

文章编号:1671-4229(2024)06-0066-06

二面体群 D_4 的复表示环的自同构群

赖心如

(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 文章研究八阶二面体群 D_4 复表示环 $r(D_4)$ 的自同构群, 计算 $r(D_4)$ 的所有自同构, 并证明 $r(D_4)$ 的自同构群同构于三次对称群与二阶循环群的直积。

关键词: 表示环; 同构; 自同构群

中图分类号: O152.6; O153.3 **文献标志码:** A

The automorphism group of the complex representation ring of the dihedral group D_4

LAI Xin-ru

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper studies the automorphism group of the complex representation ring $r(D_4)$ of the dihedral group D_4 of order 8 and all the ring automorphisms of $r(D_4)$ are computed. It is shown that the automorphism group of $r(D_4)$ is isomorphic to the direct product of the symmetric group of degree 3 and the cyclic group of order 2.

Key words: representation ring; isomorphism; automorphism group

有限群的表示环是代数表示理论中的研究热点之一。表示环的概念最早由 Green^[1] 提出, 因此, 表示环也称 Green 环或分裂 Grothendieck 环。作为一个张量范畴不变量, 有限群 G 的表示环描述了其有限维表示张量积分解为不可分解子表示直和的情况。在有限维常表示的情形下, 由于表示的完全可约性, 有限群 G 的表示环等同于其表示范畴的 Grothendieck 环。例如朱婷婷^[2] 给出广义二面体群上的常表示及其张量积分解, 并谈及二面体群表示环也叫 Grothendieck 环。而后, 唐帅^[3] 更是直接刻画了 $2n$ 阶二面体群 D_n 的 Grothendieck 环的生成元与生成关系。此外, 曹刘峰等^[4] 利用重数定理刻画了二面体群 D_5 的表示

环。近期, 戴莉兰等^[5] 也刻画了对称群 S_5 的表示环, 给出极小生成元关系式表达, 并计算其行列式以及 Casimir 数等环结构不变量。

近年来, 研究有限群乃至半单 Hopf 代数表示环的自同构问题日益增多。如 Su 等^[6] 研究了一类 8 维非交换非余交换的半单 Hopf 代数表示环的自同构群。也有相当多的工作对于有限维非半单 Hopf 代数 Grothendieck 环的自同构问题进行研究。Jia 等^[7] 证明了 Sweedler 4 维 Hopf 代数表示环的自同构群与 Klein 四元群同构; Zhao 等^[8] 研究了 9 维 Taft Hopf 代数表示环的自同构; 孙华等^[9] 得到了 8 维 Radford Hopf 代数表示环的自同构群同构于三次对称群与一个群的半直积; 胡承

收稿日期: 2024-04-23; 修回日期: 2024-06-05

作者简介: 赖心如(1999—), 女, 硕士研究生. E-mail: 2112215054@e.gzhu.edu.cn

引文格式: 赖心如. 二面体群 D_4 的复表示环的自同构群[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2024, 23(6): 66-71.

超等^[10]给出 Sweedler 4 维 Hopf 代数 Drinfeld 偶的 Grothendieck 环的所有环自同构表达式,并证明了该环的自同构群同构于 Klein 群;潘梦雅^[11]刻画了 4 维和 9 维 Taft 代数 Drinfeld 偶的 Grothendieck 环的自同构群。对于其他不源于有限群与有限维 Hopf 代数表示的 fusion 环,其自同构的刻画也有不少工作^[12-13]。以上的研究结果表明,对于表示环的自同构,没有直接的构建方法。但借助表示环的生成元与生成关系,可将表示环与多项式商环一一对应起来,从而刻画出表示环的自同构群。本文研究了整数环上二面体群 D_4 复表示环的自同构群,期望对探讨一般二面体群 D_n 上表示环的自同构群结构有所帮助。

文章主要分为两部分:第一部分介绍了本文所需的一些基本概念和结论;第二部分研究了整数环上 8 阶二面体群 D_4 的表示环 $r(D_4)$ 的自同构群。首先构造 $r(D_4)$ 的 11 个加法群自同态,并证明它们都是 $r(D_4)$ 的环自同构,结合 $r(D_4)$ 的恒等变换,构成了 $r(D_4)$ 的环自同构群的一个 12 元子群 S ;然后证明若 f 是 $r(D_4)$ 的环自同构,则 f 是恒等变换,或是前面构造的 11 个自同构之一,从而证明了 $r(D_4)$ 的环自同构群与 S 相等。又 S 与 $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ 同构,因此,证得 $r(D_4)$ 的自同构群同构于三次对称群与二阶循环群的直积。

1 预备知识

本文中 \mathbb{Z}, \mathbb{C} 分别表示整数环和复数域,文中出现的表示环均为复表示环。

定义 1^[14] 群 G 的复表示环 $r(G)$ 是具有 \mathbb{Z} -基 $\{[V_i]\}_{i \in I}$, 加法和乘法由下式所确定的环,对于 G 的任意两个复表示 M, N ,

$$[M] + [N] = [M \oplus N], [M][N] = [M \otimes N].$$

这里 $\{[V_i]\}_{i \in I}$ 是 G 互不等价的不可约复表示, $[M]$ 表示 G 的任意有限维复表示 M 对应的同构类。

引理 1^[14] 设 $\{(\rho_i, V_i) \mid i = 1, \dots, s\}$ 为有限群 G 的一个互不等价的不可约复表示完备集,且 $V_i \otimes V_j \cong \bigoplus_{k=1}^s n_{ij}^k V_k, 1 \leq i, j \leq s$, 是 G 的不可约复表示的张量积直和分解,则

$$n_{ij}^k = \frac{1}{|G|} \sum_{t=1}^s |C_t| \chi_i \chi_j \overline{\chi_{kt}}, \forall 1 \leq i, j, k \leq s,$$

其中, $C_t (1 \leq t \leq s)$ 表示群 G 的所有共轭类,而 χ_{ij} 是 G 的复特征标表在位置 (i, j) 的值,这里 $\overline{\chi_{kt}}$ 是 $\chi_{kt} \in \mathbb{C}$ 的复共轭。

8 阶二面体群 D_4 是由生成元 r 与 s 生成,并满足如下的生成关系:

$$r^4 = s^2 = (rs)^2 = 1,$$

其互不等价不可约复表示包括:4 个 1 维表示,即 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2), (\rho_3, V_3)$ 和 (ρ_4, V_4) , 其中, (ρ_1, V_1) 为单位表示,以及一个 2 维表示 (ρ_5, V_5) 。从而二面体群 D_4 的表示环 $r(D_4)$ 有基元 $[V_i], 1 \leq i \leq 5$ 。相应地, D_4 的复特征标表如表 1 所示。

表 1 D_4 的复特征标表

Table 1 Character table of D_4

$Irr_{\mathbb{C}} D_4$	\mathcal{C}				
	$\{1\}$	$\{r, r^3\}$	$\{r^2\}$	$\{s, r^2 s\}$	$\{rs, r^3 s\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0

引理 2 设 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 是变量 x_1, x_2, x_3, x_4 的多项式环,二面体群 D_4 的表示环

$$r(D_4) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4] / I_0,$$

其中, I_0 是由 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 中元素 $x_1^2 - 1, x_1 x_2 - x_3, x_1 x_3 - x_2, x_1 x_4 - x_4, x_2^2 - 1, x_2 x_3 - x_1, x_2 x_4 - x_4, x_3^2 - 1, x_3 x_4 - x_4, x_4^2 - x_1 - x_2 - x_3 - 1$ 生成的理想。

证明 由 D_4 的特征标表(表 1)及引理 1 可得不可约表示张量积 $V_i \otimes V_j, i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ 的直和分解如下:

$$\begin{cases} V_1 \otimes V_i \cong V_i \otimes V_1 \cong V_i, i = 1, 2, 3, 4, 5; \\ V_2 \otimes V_2 \cong V_3 \otimes V_3 \cong V_4 \otimes V_4 \cong V_1, \\ V_2 \otimes V_3 \cong V_3 \otimes V_2 \cong V_4, \\ V_2 \otimes V_4 \cong V_4 \otimes V_2 \cong V_3, \\ V_2 \otimes V_5 \cong V_5 \otimes V_2 \cong V_3 \otimes V_5 \cong V_5 \otimes V_3 \cong \\ V_4 \otimes V_5 \cong V_5 \otimes V_4 \cong V_5, \\ V_3 \otimes V_4 \cong V_4 \otimes V_3 \cong V_2. \end{cases}$$

设 $V_5 \otimes V_5 \cong n_{55}^1 V_1 \oplus n_{55}^2 V_2 \oplus n_{55}^3 V_3 \oplus n_{55}^4 V_4 \oplus$

$n_{55}^5 V_5$, 可得

$$\begin{cases} n_{55}^1 = \frac{1}{8}(1 \times 1 \times 4 + 2 \times 1 \times 0 + 1 \times 1 \times 4 + \\ 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 1 \times 0) = 1, \\ n_{55}^2 = \frac{1}{8}(1 \times 1 \times 4 + 2 \times 1 \times 0 + 1 \times 1 \times 4 + \\ 2 \times (-1) \times 0 + 2 \times (-1) \times 0) = 1, \\ n_{55}^3 = \frac{1}{8}(1 \times 1 \times 4 + 2 \times (-1) \times 0 + \\ 1 \times 1 \times 4 + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times (-1) \times 0) = 1, \\ n_{55}^4 = \frac{1}{8}(1 \times 1 \times 4 + 2 \times (-1) \times 0 + 1 \times 1 \times \\ 4 + 2 \times (-1) \times 0 + 2 \times 1 \times 0) = 1, \\ n_{55}^5 = \frac{1}{8}(1 \times 2 \times 4 + 2 \times 0 \times 0 + 1 \times (-2) \times \\ 4 + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 0 \times 0) = 0. \end{cases}$$

即有

$$V_5 \otimes V_5 \cong V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4.$$

综上, 将多项式生成元 x_{i-1} 对应到基元 $[V_i]$, $i=1, 2, 3, 4, 5$, 其中, $x_0=1$, 可得上述引理。

定理 1 二面体群 D_4 的表示环

$$r(D_4) \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/I,$$

其中, x, y, z 分别为 V_2, V_3, V_5 在 $\mathbb{Z}[x, y, z]$ 中的同态像, I 为多项式环中的如下元素生成的理想: $x^2-1, y^2-1, xz-z, yz-z, z^2-xy-x-y-1$ 。

证明 由引理 2 中 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 所模去的关系 $x_1 x_2 - x_3 = 0$ 可知, x_3 可由 x_1, x_2 表示, 记 $x = x_1, y = x_2, z = x_4$, 故可将 $r(D_4)$ 由 x_1, x_2, x_3, x_4 这 4 个生成元所生成的环化简为由 x, y, z 这 3 个生成元生成的环, 即构造环同态

$$\begin{aligned} \phi: R_1 &\rightarrow R_2, \\ x_1 &\mapsto x, \\ x_2 &\mapsto y, \\ x_3 &\mapsto xy, \\ x_4 &\mapsto z, \end{aligned}$$

其中, $R_1 = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]/I_0, R_2 = \mathbb{Z}[x, y, z]/I$ 。作为自由 \mathbb{Z} -模 R_1 与 R_2 之间的同态, ϕ 将基元集一一对应到基元集, 可知 $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ 是环同构。因此, 二面体群 D_4 的表示环:

$$r(D_4) \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/(x^2-1, y^2-1, xz-z, yz-z, z^2-xy-x-y-1).$$

定理得证。

注 事实上, 对二面体群 D_4 表示环的刻画不仅可从特征标理论研究得到, 还可利用 Dickson

第一类型多项式给出二面体群表示环结构的详细描述^[3, 15]。

2 二面体群 D_4 的表示环的同构群

在定理 1 中 $r(D_4)$ 的表达形式 $\mathbb{Z}[x, y, z]/(x^2-1, y^2-1, xz-z, yz-z, z^2-xy-x-y-1)$ 具有 \mathbb{Z} -基 $\{1, x, y, z, xy\}$ 。用 $Aut(r(D_4))$ 记 $r(D_4)$ 的同构群, 设 id 是 $r(D_4)$ 的恒等变换, σ_i 是 $r(D_4)$ 如下定义的 \mathbb{Z} -线性自同态, 其中, $i=1, 2, \dots, 11$ 。

$$\sigma_1: 1 \mapsto 1, x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto -z, xy \mapsto xy;$$

$$\sigma_2: 1 \mapsto 1, x \mapsto x, y \mapsto xy, z \mapsto z, xy \mapsto y;$$

$$\sigma_3: 1 \mapsto 1, x \mapsto x, y \mapsto xy, z \mapsto -z, xy \mapsto y;$$

$$\sigma_4: 1 \mapsto 1, x \mapsto y, y \mapsto x, z \mapsto z, xy \mapsto xy;$$

$$\sigma_5: 1 \mapsto 1, x \mapsto y, y \mapsto x, z \mapsto -z, xy \mapsto xy;$$

$$\sigma_6: 1 \mapsto 1, x \mapsto y, y \mapsto xy, z \mapsto z, xy \mapsto x;$$

$$\sigma_7: 1 \mapsto 1, x \mapsto y, y \mapsto xy, z \mapsto -z, xy \mapsto x;$$

$$\sigma_8: 1 \mapsto 1, x \mapsto xy, y \mapsto x, z \mapsto z, xy \mapsto y;$$

$$\sigma_9: 1 \mapsto 1, x \mapsto xy, y \mapsto x, z \mapsto -z, xy \mapsto y;$$

$$\sigma_{10}: 1 \mapsto 1, x \mapsto xy, y \mapsto y, z \mapsto z, xy \mapsto x;$$

$$\sigma_{11}: 1 \mapsto 1, x \mapsto xy, y \mapsto y, z \mapsto -z, xy \mapsto x.$$

命题 1 令 $S = \{id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}\}$, 则 S 是 12 阶群。

证明 不妨令 $\sigma_0 = id$ 。

(1) σ_0 是单位元;

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma_6^2 = \sigma_7^2 = \sigma_8^2 = \sigma_9^2 = \sigma_{10}^2 = \sigma_{11}^2 = id = \sigma_0$;

(3) 可验证任给 $\sigma_i, \sigma_j, 0 \leq i, j \leq 11, \sigma_i \sigma_j, \sigma_j \sigma_i \in S$;

(4) 任给 $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, 0 \leq i, j, k \leq 11$, 有 $(\sigma_i \sigma_j) \sigma_k = \sigma_i (\sigma_j \sigma_k)$ 。

引理 3 $id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}$ 都是 $r(D_4)$ 的同构。

推论 1 S 是 $Aut(r(D_4))$ 的子群。

引理 4 设 f 是 $r(D_4)$ 的同构, 则 $f(x) = \pm x, f(x) = \pm y$ 或 $f(x) = \pm xy$ 。

证明 设 f 是 $r(D_4)$ 的同构, 由于 $x^2=1$, 故由环同态的定义可得 $(f(x))^2 = f(x^2) = 1$ 。

设 $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy, a_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 5$, 则有 $(a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy)^2 = 1$, 展开得到

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) + (a_4^2 + 2a_1 a_2 + 2a_3 a_5)x + (a_4^2 + 2a_1 a_3 + 2a_2 a_5)y + 2a_4(a_1 + a_2 + a_3 + a_5)z +$$

$$(a_4^2 + 2a_2a_3 + 2a_4a_5)xy = 1$$

比较等式两边,可得方程组:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1, \\ a_4^2 + 2a_1a_2 + 2a_3a_5 = 0, \\ a_4^2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_5 = 0, \\ 2a_4(a_1 + a_2 + a_3 + a_5) = 0, \\ a_4^2 + 2a_2a_3 + 2a_1a_5 = 0. \end{cases}$$

计算得到以下8组解:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0; \end{cases} \begin{cases} a_1 = -1, \\ a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 1, \\ a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0; \end{cases} \begin{cases} a_2 = -1, \\ a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = 1, \\ a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0; \end{cases} \begin{cases} a_3 = -1, \\ a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \\ a_5 = 1; \end{cases} \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \\ a_5 = -1. \end{cases}$$

由于 x 的像不可能是 1 或 -1 , 第一行的两组解不存在, 余下 6 组解皆符合条件, 即 $f(x) = \pm x$, $f(x) = \pm y$ 或 $f(x) = \pm xy$ 。

命题 2 设 f 是 $r(D_4)$ 的自同构, 则 $f(x)$ 和 $f(y)$ 的值有如下 24 种可能情形:

- (1) $f(x) = x, f(y) = y$;
- (2) $f(x) = x, f(y) = -y$;
- (3) $f(x) = x, f(y) = xy$;
- (4) $f(x) = x, f(y) = -xy$;
- (5) $f(x) = -x, f(y) = y$;
- (6) $f(x) = -x, f(y) = -y$;
- (7) $f(x) = -x, f(y) = xy$;
- (8) $f(x) = -x, f(y) = -xy$;
- (9) $f(x) = y, f(y) = x$;
- (10) $f(x) = y, f(y) = -x$;
- (11) $f(x) = y, f(y) = xy$;
- (12) $f(x) = y, f(y) = -xy$;
- (13) $f(x) = -y, f(y) = x$;
- (14) $f(x) = -y, f(y) = -x$;
- (15) $f(x) = -y, f(y) = xy$;
- (16) $f(x) = -y, f(y) = -xy$;
- (17) $f(x) = xy, f(y) = x$;
- (18) $f(x) = xy, f(y) = -x$;
- (19) $f(x) = xy, f(y) = y$;
- (20) $f(x) = xy, f(y) = -y$;
- (21) $f(x) = -xy, f(y) = x$;

$$(22) f(x) = -xy, f(y) = -x;$$

$$(23) f(x) = -xy, f(y) = y;$$

$$(24) f(x) = -xy, f(y) = -y.$$

证明 设 f 是 $r(D_4)$ 的自同构, 注意到基元 y 与 x 在环中的地位完全对称。参照引理 4 的证明, 可知 $f(y) = \pm x, f(y) = \pm y$ 或 $f(y) = \pm xy$ 。由于 f 是双射, 故有上述的 24 种情形。

定理 2 设 f 是 $r(D_4)$ 的自同构, 则 $f \in S$ 。

证明 设 f 是 $r(D_4)$ 的自同构, 由命题 2, 逐一验证这 24 种可能情形:

注意到 $xz = z, yz = z$, 由环同态定义知

$$f(x)f(z) = f(z), f(y)f(z) = f(z). \quad (1)$$

设

$$f(z) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy, c_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 5. \quad (2)$$

情形 1: $f(x) = x, f(y) = y$, 则 $f(xy) = xy$ 。展开并比较等式两边可得

$$x(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy \Rightarrow c_2 = c_1, c_5 = c_3; \quad (3)$$

$$y(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy \Rightarrow c_3 = c_1, c_5 = c_2. \quad (4)$$

结合公式(3)和公式(4)可知, $c_5 = c_3 = c_2 = c_1$ 。不妨令 $a = c_5 = c_3 = c_2 = c_1, b = c_4$, 则 $f(z) = a + ax + ay + bz + axy$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 。此时 f 在 \mathbb{Z} -基 $\{1, x, y, z, xy\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix},$$

易求得该矩阵的行列式恒为 b 。由 f 是双射, 可知 $b = \pm 1$ 。

又因为 $z^2 = xy + x + y + 1$, 故有 $(f(z))^2 = f(z^2) = f(xy) + f(x) + f(y) + 1$ 。即

$$(a + ax + ay + bz + axy)^2 = xy + x + y + 1,$$

展开得

$$4a^2 + b^2 + (4a^2 + b^2)x + (4a^2 + b^2)y + 8abz + (4a^2 + b^2)xy = xy + x + y + 1.$$

比较等式两边得以下方程组

$$\begin{cases} 4a^2 + b^2 = 1, \\ 8ab = 0. \end{cases} \quad (5)$$

解方程组得

$$\begin{cases} a=0, \\ b=\pm 1. \end{cases} \quad (6)$$

符合条件,即若 $f(x)=x, f(y)=y$, 则 $f(z)=\pm z$ 。当 $f(x)=x, f(y)=y, f(z)=z$ 时, $f=id$; 当 $f(x)=x, f(y)=y, f(z)=-z$ 时, $f=\sigma_1$ 。

对于剩下的 23 种情形,都将采用以上方法进行验证。为叙述方便,先将 $\pm xf(z)=f(z)$, $\pm yf(z)=f(z)$, $\pm xyf(z)=f(z)$ 这 6 个等式得到的系数 $c_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 5$ 之间的关系算出,如表 2 所示。

表 2 c_i 的关联性
Table 2 Correlation of c_i

$xf(z)=f(z)$	$c_2=c_1, c_5=c_3, c_4=c_4$
$-xf(z)=f(z)$	$c_2=-c_1, c_5=-c_3, c_4=-c_4$
$yf(z)=f(z)$	$c_3=c_1, c_5=c_2, c_4=c_4$
$-yf(z)=f(z)$	$c_3=-c_1, c_5=-c_2, c_4=-c_4$
$xyf(z)=f(z)$	$c_5=c_1, c_3=c_2, c_4=c_4$
$-xyf(z)=f(z)$	$c_5=-c_1, c_3=-c_2, c_4=-c_4$

计算并整理知情形 2、4、13、16、21 及 24 不存在。由式(1)和式(2)结合表 2 可知, $c_5=c_3=-c_2=-c_1, c_4=0$ 。不妨令 $a=-c_5=-c_3=c_2=c_1$, 此时,这 6 种情形中 z 的像皆可设为 $f(z)=a+ax-ay-axy, a \in \mathbb{Z}$ 。一一验证 f 在 \mathbb{Z} -基 $\{1, x, y, z, xy\}$ 下矩阵的行列式均恒为 0, 这与 f 是双射矛盾, 故这 6 种情形不出现。接着讨论情形 3。

情形 3: $f(x)=x, f(y)=xy$, 则 $f(xy)=y$ 。

由式(1)和表 2 可得, $c_5=c_1=c_2=c_3, c_4=c_4$ 。不妨令 $a=c_1=c_2=c_3=c_5, b=c_4$, 此时,式(2)为 $f(z)=a+ax+ay+bz+axy, a, b \in \mathbb{Z}$ 。易知 f 在 \mathbb{Z} -基 $\{1, x, y, z, xy\}$ 下矩阵的行列式为 $-b$, 由 f 是双射可知 $b=\pm 1$ 。注意到 $z^2=xy+x+y+1$, 故有 $(f(z))^2=f(z^2)=f(xy)+f(x)+f(y)+1$, 即

$$(a+ax+ay+bz+axy)^2=y+x+xy+1。$$

展开得

$$4a^2+b^2+(4a^2+b^2)x+(4a^2+b^2)y+8abz+(4a^2+b^2)xy=y+x+xy+1。$$

比较等式两边易得方程组(5), 进而得到方程组的整数解(6), 即 $f(z)=\pm z$ 。

当 $f(x)=x, f(y)=xy, f(xy)=y, f(z)=z$, 此时, $f=\sigma_2$;

当 $f(x)=x, f(y)=xy, f(xy)=y, f(z)=-z$, 此时, $f=\sigma_3$ 。

同理证得情形 9、11、17 及 19 如下:

情形 9: $f(x)=y, f(y)=x$, 则 $f(xy)=xy$;

情形 11: $f(x)=y, f(y)=xy$, 则 $f(xy)=x$;

情形 17: $f(x)=y, f(y)=xy$, 则 $f(xy)=x$;

情形 19: $f(x)=y, f(y)=xy$, 则 $f(xy)=x$ 。

利用式(1), 查阅表 2 可得 $c_1=c_2=c_3=c_5, c_4=c_4$ 。同样可令 $a=c_1=c_2=c_3=c_5, b=c_4$ 此时, 式(2)则为 $f(z)=a+ax+ay+bz+axy, a, b \in \mathbb{Z}$ 。易知 f 在 \mathbb{Z} -基 $\{1, x, y, z, xy\}$ 下矩阵的行列式为 b 或 $-b$, 由 f 是双射可知 $b=\pm 1$ 。注意到 $z^2=xy+x+y+1$, 由环同态的定义有 $(f(z))^2=f(z^2)=f(xy)+f(x)+f(y)+1$ 。类似情形 3 的证明可知, 只有方程组的解(6)符合条件, 也就是

当 $f(x)=y, f(y)=x, f(xy)=xy, f(z)=z$, 此时, $f=\sigma_4$;

当 $f(x)=y, f(y)=x, f(xy)=xy, f(z)=-z$, 此时, $f=\sigma_5$;

当 $f(x)=y, f(y)=xy, f(xy)=x, f(z)=z$, 此时, $f=\sigma_6$;

当 $f(x)=y, f(y)=xy, f(xy)=x, f(z)=-z$, 此时, $f=\sigma_7$;

当 $f(x)=xy, f(y)=x, f(xy)=y, f(z)=z$, 此时, $f=\sigma_8$;

当 $f(x)=xy, f(y)=x, f(xy)=y, f(z)=-z$, 此时, $f=\sigma_9$;

当 $f(x)=xy, f(y)=y, f(xy)=x, f(z)=z$, 此时, $f=\sigma_{10}$;

当 $f(x)=xy, f(y)=y, f(xy)=x, f(z)=-z$, 此时, $f=\sigma_{11}$ 。

对于情形 5、8、10、12、22 及 23, 由式(1)及表 2 知, $c_5=c_2=-c_1=-c_3, c_4=0$ 。不妨令 $a=-c_5=c_3=-c_2=c_1$, 此时,这 6 种情形中 z 的像皆可设为 $f(z)=a-ax+ay-axy, a \in \mathbb{Z}$ 。一一验证 f 在 \mathbb{Z} -基 $\{1, x, y, z, xy\}$ 下矩阵的行列式均恒为 0, 这与 f 是双射矛盾, 故这 6 种情形不出现。同理, 对于情形 6、7、14、15、18 及 20, 由式(1)结合表 2 可知, $c_5=c_1=-c_2=-c_3, c_4=0$ 。不妨令 $a=c_1=c_5=-c_2=-c_3$, 此时,这 6 种情形中 z 的像皆可设为 $f(z)=a-ax-ay+axy, a \in \mathbb{Z}$ 。经验证这 6 种情形也不出现。

综上, 证得该引理。

定理 3 $r(D_4)$ 的自同构群 $Aut(r(D_4))=S$ 。

证明 由推论 1 与定理 2 立得。

定理 4 $Aut(r(D_4)) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$, 其中, S_3 是三次对称群, \mathbb{Z}_2 是二阶循环群。

证明 令 $M = \{id, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_8, \sigma_{10}\}$, $N = \{id, \sigma_1\}$. 易知 N 是 S 的子群, 且同构于二阶循环群 \mathbb{Z}_2 . 由于 $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = \sigma_{10}^2 = \sigma_6^3 = \sigma_8^3 = id$, 且 $\sigma_2\sigma_4 = \sigma_{10}\sigma_2 = \sigma_4\sigma_{10} = \sigma_8, \sigma_4\sigma_2 = \sigma_2\sigma_{10} = \sigma_{10}\sigma_4 = \sigma_6$, 可知, M 是 S 的子群, 且与三次对称群 S_3 同构. 同时, $\sigma_1\sigma_i = \sigma_i\sigma_1 = \sigma_{i+1}, i = 2, 4, 6, 8, 10$, 故存在内直积 $S = M \times N$. 至此由定理 3 立得.

综上所述, 一方面, 不难看出, $Aut(r(D_4))$ 中的每一个同构皆为保持表示维数的映射. S_3 中的每一个置换与 $r(D_4)$ 的一维不可约表示相关, 即保持 $r(D_4)$ 的单位表示和二维不可约表示不变, 3 个非平凡一维不可约表示可以任意置换, 于是得到 $r(D_4)$ 上与 S_3 同构的自同构子群. 另一方面, 可直接通过不可约表示的张量积分解式给出这些自同构. 文中为整洁和计算方便, 依据 $r(D_4)$ 不可约表示的张量积分解式, 将 $r(D_4)$ 同构于多项式商环来看. 自同构需满足的理想关系式本质上就是不可约张量积分解式, 推论 2 和推论 3 显然成立.

推论 2 $Aut(r(D_4))$ 中由置换 \mathbb{Z} -基 $\{[V_i]\}$ 的自同构所组成子群同构于三次对称群 S_3 .

推论 3 若二面体群 $D_n (n \geq 4)$ 表示环 $r(D_n)$ 存在自同构群 $Aut(r(D_n))$, 且 $|Aut(r(D_n))| \geq 4$, 则 $Aut(r(D_n))$ 必有一个同构于二阶循环群的子群. 特别地, 当 $n \geq 4$ 为偶数时, $Aut(r(D_n))$ 必有一个同构于克莱因四元群的子群.

证明 可参见文献[3]中命题 3.2 的证明.

目前, 尚未总结出二面体群 D_n 表示环 $r(D_n)$ 的自同构群结构的一般公式. 但依据本文的思路方法, 可计算出 $Aut(r(D_5)) \cong \mathbb{Z}_2, Aut(r(D_6)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, Aut(r(D_8)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. 阶数越大的二面体群计算量越大, 故本文仅研究了阶数较小的二面体群 D_4 的复表示环的自同构群. 由此可见, 只要写出与二面体群表示环同构的相应多项式商环(参见文献[3]的定理 3.3), 便可根据该商环中生成理想的关系式来求解对应的二面体群 D_n 表示环的自同构. 对于阶数大的二面体群, 要求其表示环的自同构群, 在列出自同构需满足的条件关系式后, 不妨借助计算机进行计算, 可极大地省去冗长的求解过程.

参考文献:

- [1] Green J A. The modular representation algebra of a finite group[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1962, 6:607-619.
- [2] 朱婷婷. 广义二面体群上表示的张量积分解[D]. 扬州:扬州大学, 2013.
- [3] 唐帅. 二面体群的 Grothendieck 环结构[J]. 数学学报, 2020, 63(3): 245-252.
- [4] 曹刘峰, 周灵睿, 李立斌. 二面体群 D_5 上的表示环[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2020, 23(6): 13-17.
- [5] 戴莉兰, 黎允楠. 对称群 S_5 的表示环[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2023, 44(2): 133-146.
- [6] Su D, Yang S L. Automorphism group of representation ring of the weak Hopf algebra \tilde{H}_8 [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2018, 68(4): 1131-1148.
- [7] Jia T T, Zhao R J, Li L B. Automorphism group of Green ring of Sweedler Hopf algebra[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2016, 11(4): 921-932.
- [8] Zhao R J, Yuan C T, Li L B. The automorphism group of Green algebra of 9-dimensional Taft Hopf algebra[C]. Algebra Colloquium, 2020, 27(4): 767-798.
- [9] 孙华, 邹健, 赵汝菊. 8 维 Radford Hopf 代数的 Green 代数的自同构群[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(11): 61-70.
- [10] 胡承超, 潘梦雅, 陈惠香. Grothendieck 环 $G_0(D(H_4))$ 的自同构群[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2021, 24(3): 1-4.
- [11] 潘梦雅. 两个 Grothendieck 环的自同构群[D]. 扬州:扬州大学, 2020.
- [12] Gannon T. The automorphisms of affine fusion rings[J]. Advances in Mathematics, 2002, 165(2): 165-193.
- [13] 唐帅, 王志华, 李立斌. Verlinde fusion 环上的自同构群[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(17): 268-273.
- [14] 曹锡华, 时俭益. 有限群表示论[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2009.
- [15] Naidu D, Rowell E C. A finiteness property for braided fusion categories[J]. Algebras and Representation Theory, 2011, 14(5): 837-855.

【责任编辑:卓祯雨】