文章编号:1671-4229(2024)06-0078-09

两相椭圆偏微分方程的特征值问题

黄高丽[1],张 杰[2],王 术[3*]
(1. 广州大学 数学与信息科学学院,广东 广州 510006;2. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院,福建 泉州 362001;
3. 北京工业大学 数学统计学与力学学院,北京 100124)

摘 要: 在物理工程中,由于材料的材质不同,存在一个材料由两种不同的材质组成,一个材料中不同区域的结构也会不一样。为此,文章探讨当一个材料中存在两种不同材质时,即求解两相椭圆偏微分方程的特征值问题。一维时,相当于常微分方程特征值问题;二维时,利用分离变量法把方程组变成一维的特征值问题。根据边界条件的特性,采用分块区域进行计算得出特征值和特征函数。

关键词: 椭圆偏微分方程;特征值问题;分离变量法
中图分类号: O175.25 **文献标志码:** A

Eigenvalue problem of two-phase elliptic partial differential equation

HUANG Gao-li[1], *ZHANG Jie*[2], *WANG Shu*[3*]
(1. School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362001, China;
3. School of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: In physical engineering, due to the different materials of objects, there is an object composed of two different materials, and the structure of different areas in an object will be different. For this reason, the eigenvalue problem of two-phase elliptic partial differential equation is discussed when there are two different materials in one object. In one dimension, it is equivalent to the eigenvalue problem of ordinary differential equation. In two dimensions, the system is transformed into one dimension eigenvalue problem by the method of separating variables. According to the characteristics of boundary conditions, the eigenvalues and eigenfunctions are obtained by using block regions.

Key words: elliptic partial differential equation; eigenvalue problem; method of separating variables

0 引 言

特征值问题在流体力学、量子力学等领域有着广泛的应用,其数值计算方法一直是很多学者研究的课题。目前,已经有很多数值方法求解特征值问题,主要包括有限元法[1-3]、有限差分法[4-6]、谱方法[7-9]等,特征值问题的研究也越来越广泛。

椭圆型偏微分方程的特征值问题也受到很大的关注。苏斌[10]研究了一种带有传输条件的二维间断系数椭圆特征值问题的数值方法,用有限元

收稿日期: 2024-01-19;**修回日期:** 2024-04-12
作者简介: 黄高丽(1998—),女,硕士研究生. E-mail:huanggaoli@e.gzhu.edu.cn
* 通信作者. E-mail:wangshu@bjut.edu.cn
引文格式:黄高丽,张杰,王术. 两相椭圆偏微分方程的特征值问题[J]. 广州大学学报(自然科学版),2024,23(6):78-86.

方法和 Legendre-Galerkin 谱方法对方程进行数值求解。牟宴铭[11]提出圆柱体区域上的二阶椭圆特征值问题基于降维格式的一种有效谱 Galerkin 方法和有限差分法。

在叶其孝等[12]编写的《反应扩散方程引论》一书中，就有研究二阶线性自伴椭圆算子的特征值问题。该书阐述了特征值的简单性质，说明特征值全是实数，且不同的特征值对应的特征函数也是正交的；书中还探讨特征值的极值性质，证明了特征值的极小原理，并讨论了特征函数的完备性；同时阐明利用特征值的极值性质可以讨论以下 3 个问题：①不同类型边界条件下特征值大小的比较；②特征值对方程的系数及边界条件系数的依赖性；③特征值对区域的依赖性。

分离变量法是求解偏微分方程最基本和常用的方法，其理论依据是线性方程的叠加原理和 Sturm-Liouville 理论，本质是将偏微分方程的求解转化为对常微分方程的求解。在《二维亥姆霍兹(Helmholtz)方程的 Sinc-Galerkin 法》[13]中采用了分离变量法求解二维亥姆霍兹方程的解析解。本文在研究二维特征值问题时采用的就是分离变量法。

本文研究了两相椭圆偏微分方程的特征值问题，其中相的定义是系统中物理性质及化学性质均匀的部分。这里的两相是指两个固体的相。

本文的目的是寻找$\{\lambda_k,\varphi_k\neq 0\}_{k=0}^{\infty}$使得如下等式成立：

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k^{s_1}=\lambda_k^{s_1}\varphi_k^{s_1},\Omega^{s_1}; \\ -\Delta\varphi_k^{s_2}=\lambda_k^{s_2}\varphi_k^{s_2},\Omega^{s_2}; \\ \dfrac{\partial\varphi_k^{s_1}}{\partial n}|_{\Gamma}=0, \\ \varphi_k^{s_1}|_{\Gamma}=\varphi_k^{s_2}|_{\Gamma}, \\ \varphi_k^{s_1}|_{\partial\Omega^{s_1}}=0, \\ \varphi_k^{s_2}|_{\partial\Omega^{s_2}}=0, \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

其中，Ω^{s_1}为固体 s_1 的范围，Ω^{s_2}为固体 s_2 的范围；$\lambda_k^{s_1}$为固体 s_1 的特征值，$\varphi_k^{s_1}$ 为 $\lambda_k^{s_1}$对应的特征函数；$\lambda_k^{s_2}$为固体 s_2 的特征值，$\varphi_k^{s_2}$ 为 $\lambda_k^{s_2}$对应的特征函数；n 是 Γ 的外法向量；Γ 为 Ω^{s_1} 和 Ω^{s_2}的共同边界，$\partial\Omega^{s_1}$为 Ω^{s_1}的外边界，$\partial\Omega^{s_2}$为 Ω^{s_2}的外边界。其中，固体 s_1 和固体 s_2 是不同的相。

1　一维特征值问题

先讨论一维的情形，即固体 s_2 被固体 s_1 包围的情形。设固体 s_1 的范围是 $x\in(-b,-a)\cup(a,b)$，固体 s_2 的范围是 $x\in(-a,a)$。

此时问题(Ⅰ)转为问题(Ⅱ)：

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k^{s_1}=\lambda_k^{s_1}\varphi_k^{s_1},x\in(-b,-a)\cup(a,b); & (1) \\ -\Delta\varphi_k^{s_2}=\lambda_k^{s_2}\varphi_k^{s_2},x\in(-a,a); & (2) \\ \dfrac{\partial\varphi_k^{s_1}}{\partial n}|_{\Gamma}=0,\Gamma:x=-a,x=a; & (3) \\ \varphi_k^{s_1}|_{\Gamma}=\varphi_k^{s_2}|_{\Gamma},\Gamma:x=-a,x=a; & (4) \\ \varphi_k^{s_1}|_{\partial\Omega^{s_1}}=0,\partial\Omega^{s_1}:x=-b,x=b。 & (5) \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

1.1　先求解固体 s_1 的特征值和特征函数

固体 s_1 的取值范围是由两块区域合起来的，根据边界条件的特点，把固体 s_1 分成两块区域进行计算，区域分别为 $x\in(-b,-a)$和 $x\in(a,b)$。

1.1.1　区域为 $x\in(-b,-a)$时

(1)先求出 $\varphi_k^{s_1}$ 的通解。因为 $\lambda_k^{s_1}$不确定，所以由问题(Ⅱ)中的式(1)对 $\lambda_k^{s_1}$分类讨论可得通解如下：

$$\begin{cases} \lambda_k^{s_1}<0,\varphi_k^{s_1}=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_k^{s_1}}x}+D_1\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_k^{s_1}}x}; \\ \lambda_k^{s_1}=0,\varphi_k^{s_1}=C_1+D_1x; \\ \lambda_k^{s_1}>0,\varphi_k^{s_1}=C_1\cos(\sqrt{\lambda_k^{s_1}}x)+D_1\sin(\sqrt{\lambda_k^{s_1}}x)。 \end{cases}$$

(2)根据边界条件确定 $\lambda_k^{s_1}$。此时固体 s_1 需要满足的边界条件为问题(Ⅱ)中的式(3)和式(5)。

经过计算 $\lambda_k^{s_1}<0$ 和 $\lambda_k^{s_1}=0$ 这两种情况都无法得到非零解，下面只考虑 $\lambda_k^{s_1}>0$ 这种情况：

把通解代入边界条件可以得到：

$$\begin{cases} {\varphi_k^{s_1}}'|_{x=-a}=C_1\sqrt{\lambda_k^{s_1}}\sin(\sqrt{\lambda_k^{s_1}}a)+ \\ \quad D_1\sqrt{\lambda_k^{s_1}}\cos(\sqrt{\lambda_k^{s_1}}a)=0, \\ \varphi_k^{s_1}|_{x=-b}=C_1\cos(\sqrt{\lambda_k^{s_1}}b)-D_1\sin(\sqrt{\lambda_k^{s_1}}b)=0。 \end{cases} \qquad (6)$$

因为要求非零解，只需要系数行列式等于 0，即可以求得

$$\sqrt{\lambda_k^{s_1}}=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a},k=0,1,2,\cdots$$

所以

$$\lambda_k^{s_1}=\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}\right)^2,k=0,1,2,\cdots$$

(3)求特征函数 $\varphi_k^{s_1}$ 并简化。

把 $\sqrt{\lambda_k^{s_1}}=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}$ 代入 $\varphi_k^{s_1}$ 的通解中,可得:

$$\varphi_k^{s_1}=C_1\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}x\right)+D_1\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}x\right)=$$

$$\sqrt{C_1^2+D_1^2}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}x+\varphi_1\right),$$

其中,$\tan\varphi_1=\frac{C_1}{D_1}$。

(ⅰ)确定 φ_1。

又因为由式(6)有

$$C_1=D_1\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right),\tag{7}$$

$$C_1=-D_1\cot\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}a\right),\tag{8}$$

且经过验证 $D_1\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)=-D_1\cot\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}a\right)$,所以只取其中一个关系即可。

采用式(7),可得 $\tan\varphi_1=\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)$,

最终可得 $\varphi_1=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b+n\pi,n\in Z$。

取 $\varphi_1=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b$ 简化 $\varphi_k^{s_1}$,简化后,$\varphi_k^{s_1}=\sqrt{C_1^2+D_1^2}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)$。

(ⅱ)确定 $\varphi_k^{s_1}$ 的系数 $\sqrt{C_1^2+D_1^2}$。

因为 $\sqrt{C_1^2+D_1^2}=\sqrt{\frac{D_1^2}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}$,

所以,$\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\frac{D_1^2}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)$,

D_1为任一常数。

取 $D_1=1$,$\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)$。

1.1.2 区域为 $x\in(a,b)$时

当 $x\in(a,b)$时,步骤跟当 $x\in(-b,-a)$时类似,省略。

最后可得结果如下:

$$\lambda_k^{s_1}=\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}\right)^2,k=0,1,2,\cdots$$

$$\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right)。$$

至此,固体 s_1 的特征值和特征函数已经求出。

接下来借助固体 s_1 的数据来求取固体 s_2 的特征值和特征函数。

1.2 计算固体 s_2 的特征值和特征函数

先求出 $\varphi_k^{s_2}$ 的通解。因为 $\lambda_k^{s_2}$不确定,所以由问题(Ⅱ)中的式(2)对 $\lambda_k^{s_2}$分类讨论可得通解如下:

$$\begin{cases}\lambda_k^{s_2}<0,\varphi_k^{s_2}=C_2\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_k^{s_2}}x}+D_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_k^{s_2}}x};\\ \lambda_k^{s_2}=0,\varphi_k^{s_2}=C_2+D_2x;\\ \lambda_k^{s_2}>0,\varphi_k^{s_2}=C_2\cos(\sqrt{\lambda_k^{s_2}}x)+D_2\sin(\sqrt{\lambda_k^{s_2}}x)。\end{cases}$$

当 $\lambda_k^{s_2}<0$ 时,无法求出特征值 $\lambda_k^{s_2}$,故排除;当 $\lambda_k^{s_2}=0$ 时,把 $\varphi_k^{s_2}$ 的通解代入问题(Ⅱ)中的式(4),可以求得

$$\varphi_k^{s_2}=-\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}x\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{a},k=0,1,2,\cdots$$

当 $\lambda_k^{s_2}>0$ 时,可得特征值

$$\lambda_k^{s_2}=\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}\right)^2,k=0,1,2,\cdots$$

其特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right),k=0,1,2,\cdots$$

其中,取 C_2 为 1。

1.3　总结问题(Ⅱ)的解

1.3.1　固体 s_1 的特征值和特征函数

$$\lambda_k^{s_1}=\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}\right)^2,k=0,1,2,\cdots$$

$$\varphi_k^{s_1}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right), & x\in(-b,-a);\\ \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right), & x\in(a,b)。\end{cases}$$

1.3.2　固体 s_2 的特征值和特征函数

有两种结果:当 $\lambda_k^{s_2}=0,k=0,1,2,\cdots$时,特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=-\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\,x\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{a},k=0,1,2,\cdots$$

当 $\lambda_k^{s_2}=\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}\right)^2,k=0,1,2,\cdots$时,特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right),k=0,1,2,\cdots$$

2　二维特征值问题

在一个长方形区域上讨论,长方形区域是 $(-b,b)\times(-a,a)$,讨论固体 s_2 左右两边被固体 s_1 包围的情形。固体 s_1 范围为 $(-b,-a)\times(-a,a)\cup(a,b)\times(-a,a)$,固体 s_2 范围为 $(-a,a)\times(-a,a)$。问题(Ⅰ)就转化成

$$\begin{cases}-\Delta\varphi_k^{s_1}=\lambda_k^{s_1}\varphi_k^{s_1},\ \Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(-b,-a)\cup(a,b),y\in(-a,a)\}; & (9)\\ -\Delta\varphi_k^{s_2}=\lambda_k^{s_2}\varphi_k^{s_2},\ \Omega^{s_2}:\{(x,y)\mid x\in(-a,a),y\in(-a,a)\}; & (10)\\ \dfrac{\partial\varphi_k^{s_1}}{\partial n}|_\Gamma=0,\Gamma:\{(x,y)\mid x=\pm a,y\in(-a,a)\}; & (11)\\ \varphi_k^{s_1}|_\Gamma=\varphi_k^{s_2}|_\Gamma,\ \Gamma:\{(x,y)\mid x=\pm a,y\in(-a,a)\}; & (12)\\ \varphi_k^{s_1}|_{\partial\Omega^{s_1}}=0,\ \partial\Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x=\pm b,y\in(-a,a)\}\cup\{(x,y)\mid x\in(-b,-a)\cup(a,b),y=\pm a\}; & (13)\\ \varphi_k^{s_2}|_{\partial\Omega^{s_2}}=0,\ \partial\Omega^{s_2}:\{(x,y)\mid x\in(-a,a),y=\pm a\}。 & (14)\end{cases}\quad(Ⅲ)$$

2.1　先求解关于固体 s_1 的方程

2.1.1　方程的通解

采用分离变量法,令 $\varphi_k^{s_1}=XY$,方程(9)变成 $X''Y+XY''=\lambda_k^{s_1}XY$,两边除以 XY,有$\dfrac{X''}{X}+\dfrac{Y''}{Y}=-\lambda_k^{s_1}$,设 $-\lambda_k^{s_1}=-\alpha-\beta$,故方程(9)转换为求以下的方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{X''}{X}=-\alpha, & (15)\\ \dfrac{Y''}{Y}=-\beta。 & (16)\end{cases}$$

方程(15)的通解为

$$\begin{cases}\alpha<0,X=C_3\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}x}+D_3\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}x};\\ \alpha=0,X=C_3+D_3x;\\ \alpha>0,X=C_3\cos(\sqrt{\alpha}x)+D_3\sin(\sqrt{\alpha}x)。\end{cases}\quad(17)$$

方程(16)的通解为

$$\begin{cases}\beta<0, Y=C_4\mathrm{e}^{\sqrt{-\beta}y}+D_4\mathrm{e}^{-\sqrt{-\beta}y};\\ \beta=0, Y=C_4+D_4y;\\ \beta>0, Y=C_4\cos(\sqrt{\beta}y)+D_4\sin(\sqrt{\beta}y)。\end{cases}\tag{18}$$

方程(11)等价于:$X'=0, \Gamma:\{(x,y)\mid x=\pm a, y\in(-a,a)\}$。方程(13)等价于$X(\pm b)=Y(\pm a)=0$。

2.1.2 先计算 X

根据边界条件的特点把固体 s_1 的区域分成两个小区域来计算,两个小区域的范围分别为

区域①为$(-b,-a)\times(-a,a)$,区域②为$(a,b)\times(-a,a)$。

先计算区域①中的 X。由于 $\alpha<0$ 和 $\alpha=0$ 这两种情况只有零解,所以排除,只需要考虑 $\alpha>0$ 这种情况。

区域①需要满足两个条件,即满足下面的方程组:

$$\begin{cases}X'=0, \Gamma:\{(x,y)\mid x=-a, y\in(-a,a)\};\\ X=0, \partial\Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x=-b, y\in(-a,a)\}。\end{cases}$$

把通解代入上述方程组便有

$$\begin{cases}X'|_{x=-a}=\sqrt{\alpha}C_3\sin(\sqrt{\alpha}a)+\sqrt{\alpha}D_3\cos(\sqrt{\alpha}a)=0,\\ X|_{x=-b}=C_3\cos(\sqrt{\alpha}b)-D_3\sin(\sqrt{\alpha}b)=0。\end{cases}$$

要找 C_3 及 D_3 的非零解,只有当系数矩阵的行列式为0时,才有非零解。

计算可得特征值 $\alpha=\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}\right)^2, k=0,1,2,\cdots$

把 α 的值代入通解(17)中,有

$$X=C_3\cos(\sqrt{\alpha}x)+D_3\sin(\sqrt{\alpha}x)=C_3\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}x\right)+D_3\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}x\right)。$$

为了方便之后的计算,简化通解 X

$$X=\sqrt{C_3^2+D_3^2}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}x+\varphi_3\right), \tan\varphi_3=\frac{C_3}{D_3}。$$

把关系代入最终可得

$$X=\sqrt{\frac{D_3^2}{\cos^2 S\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right),$$

$k=0,1,2,\cdots$

因为 D_3 为任意常数,取 $D_3=1$,即可得

$$X=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right),$$

$k=0,1,2,\cdots$

同理可得区域②中的 X 为

$$X=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right),$$

$k=0,1,2,\cdots$

2.1.3 计算 Y

在固体 s_1 的区域中,Y 应该满足条件:$Y(\pm a)=0$,同理可以算得$\sqrt{\beta}=\dfrac{(k+1)\pi}{2a}, k=0,1,2,\cdots$

Y 的计算结果如下:

$$\begin{cases}Y=\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right), k=0,2,4,\cdots\\ Y=\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right), k=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

2.1.4 关于固体 s_1 的特征值和特征函数

特征值为 $\lambda_k^{s_1}=\alpha+\beta=\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}\right)^2+\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}\right)^2, k=0,1,2,\cdots$

当 k 为奇数时,特征函数为

$$\begin{cases}\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)\\ \qquad\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \qquad\Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(-b,-a), y\in(-a,a)\};\\ \varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right)\\ \qquad\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \qquad\Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(a,b), y\in(-a,a)\}。\end{cases}$$

当 k 为偶数时,特征函数为

$$\begin{cases}\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)\\ \quad\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \quad\Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(-b,-a),y\in(-a,a)\};\\ \varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right)\\ \quad\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \quad\Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(a,b),y\in(-a,a)\}。\end{cases}$$

2.2 计算固体 s_2 的特征值和特征函数

有齐次边界条件,采用分离变量法 $\varphi_k^{s_2}=X_1Y_1$,方程(10)变成

$$X_1''Y_1+X_1Y_1''=\lambda_k^{s_2}X_1Y_1。$$

上式两边除以 $X_1\ Y_1$,有 $\dfrac{X_1''}{X_1}+\dfrac{Y_1''}{Y_1}=-\lambda_k^{s_2}$,设 $-\lambda_k^{s_2}=-\alpha-\beta$,则方程(10)转换为求如下方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{X_1''}{X_1}=-\alpha,\\ \dfrac{Y_1''}{Y_1}=-\beta。\end{cases}$$

可得 X_1 的通解:

$$\begin{cases}\alpha<0,X_1=C_5\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}x}+D_5\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}x};\\ \alpha=0,X_1=C_5+D_5x;\\ \alpha>0,X_1=C_5\cos(\sqrt{\alpha}x)+D_5\sin(\sqrt{\alpha}x)。\end{cases}$$

可得 Y_1 的通解:

$$\begin{cases}\beta<0,Y_1=C_6\mathrm{e}^{\sqrt{-\beta}y}+D_6\mathrm{e}^{-\sqrt{-\beta}y};\\ \beta=0,Y_1=C_6+D_6y;\\ \beta>0,Y_1=C_6\cos(\sqrt{\beta}y)+D_6\sin(\sqrt{\beta}y)。\end{cases}$$

2.2.1 先计算 Y_1

(1) $\beta=0$ 和 $\beta<0$ 这两种情形代入边界条件只有零解。

(2)当 $\beta>0$ 时,

$$Y_1=C_6\cos(\sqrt{\beta}y)+D_6\sin(\sqrt{\beta}y),$$

把这个通解代入边界条件可得:

$$\begin{cases}C_6\cos(\sqrt{\beta}a)-D_6\sin(\sqrt{\beta}a)=0,\\ C_6\cos(\sqrt{\beta}a)+D_6\sin(\sqrt{\beta}a)=0。\end{cases}$$

可得 $\sqrt{\beta}=\dfrac{(k+1)\pi}{2a},k=0,1,2,\cdots$

$$\begin{cases}Y_1=\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),k=0,2,4,\cdots\\ Y_1=\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),k=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

2.2.2 根据 Y_1 计算 X_1

(1)当 $\alpha<0$ 时,无法求出 α,所以排除这种情况。

(2)当 $\alpha=0$,k 为奇数时,代入边界条件(12)可得

$$\begin{cases}\varphi_k^{s_2}|_{x=-a}=-\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \varphi_k^{s_2}|_{x=a}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right)。\end{cases}$$

k 为偶数时,代入边界条件(12)可得

$$\begin{cases}\varphi_k^{s_2}|_{x=-a}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \varphi_k^{s_2}|_{x=a}=-\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2a}y\right)。\end{cases}$$

所以,当 k 为偶数时,可得

$$X_1=-\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{a}x,$$

当 k 为奇数时,可得

$$X_1=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{a}x。$$

(3)当 $\alpha>0$,k 为奇数时,有

$$\begin{cases}(C_5\cos\sqrt{\alpha}a+D_5\sin\sqrt{\alpha}a)\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)=\\ \sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ (C_5\cos\sqrt{\alpha}a-D_5\sin\sqrt{\alpha}a)\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)=\\ -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)。\end{cases}$$

当 $\cos\sqrt{\alpha}a=0$ 时,即 $\sqrt{\alpha}=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}$,$k=1,3,5,\cdots$ 此时,方程有非零的无穷解,其中,C_5 任取,在此处取为1,可得

$$D_5=\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)},$$

所以,

$$X_1=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)+\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)$$

当 k 为偶数时,同样计算可得 $\sqrt{\alpha}=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}$,$k=0,2,4,\cdots$ 其中,C_5 任取,在此处取为1,可得

$$D_5=-\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)},$$

所以,

$$X_1=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)-\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)。$$

2.2.3 总结 s_2 的特征值和特征函数

(1)当 $\alpha=0,\beta>0$ 时,$\lambda_k^{s_2}=\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}\right)^2$,$k=0,1,2,\cdots$

当 k 为偶数时,

$$\varphi_k^{s_2}=-\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}x}{a}\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right);$$

当 k 为奇数时,

$$\varphi_k^{s_2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}x}{a}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)。$$

(2)当 $\alpha>0,\beta>0$ 时,$\lambda_k^{s_2}=\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}\right)^2$,$k=0,1,2,\cdots$

当 k 为偶数时,

$$\varphi_k^{s_2}=\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)-\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)\right)\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right);$$

当 k 为奇数时,

$$\varphi_k^{s_2}=\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)+\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)\right)$$

$\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)$。

2.3　总结问题(Ⅲ)的解

2.3.1　固体 s_1 的特征值和特征函数

特征值为 $\lambda_k^{s_1}=\alpha+\beta=\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}\right)^2+\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}\right)^2, k=0,1,2,\cdots$

当 k 为奇数时,特征函数为

$$\begin{cases}\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(-b,-a),y\in(-a,a)\};\\ \varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right)\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(a,b),y\in(-a,a)\}。\end{cases}$$

当 k 为偶数时,特征函数为

$$\begin{cases}\varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x+b)\right)\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(-b,-a),y\in(-a,a)\};\\ \varphi_k^{s_1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}(x-b)\right)\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right),\\ \Omega^{s_1}:\{(x,y)\mid x\in(a,b),y\in(-a,a)\}。\end{cases}$$

2.3.2　固体 s_2 的特征值和特征函数

(1)特征值为 $\lambda_k^{s_2}=\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}\right)^2, k=0,1,2,\cdots$

当 k 为偶数时,特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=-\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}x}{a}\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right);$$

当 k 为奇数时,特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}x}{a}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)。$$

(2)特征值为 $\lambda_k^{s_2}=\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}\right)^2, k=0,1,2,\cdots$

当 k 为偶数时,特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)-\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)\right)\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right);$$

当 k 为奇数时,特征函数为

$$\varphi_k^{s_2}=\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)+\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b-a}b\right)}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{a}x\right)\right)\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2a}y\right)。$$

3　结　语

两相椭圆偏微分方程的特征值问题在流体力学中具有重要的理论价值,本文主要对两个固体相之间的特征值问题进行计算,最终找到满足两个固体特征值问题的特征值和特征函数。

参考文献:

[1] Fix G J. Eigenvalue approximation by the finite element method[J]. Advances in Mathematics,1973,10(2):300-316.

[2] Gong B,Sun J G. Regular convergence and finite element methods for eigenvalue problems[J]. ETNA – Electronic Transactions on Numerical Analysis,2023,58:228-243.

[3] 段丽梅,陈兴龙,韩家宇. 对流扩散特征值问题的自适应间断有限元方法[J]. 数学杂志,2023,43(6):515-528.

[4] Chawla M M, Shivakumar P N. A symmetric finite difference method for computing eigenvalues of Sturm-Liouville problems [J]. Computers & Mathematics with Applications,1993,26(2):67-77.

[5] Zhao S. On the spurious solutions in the high-order finite difference methods for eigenvalue problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2007,196(49/50/51/52):5031-5046.

[6] 李悠然,潘文峰. 基于多项式插值的有限差分法求解 Helmholtz 方程透射特征值问题[J]. 应用数学进展,2020,9(12):2236-2243.

[7] Cao J Y,Wang Z Q,Chen L Z. A triangular spectral method for the Stokes eigenvalue problem by the stream function formulation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2018,34(3):825-837.

[8] Ma S N,Li H Y,Zhang Z M. Efficient spectral methods for some singular eigenvalue problems[J]. Journal of Scientific Computing,2018,77(1):657-688.

[9] 陈亚飞,茆晋晋. Maxwell 方程特征值问题的谱方法[J]. 华东交通大学学报,2020,37(4):136-142.

[10] 苏斌. 二维间断系数椭圆特征值问题的数值方法[D]. 厦门:厦门大学,2021.

[11] 牟宴铭. 圆柱体区域上二阶椭圆特征值问题有效的数值方法[D]. 贵阳:贵州师范大学,2023.

[12] 叶其孝,李正元,王明新,等. 反应扩散方程引论[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2011.

[13] 李磊. 二维亥姆霍兹(Helmholtz)方程的 Sinc-Galerkin 法[D]. 成都:电子科技大学,2014.

【责任编辑: 卓祯雨】