文章编号:1671-4229(2024)06-0072-06

二面体群 D_n 的表示环的泛阶化

巫文霞
(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州　510006)

摘　要: 文章主要利用二面体群 D_n 所有不可约复表示的张量积分解公式的递推关系,得到了 D_n 上的复表示环 $r(D_n)$ 的伴随子环,通过研究伴随子环上不可分解的 $\mathbb{Z}_+$ - 子双模,刻画了 $r(D_n)$ 作为 fusion 环的泛阶化结构。

关键词: fusion 范畴; 二面体群; fusion 环; 泛阶化
中图分类号: O152.6　　**文献标志码:** A

The universal grading of the representation ring of dihedral group D_n

WU Wen-xia
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This article mainly utilizes the recursive relation of tensor product decomposition formulas for all irreducible complex representations of a dihedral group, and obtains the adjoint subring of the complex representation ring over $r(D_n)$. By studying the indecomposable $\mathbb{Z}_+$-sub-bimodules over the adjoint subring, the universal grading structure of the fusion ring $r(D_n)$ is characterized.

Key words: fusion category; dihedral group; fusion ring; universal grading

Fusion 范畴与数学物理的众多分支密切相关,例如共形场论、算子代数、量子群的表示理论以及拓扑学等[1-4]。Etingof 等[5]对 fusion 范畴进行了深入的研究,而关于其结构和分类的研究结果可以参考文献[6-8]。在研究 fusion 范畴中,如何构造和分类是一个有趣且困难的问题[5,9-10]。fusion 范畴的群阶化也称 fusion 范畴的群扩张,在 fusion 范畴的构造和分类工作中起着至关重要的作用,同时也是 Etingof 等[11]及 Gelaki 等[12]提出 fusion 范畴的幂零性和可解性概念的基础,可见,它在 fusion 范畴研究中有着举足轻重的地位。Etingof 等有关阶化的 fusion 范畴理论,进一步推动了阶化 based 环理论的提出,继而引起广泛讨论,并获得进一步发展[12-15]。虽然研究 fusion 范畴的任意群阶化并不是一件易事,但研究 fusion 范畴在某一具体群下的阶化是可行的[16-17]。

掌握了群阶化在研究 fusion 范畴中的作用后,对各类 fusion 范畴的相关群阶化有很多研究成果,例如 Etingof 等[13]对 fusion 范畴的群阶化进行了分类,Natale[18]建立了 fusion 范畴中单对象的阶数与其泛阶化群结构之间的关系,Dong 等[19]研究了秩为 4 的非平凡阶化的自对偶 fusion 范畴,Meir 等[20]对阶化 fusion 范畴上的模范畴进行研究,Gelaki 等[21]研究了某些群型范畴的泛阶化群等。对于有限群 G,其表示范畴 $r(G)$ 是群型的,但对于一般半单 Hopf 代数的表示范畴,答案是否定的[22]。自然地,研究半单 Hopf 代数表示范畴的泛阶化是有趣的问题[23]。

收稿日期: 2024-04-23; **修回日期:** 2024-06-26
作者简介: 巫文霞(2000—),女,硕士研究生. E-mail:wxwu@e.gzhu.edu.cn
引文格式: 巫文霞. 二面体群 D_n 的表示环的泛阶化[J]. 广州大学学报(自然科学版),2024,23(6):72-77.

在本研究中，将聚焦于对称群的一个子群——二面体群。数学上，二面体群是正 n 边形 $(n>1)$ 的对称群，包括旋转和反射操作，记作 D_n。作为有限群中最简单的例子之一，二面体群在群论、几何学和化学中具有重要意义。研究二面体群表示范畴的泛阶化可以为理解对称性，丰富代数结构理论，揭示物理系统性质和促进跨学科研究提供重要的理论基础和方法工具。有限群表示环的泛阶化研究也有一些结果，比如 Gelaki 等[12] 指出模范畴 C 的泛阶化群 $U(C)$ 典范同构于 C 中可逆对象群的特征群。Etingof 等[23] 给出了有限维表示范畴的伴随子范畴结构。本文将利用以上定理对二面体群表示环泛阶化的具体结构展开讨论。

1 预备知识

定义 1[23] 设 A 是一个环，并且是一个自由 $\mathbb{Z}$ - 模。

(1) A 的 $\mathbb{Z}_+$ - 基是指一组 $\mathbb{Z}$ - 基 $B=\{b_i\}_{i\in I}$ 满足 $b_ib_j = \sum_{k\in I} c_{ij}^k b_k$，其中，$c_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$。

(2) $\mathbb{Z}_+$ - 环是指一组固定的 $\mathbb{Z}_+$ - 基的环，并且单位元 1 是这组基元的非负整数 $\mathbb{Z}$ 的线性组合。

(3) $\mathbb{Z}_+$ - 环称为 unital 的 $\mathbb{Z}_+$ - 环，如果单位元 1 是其中的一个基元。

设 A 是一个 $\mathbb{Z}_+$ - 环，$I_0 \subseteq I$ 是出现在单位元 1 分解中的基元 b_i 下标的集合。设 $\tau: A\to\mathbb{Z}$ 是一个阿贝尔群同态定义如下：

$$\tau(b_i)=\begin{cases}1, & \text{if } i\in I_0,\\ 0, & \text{if } i\notin I_0.\end{cases}$$

定义 2[23] $\mathbb{Z}_+$ - 环（相应的基为 $\{b_i\}_{i\in I}$）称为 based 环，如果存在一个 I 上的对合 $i\mapsto i^*$ 使得由之诱导的映射

$$a=\sum_{i\in I} a_i b_i \mapsto a^* = \sum_{i\in I} a_i b_{i^*},\ a_i\in\mathbb{Z},$$

是一个 A 上的反对合，并且满足：

$$\tau(b_ib_j)=\begin{cases}1, & \text{if } i=j^*,\\ 0, & \text{if } i\neq j^*.\end{cases}$$

定义 3[23] 有限秩的 based 环称为 multifusion 环。有限秩的 unital 的 based 环称为 fusion 环。

定义 4[23] 设 A 是一个 $\mathbb{Z}_+$ - 环（fusion 环）。称 A' 是 A 的 $\mathbb{Z}_+$ - 子环（fusion 子环），如果 A' 是由 A 的基的子集所 $\mathbb{Z}$ - 张成的子环（在上述反对合 * 下不变）。

在这一背景下，引入 $\mathbb{Z}_+$ - 环上 $\mathbb{Z}_+$ - 模的定义：

定义 5[23] 设 A 是一个 $\mathbb{Z}_+$ - 环（相应的 $\mathbb{Z}_+$ - 基为 $\{b_i\}_{i\in I}$）。A 上的一个 $\mathbb{Z}_+$ - 模是指一个 A - 模 M，M 有一组固定的 $\mathbb{Z}$ - 基 $\{m_l\}_{l\in L}$，并且所有的结构常数（由等式 $b_im_l = \sum_k a_{il}^k m_k$ 给出）都是非负整数。

定义 6[23] 若 $\mathbb{Z}_+$ - 模 M 不同构于其非平凡直和，则称 M 为不可分解模。

定义 7[23] 称 N 为 M（相应的基为 $\{m_l\}_{l\in L}$）的一个 $\mathbb{Z}_+$ - 子模，如果 N 是由 $\{m_l\}_{l\in L'}$ $\mathbb{Z}$ - 张成的 A - 子模，其中，L' 是 L 的子集，这时 N 相应的基为 $\{m_l\}_{l\in L'}$。

定义 8[23] $\mathbb{Z}_+$ - 模 M 是不可约的，如果 M 的 $\mathbb{Z}_+$ - 子模只有 0 和它本身（换句话说，M 的基的任意真子集所 $\mathbb{Z}$ - 张成的自由 $\mathbb{Z}$ - 模不是 A 的子模）。

在此基础上，进一步探讨 based 环上 $\mathbb{Z}_+$ - 模的不可约性和不可分解之间的关系，有如下定理：

定理 1[23] based 环上的 $\mathbb{Z}_+$ - 模 M 是不可约的，当且仅当它是不可分解的。

设 A 是一个 unital 的 based 环（相应的 $\mathbb{Z}_+$ - 基为 $\{b_i\}_{i\in I}$）。下面介绍相关定义和定理：

定义 9[23] 设 A 是一个群。A 被 G 分阶是指 A 的基被划分为不相交的子集 $B=\bigcup_{g\in G} B_g$，使得对 $\forall g,h\in G$ 和所有基元素 $b_i\in B_g$，$b_j\in B_h$，乘积 b_ib_j 是 B_{gh} 元素的 $\mathbb{Z}_+$ - 线性组合。此时，称 A 是 G 阶化的，A 可分解为 $A=\bigoplus_{a\in G} A_a$，其中，A_g 是 $B_g\,(g\in G)$ $\mathbb{Z}$ - 张成的空间。

定义 10[23] 伴随子环 $A_{ad}\subseteq A$ 是包含 $b_ib_{i^*}$ $(i\in I)$ 的 A 的最小 based 子环，即 A_{ad} 是由所有出现在 $b_ib_{i^*}$ $(i\in I)$ 中的基元所生成的 A 的 based 子环。

关于 based 环 A 上任何单侧的 A_{ad} - 子模的性质：

定理 2[23] based 环 A 的任何单侧(即左或右)A_{ad}-子模 $M\subset A$ 自然是一个 A_{ad}-子双模。

特别地,当 based 环 A 作为伴随子环 A_{ad} 的 based 双模,有

定理 3[23] based 环 A 作为伴随子环 $A_{ad}\subseteq A$ 的 based 双模,若其不可分解 based 子双模的直和分解记为 $A=\bigoplus_{a\in G}A_a$,则指标集 G 上存在一个典范的群结构,其乘法由下列性质定义:

(1) $ab=c$ 当且仅当 $x_ax_b\in A_c$,对于所有的 $x_a\in A_a, X_b\in A_b, a,b,c\in G$。

(2) G 的单位元 1 满足 $1\in B_1(B_1=B_{ad})$,而 $a\in G$ 的逆 a^{-1} 满足 $B_{a^{-1}}=(B_a)^*$,其中,$(B_a)^*=B_{a^*}=\{b_{i^*}\mid b_i\in B_a\}$。

定理 4[23] 定理 3 构造的阶化 $A=\bigoplus_{a\in G}A_a$ 称为 A 的泛阶化。该群 G 被称为 A 的泛阶化群,用 $U(A)$ 表示。

下面通过一个具体的例子来加深对泛阶化概念的认识。

例 1 当 $G=\langle a\rangle=\{a^k\mid k=0,1,\cdots,n-1\}$ 是一个 n 阶有限循环群时,$r(G)$ 的不可约复表示定义为 $\rho_k(g)=e^{(2k\pi i)/n}$,其泛阶化为 $r(G)=r(G)_{ad}\oplus A_2$,其中,$r(G)_{ad}=\{\rho_0\}$,A_2 是由 $\{\rho_l\mid 1\leqslant l\leqslant n-1\}$ $\mathbb{Z}$-张成的子空间。

2 二面体群 D_n 的表示

设正 $n(n>2)$ 边形的中心为 O,用 σ 表示绕中心 O 转角为 $2\pi/n$ 的旋转,用 τ 表示关于某条对称轴的反射,则正 n 边形对称(性)群称为二面体群,记作 D_n,它是 $2n$ 阶非交换群,具体定义为

$$D_n=\{\sigma,\tau\mid \sigma^n=\tau^2=1,\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}\}。$$

当 n 为奇数时,二面体群 D_n 有两个一维不可约表示,即 V_{ψ_1}、V_{ψ_2},有 $(n-1)/2$ 个二维不可约表示,即 $V_{\rho_1},V_{\rho_2},\cdots,V_{\rho_{(n-1)/2}}$;当 n 为偶数时,二面体群 D_n 有 4 个一维不可约表示,分别为 V_{ψ_1}、V_{ψ_2}、V_{ψ_3}、V_{ψ_4},有 $(n-2)/2$ 个二维不可约表示,分别为 $V_{\rho_1},V_{\rho_2},\cdots,V_{\rho_{(n-2)/2}}$。这些二面体群 D_n 的不可约表示的定义可见表 1 及表 2。

(1) $n=2v+1, v\geqslant 1$。

表 1 $D_{2v+1}(v\geqslant 1)$ 特征标表

Table 1 The complex character table of $D_{2v+1}(v\geqslant 1)$

	1	τ	$\sigma^k, 1\leqslant k\leqslant v$
χ_{ψ_1}	1	1	1
χ_{ψ_2}	1	-1	1
$\chi_{\rho_i}, 1\leqslant i\leqslant v$	2	0	$2\cos(2ki\pi/n)$

(2) $n=2v, v\geqslant 2$。

表 2 $D_{2v}(v\geqslant 2)$ 特征标表

Table 2 The complex character table of $D_{2v}(v\geqslant 2)$

	1	τ	$\sigma\tau$	$\sigma^k, 1\leqslant k\leqslant v$
χ_{ψ_1}	1	1	1	1
χ_{ψ_2}	1	-1	-1	1
χ_{ψ_3}	1	1	-1	$(-1)^k$
χ_{ψ_4}	1	-1	1	$(-1)^k$
$\chi_{\rho_i}, 1\leqslant i\leqslant v-1$	2	0	0	$2\cos(2ki\pi/n)$

二面体群 D_n 在复数域$\mathbb{C}$上不可约表示的张量积分解公式的递推关系如下,具体证明见文献[24]的定理 4.2。

命题 1[25] 当 n 为奇数时,D_n 的两个一维表示 V_{ψ_1} 及 V_{ψ_2} 在张量积运算下构成二阶循环群$\mathbb{Z}_2$,其余不可约表示的张量积分解公式如下:

当 $n=3$ 时,$V_\rho\otimes V_\rho\cong V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_\rho$,$V_\rho\otimes V_{\psi_j}\cong V_\rho$,其中,$\rho$ 为唯一的二维不可约表示,$j=1,2$。

当 $n>3$ 时,分为 3 种情形:

(1) $V_{\rho_i}\otimes V_{\psi_j}\cong V_{\rho_i}$,其中,$j=1,2$; $1\leqslant i\leqslant(n-1)/2$。

(2) 当 $1\leqslant i<j\leqslant(n-1)/2$ 时,

$$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_j}\cong\begin{cases}V_{\rho_{j-i}}\oplus V_{\rho_{j+i}}, & i+j<(n+1)/2;\\ V_{\rho_{j-i}}\oplus V_{\rho_{n-(j+i)}}, & i+j\geqslant(n+1)/2。\end{cases}$$

(3)

$$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_i}\cong\begin{cases}V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\rho_{2i}}, & 1\leqslant i<(n+1)/4;\\ V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\rho_{(n-1)/2}}, & i=(n+1)/4\\ \quad 且(n+1)/4 为整数; & \\ V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\rho_{n-2i}}, & (n+1)/4<i\leqslant(n-1)/2。\end{cases}$$

命题 2[25] 当 n 为偶数时,D_n 的 4 个一维表示 V_{ψ_1}、V_{ψ_2}、V_{ψ_3} 及 V_{ψ_4} 在张量积运算下构成克莱因四元群 K_4,其余不可约表示的张量积分解公式如下:

当 $n=4$ 时,$V_\rho\otimes V_\rho\cong V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}$,$V_\rho\otimes V_{\psi_j}\cong V_\rho$,其中,$\rho$ 为唯一的二维不可约表示,$j=1,2,3,4$。

当 $n>4$ 时,分为 3 种情形:

(1)当 $1\leqslant i\leqslant (n-2)/2$ 时,

$$V_{\rho_i}\otimes V_{\psi_j}\cong\begin{cases}V_{\rho_i}, & j=1,2;\\ V_{\rho_{(n-2i)/2}}, & j=3,4。\end{cases}$$

(2)当 $1\leqslant i<j\leqslant (n-2)/2$ 时,

$$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_j}\cong\begin{cases}V_{\rho_{j-i}}\oplus V_{\rho_{j+i}}, & i+j<n/2;\\ V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}\oplus V_{\rho_{j-i}}, & i+j=n/2;\\ V_{\rho_{j-i}}\oplus V_{\rho_{n-(j+i)}}, & i+j>n/2。\end{cases}$$

(3)

$$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_i}\cong\begin{cases}V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\rho_{2i}}, & 1\leqslant i<n/4;\\ V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}, & i=n/4\text{ 且 }n/4\text{ 为整数};\\ V_{\psi_1}\oplus V_{\psi_2}\oplus V_{\rho_{n-2i}}, & n/4<i\leqslant (n-2)/2。\end{cases}$$

3　D_n 表示环的泛阶化

设 A 是一个 based 环,可视 A 为 A_{ad} 上的一个 $\mathbb{Z}_+$-子双模。因此,可将 A 分解为不可分解的 A_{ad}-子模的直和:$A=\bigoplus_{a\in G}A_a$,其中,G 为指标集。这种分解在 G 的置换之下是唯一的。

特别地,有限群 G 的复表示环 $r(G)$ 是一个可交换的 fusion 环,相应的 $\mathbb{Z}_+$-基为不可约复表示同构类(对合 $*$ 是取对偶表示)。其泛阶化群 $U(r(G))\cong G\widehat{(r(G))}$,参见文献[12]的定理 6.2。除此之外,伴随子环 $r(G)_{ad}$ 的具体结构也由 $r(G/Z(G))$ 给出,见文献[23]的例 4.14.6。因此,在二面体群 D_n 的情况,当 n 为奇数时,$U(r(D_n))\cong 1$,$r(D_n)_{ad}=r(D_n)$;当 n 为偶数时,$U(r(D_n))\cong\mathbb{Z}_2$,$r(D_n)_{ad}=r(D_n/\{1,\sigma^{n/2}\})$。基于此,下面探讨 D_n 表示环的具体泛阶化结构。

当 n 为奇数时,$r(D_n)$ 的 $\mathbb{Z}_+$-基为 $V_{\psi_1},V_{\psi_2},V_{\rho_1},\cdots,V_{\rho_{(n-1)/2}}$,根据前面分析可得 $r(D_n)_{ad}=r(D_n)$。因此,$r(D_n)$ 的泛阶化是平凡的。

当 n 为偶数时,根据 n 能否整除 4 分别讨论 D_n 表示环的泛阶化具体结构。给出如下定理:

定理 5　当 $n\geqslant 4$ 且 $n|4$ 时,$r(D_n)$ 的泛阶化为 $r(D_n)=r(D_n)_{ad}\oplus A_2$,其中,$r(D_n)_{ad}=\langle V_{\psi_1},V_{\psi_2},V_{\psi_3},V_{\psi_4},V_{\rho_{2i}}\mid 1\leqslant i<n/4\rangle$,$A_2$ 是由 $\{V_{\rho_{2i+1}}\mid 0\leqslant i<n/4\}\mathbb{Z}$-张成的子空间。

证明　当 $n\geqslant 4$ 且 $n|4$ 时,4 个一维不可约表示 $V_{\psi_1},V_{\psi_2},V_{\psi_3},V_{\psi_4}$ 和 $(n/2)-1$ 个二维不可约表示 $V_{\rho_1},\cdots,V_{\rho_{(n/2)-1}}$ 构成了 $r(D_n)$ 的 $\mathbb{Z}_+$-基,根据前面分析可得 $r(D_n)_{ad}=\langle V_{\psi_1},V_{\psi_2},V_{\psi_3},V_{\psi_4},V_{\rho_{2i}}\mid 1\leqslant i<n/4\rangle$。

记 A_2 是由 $\{V_{\rho_{2i+1}}\mid 0\leqslant i<n/4\}\mathbb{Z}$-张成的子空间,接下来讨论 $r(D_n)_{ad}$ 的不可分解 $\mathbb{Z}_+$-子双模结构。

$\forall V_{\rho_k}\in r(D_n)_{ad}$,$V_{\rho_l}\in A_2$,不妨设 $1\leqslant k<l\leqslant (n/2)-1$。根据命题 1 可得

$$V_{\rho_l}\otimes V_{\psi_j}\cong\begin{cases}V_{\rho_l}, & j=1,2;\\ V_{\rho_{(n-2l)/2}}, & j=3,4。\end{cases}$$

$$V_{\rho_k}\otimes V_{\rho_l}\cong\begin{cases}V_{\rho_{l-k}}\oplus V_{\rho_{l+k}}, & l+k<n/2;\\ V_{\rho_{l-k}}\oplus V_{\rho_{n-(l+k)}}, & l+k>n/2。\end{cases}$$

注意到 k 为偶指标,l 为奇指标,结合奇偶性分析以及定理 2 可知,A_2 是 $r(D_n)_{ad}$ 的 $\mathbb{Z}_+$-子双模。

下面证明 A_2 是 $r(D_n)_{ad}$ 的不可分解的 $\mathbb{Z}_+$-子双模,根据定理 1,只需证明 A_2 是 $r(D_n)_{ad}$ 的不可约的 $\mathbb{Z}_+$-子双模即可。

给定 $V_{\rho_{l_0}}\in A_2$,对 $\forall V_{\rho_l}\in A_2$,当 $1\leqslant l_0<l_0+l\leqslant (n/2)-1$ 时,令 $V_{\rho_i}=V_{\rho_{l_0+l}}\in r(D_n)_{ad}$,则

$$V_{\rho_{l_0}}\otimes V_{\rho_i}=V_{\rho_{l_0}}\otimes V_{\rho_{l_0+l}}\cong\begin{cases}V_{\rho_l}\oplus V_{\rho_{2l_0+l}}, & i+l_0<n/2;\\ V_{\rho_l}\oplus V_{\rho_{n-(2l_0+l)}}, & i+l_0>n/2。\end{cases}$$

上述两种情形中均满足 $V_{\rho_l}\in V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}$($V_{\rho_l}$ 出现在 $V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}$ 的分解中),所以 A_2 是 $r(D_n)_{ad}$ 的不可约的 $\mathbb{Z}_+$-子双模。

定理 6　当 $n\geqslant 4$ 且 $n\nmid 4$ 时,$r(D_n)$ 的泛阶化为 $r(D_n)=r(D_n)_{ad}\oplus A_2$,其中,

$$r(D_n)_{ad}=\langle V_{\psi_1},V_{\psi_2},V_{\rho_{2i}}\mid 1\leqslant i<n/4\rangle,$$

A_2 是由 $\{V_{\psi_3},V_{\psi_4},V_{\rho_{2i+1}}\mid 0\leqslant i<n/4\}\mathbb{Z}$-张成的子空间。

证明　在该情形下,根据前面分析可得

$r(D_n)_{ad}=\langle V_{\psi_1},V_{\psi_2},V_{\rho_{2i}}\mid 1\leqslant i<n/4\rangle$。接下来,验证由$\{V_{\psi_3},V_{\psi_4},V_{\rho_{2i+1}}\mid 0\leqslant i<n/4\}$ $\mathbb{Z}$-张成的子空间是$r(D_n)_{ad}$的不可分解$\mathbb{Z}_+$-子双模,记为A_2。

$\forall V_{\rho_k}\in r(D_n)_{ad}$, $V_{\rho_l}\in A_2$,不妨设$1\leqslant k<l\leqslant(n/2)-1$。根据命题1可得

$$V_{\rho_l}\otimes V_{\psi_s}\cong V_{\rho_l},\ s=1,2。$$

$$V_{\rho_k}\otimes V_{\rho_l}\cong\begin{cases}V_{\rho_{l-k}}\oplus V_{\rho_{l+k}}, & l+k<n/2;\\ V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}\oplus V_{\rho_{l-k}}, & l+k=n/2;\\ V_{\rho_{l-k}}\oplus V_{\rho_{n-(l+k)}}, & l+k>n/2。\end{cases}$$

其中,k为偶指标,l为奇指标,结合奇偶性分析以及定理2可知,A_2是$r(D_n)_{ad}$的$\mathbb{Z}_+$-子双模。

根据定理1,下面证明A_2是$r(D_n)_{ad}$的不可约的$\mathbb{Z}_+$-子双模。

给定$V_{\rho_{l_0}}\in A_2$,对$\forall V_{\rho_l}\in A_2$,当$1\leqslant l_0<l_0+l\leqslant(n/2)-1$时,令$V_{\rho_i}=V_{\rho_{l_0+l}}\in r(D_n)_{ad}$,则

$$V_{\rho_{l_0}}\otimes V_{\rho_i}=V_{\rho_{l_0}}\otimes V_{\rho_{l_0+l}}\cong$$

$$\begin{cases}V_{\rho_l}\oplus V_{\rho_{2l_0+l}}, & i+l_0<n/2;\\ V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}\oplus V_{\rho_l}, & i+l_0=n/2;\\ V_{\rho_l}\oplus V_{\rho_{n-(2l_0+l)}}, & i+l_0>n/2。\end{cases}$$

上述3种情形中均满足$V_{\rho_l}\in V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}$($V_{\rho_l}$出现在$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}$的分解中)。

令$V_{\rho_i}=V_{\rho_{(n/2)-l_0}}\in r(D_n)_{ad}$,则

$$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}=V_{\rho_{(n/2)-l_0}}\otimes V_{\rho_{l_0}}\cong$$

$$\begin{cases}V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}\oplus V_{\rho_{(n/2)-2l_0}}, & l_0<n/4;\\ V_{\psi_3}\oplus V_{\psi_4}\oplus V_{\rho_{2l_0-(n/2)}}, & l_0>n/4。\end{cases}$$

上述两种情形中均满足$V_{\psi_3},V_{\psi_4}\in V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}$($V_{\psi_3},V_{\psi_4}$出现在$V_{\rho_i}\otimes V_{\rho_{l_0}}$的分解中)。综上,$A_2$是$r(D_n)_{ad}$的不可约的$\mathbb{Z}_+$-子双模。

参考文献:

[1] Lootens L, Vanhove R, Haegeman J, et al. Galois conjugated tensor fusion categories and nonunitary conformal field theory[J]. Physical Review Letters, 2020, 124(12): 120601.

[2] Kawahigashi Y. Two-dimensional topological order and operator algebras[J]. International Journal of Modern Physics B, 2021, 35(8): 2130003.

[3] Arias J C. Derived counterparts of fusion categories of quantum groups[J]. Journal of Algebra, 2020,562: 257-285.

[4] Inamura K. Topological field theories and symmetry protected topological phases with fusion category symmetries[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, 2021(5): 204.

[5] Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. On fusion categories[J]. Annals of Mathematics, 2005,162(2): 581-642.

[6] Ostrik V, Yu Z Q. On the minimal extension and structure of braided weakly group-theoretical fusion categories[J]. Advances in Mathematics, 2023,419: 108961.

[7] Edie-michell C. A complete classification of unitary fusion categories tensor generated by an object of dimension[J]. International Mathematics Research Notices, 2022, 2022(2): 801-845.

[8] Lootens L, Vanhove R, Haegeman J, et al. Galois conjugated tensor fusion categories and nonunitary conformal field theory[J]. Physical Review Letters, 2020, 124(12): 120601.

[9] Jordan D, Larson E. On the classification of certain fusion categories[J]. Journal of Noncommutative Geometry, 2009, 3(3): 481-499.

[10] Czenky A, Gvozdjak W, Plavnik J. Classification of low-rank odd-dimensional modular categories[J]. Journal of Algebra, 2024,655:223-293.

[11] Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. Weakly group-theoretical and solvable fusion categories[J]. Advances in Mathematics, 2011, 226(1): 176-205.

[12] Gelaki S, Nikshych D. Nilpotent fusion categories[J]. Advances in Mathematics, 2008, 217(3): 1053-1071.

[13] Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. Fusion categories and homotopy theory[J]. Quantum Topology, 2010, 1(3): 209-273.

[14] Drinfeld V, Gelaki S, Nikshych D, et al. On braided fusion categories I[J]. Selecta Mathematica, 2010, 16(1): 1-119.

[15] Gelaki S, Naidu D, Nikshych D. Centers of graded fusion categories[J]. Algebra & Number Theory, 2009, 3(8): 959-

990.

[16] Dong J C. Braided extensions of a pointed fusion category with prime dimension[J]. Algebra Colloquium, 2020, 27(2): 281-286.

[17] Chen Y S, Dong J C. Extension of a p^2-dimensional fusion category with applications[J]. Mathematical Theory and Applications, 2021, 41(4): 83.

[18] Natale S. Faithful simple objects, orders and gradings of fusion categories[J]. Algebraic & Geometric Topology, 2013, 13(3): 1489-1511.

[19] Dong J C, Zhang L Y, Dai L. Non-trivially graded self-dual fusion categories of rank 4[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2018, 34(2): 275-287.

[20] Meir E, Musicantov E. Module categories over graded fusion categories[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2012, 216(11): 2449-2466.

[21] Gelaki S, Naidu D. Some properties of group-theoretical categories[J]. Journal of Algebra, 2009, 322(8): 2631-2641.

[22] Nikshych D. Non-group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories[J]. Selecta Mathematica, 2008,14(1): 145-161.

[23] Etingof P, Gelaki S, Nikshych D, et al. Tensor categories[M]. Providence, Rhode Island:American Mathematical Society, 2015.

[24] Naidu D, Rowell E C. A finiteness property for braided fusion categories[J]. Algebras and Representation Theory, 2011, 14(5): 837-855.

[25] 唐帅. 二面体群的 Grothendieck 环结构[J]. 数学学报,2020,63(3):245-252.

【责任编辑: 卓祯雨】