press, 1992.

[2]　Gilbert T L. A Lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetization field[J]. Physical Review, 1955, 100: 1243-1255.

[3]　Visintin A. On Landau-Lifshitz' equations for ferromagnetism[J]. Japan Journal of Applied Mathematics, 1985, 2: 69-84.

[4] Sulem P L, Sulem C, Bardos C. On the continuous limit for a system of classical spins[J]. Communications in Mathematical Physics, 1986, 107(3): 431-454.

[5] Ding W Y, Wang Y D. Schrödinger flow of maps into symplectic manifolds[J]. Science in China Series A: Mathematics, 1998, 41(7): 746-755.

[6] Ding W Y, Wang Y D. Local Schrödinger flow into Kähler manifolds[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2001, 44(11): 1446-1464.

[7] Ding W Y, Wang H Y, Wang Y D. Schrödinger flows on compact Hermitian symmetric spaces and related problems[J]. Acta Mathematica Sinica, 2003, 19(2): 303-312.

[8] 周毓麟, 郭柏灵, 谭绍滨. Existence and uniqueness of smooth solution for system of ferromagnetic chain[J]. Science in China Series A: Mathematics, Physics, Astronomy and Technological Science, 1991, 34: 257-266.

[9] Wang Y D. Heisenberg chain systems from compact manifolds into S^2[J]. Journal of Mathematical Physics, 1998, 39(1): 363-371.

[10] Alouges F, Soyeur A. On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations: existence and nonuniqueness[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1992, 18(11): 1071-1084.

[11] Guo B, Hong M C. The Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain and harmonic maps[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 1993, 1(3): 311-334.

[12] Bejenaru I, Ionescu A D, Kenig C E, et al. Global Schrödinger maps in dimensions $d\geqslant 2$: small data in the critical Sobolev spaces[J]. Annals of Mathematics, 2011,173(3): 1443-1506.

[13] Di Fratta G, Innerberger M, Praetorius D. Weak-strong uniqueness for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in micromagnetics[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2020, 55: 103122.

[14] Fan J S, Guo B L. Regularity criterion to some liquid crystal models and the Landau-Lifshitz equations in $\mathbb{R}^3$[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51(10): 1787-1797.

[15] Fan J S, Ozawa T. Blow-up criterion for 3D navier-stokes equations and Landau-Lifshitz system in a bounded domain[J]. Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics, 2016: 175-182.

[16] Fan J S, Sun W J, Yin J P. Blow-up criteria for Boussinesq system and MHD system and Landau-Lifshitz equations in a bounded domain[J]. Boundary Value Problems, 2016, 2016: 90.

[17] Wang G W, Guo B L. A blowup criterion to the strong solution to the multi-dimensional Landau-Lifshitz-Gilbert equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2023, 135: 108410.

[18] Qiu Z, Wang G W. Blow up criteria for three-dimensional incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz system in the whole space[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2024, 536(1): 128222.

[19] Machihara S, Ozawa T. Interpolation inequalities in Besov spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2003, 131(5): 1553-1556.

【责任编辑:卓祯雨】