文章编号:1671-4229(2024)04-0067-10

关于一类广义丛代数的探讨

李菁菁, 陈家辉
(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘 要: 丛代数是代数学中的一个重要研究对象。它是一类以丛变量为生成元,并且满足某种突变规则的有理函数域中的一个交换子代数。关于秩为2的丛代数$\mathcal{A}(b,c)$已经有了一些研究成果。特别地,当$bc\leqslant 4$时,$\mathcal{A}(b,c)$是有限型丛代数和仿射型丛代数两种类型。现如今,丛代数在泊松几何、表示论、量子群等研究领域中起重要作用。文章研究一类特殊广义丛代数的代数结构,主要通过定义$s_n(n\geqslant 1)$来建立此类广义丛代数的乘法公式,并由此证明所有的丛单项式$x_m^p x_{m+1}^q(m\in\mathbb{Z})$和$s_n(n\geqslant 1)$组成的集合是此类广义丛代数的一组整基。

关键词: 丛代数; 丛变量; 交换环; 广义丛代数
中图分类号: O187.2 **文献标志码:** A

Discussion on a class of generalized cluster algebras

LI Jing-jing, CHEN Jia-hui
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Cluster algebra is an important research object in algebra. Cluster algebra is a kind of commutative subalgebra of a rational function field which satisfies some mutation rule by taking cluster variables as generators. There are some research results on the cluster algebra $\mathcal{A}(b,c)$ of rank 2. In particular, when $bc\leqslant 4$, $\mathcal{A}(b,c)$ is of two types of algebras with finite type and affine type. Nowadays, cluster algebra plays an important role in Poisson geometry, representation theory, quantum group and other research fields. This paper studies the algebraic structure of a special class of generalized cluster algebras, mainly by defining $s_n(n\geqslant 1)$ to establish the multiplication formula of such generalized cluster algebras, and thus proves that the set of all cluster monomials $x_m^p x_{m+1}^q(m\in\mathbb{Z})$ and $s_n(n\geqslant 1)$ is an integer base of such generalized cluster algebras.

Key words: cluster algebra; cluster variable; commutative ring; generalized cluster algebra

在代数学的现代研究中,丛代数是一个研究热点。丛代数是2002年左右由Fomin等[1]引入的,它是为了研究代数群的全正性和量子群的典范基建立的一类新的交换代数。丛代数有许多组合结构,它是由一个初始给定的丛通过某种递归方式得到新的丛变量生成的有理函数域的交换子代数。递归规律是由给定的可斜对称化的整数矩阵和突变决定的。

随着数学研究的发展,人们在数学的不同分支中发现了许多丛代数结构,这说明丛代数与其他分支有着某种联系。因此,丛代数逐渐得到各学科学者的广泛关注并成为国际上一个热门且重要的研究理论。现阶段,丛代数与一些数学理论知识相结合产生了许多研究成果。例如文献[2]

收稿日期: 2023-03-24; **修回日期:** 2023-04-20
作者简介: 李菁菁(1999—),女,硕士研究生. E-mail:578787066@qq.com
引文格式: 李菁菁, 陈家辉. 关于一类广义丛代数的探讨[J]. 广州大学学报(自然科学版),2024,23(4):67-76.

表明丛代数在泊松几何上有直接的联系,文中引入一个与丛代数结构兼容的泊松丛,并在此丛上引入相容的环面作用,研究这个环面作用的一般轨道并的泊松性质和拓扑性质;文献[3]证明了一些 A-D-E 型丛代数与箭图表示理论有着某种特殊的联系。除此之外,丛代数理论在代数表示论[4-6]和离散动力系统[7-8]中也有相关的应用研究。丛代数和这些分支之间有着千丝万缕的联系,同时,这些知识的融入为接下来深入研究丛代数提供了一类新的思路。

广义丛代数的概念是2014年左右由 Chekhov 等[9]引入的,它产生于具有轨道折叠点的黎曼曲面的 Teichmüller 空间。丛代数和广义丛代数的主要区别在于丛变量的交换关系。丛代数中的许多重要性质也被成功推广到广义丛代数中[9-11]。

众所周知,秩为2的丛代数 $\mathcal{A}(b,c)$ 是丛代数理论研究中的一种重要类型,它包含了有限型丛代数($bc\leqslant 3$)和仿射型丛代数($bc=4$)。丛代数中的乘法公式对丛代数理论的研究有着重要作用,那么,一个自然的问题是广义丛代数中能否建立乘法公式。本文探究了一类特殊的广义丛代数 $\mathcal{A}(2,2)$ 的基本结构,建立它的乘法公式并证明了丛单项式 $x_m^p x_{m+1}^q$ 和元素 s_n 共同构成了它的一组整基。

本文的组织结构如下:第一节回顾了丛代数和广义丛代数的定义及重要性质,第二节是关于广义丛代数 $\mathcal{A}(2,2)$ 的乘法公式的推导与证明过程,第三节证明 $\{x_m^{n_1}x_{m+1}^{n_2}, s_n \mid m\in\mathbb{Z}, n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, n\geqslant 1\}$ 是广义丛代数 $\mathcal{A}(2,2)$ 的整基。

1 预备知识

在本节的简要介绍中,首先回顾丛代数的定义[12]。

定义1 域 $\mathcal{F}=\mathbb{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的一个带标记种子为一个二元组 $(X,\boldsymbol{B})$,其中,

(1) $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 为域 $\mathcal{F}$ 的一个自由生成子集,即 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $\mathbb{Q}$ 代数无关的且 $\mathcal{F}$ 中包含 $x_1,\cdots,x_n$ 的最小域为 $\mathcal{F}$;

(2) $\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{Z})$ 为可斜对称化矩阵。

称 X 为种子 $(X,\boldsymbol{B})$ 的丛,$\boldsymbol{B}$ 为种子 $(X,\boldsymbol{B})$ 的交换矩阵,元素 $x_1,\cdots,x_n$ 为丛变量。

定义2 设 $(X,\boldsymbol{B})$ 为 $\mathcal{F}$ 中的一个带标记的种子,$k=1,2,\cdots,n$,其中,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$,沿方向 k 的种子突变 μ_k 将 $(X,\boldsymbol{B})$ 变为二元组

$$\mu_k(X,\boldsymbol{B}):=(X',\boldsymbol{B}'),$$

其中,(1)矩阵 $\boldsymbol{B}'=\mu_k(\boldsymbol{B})$,即 $\boldsymbol{B}'$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 沿 k 方向的突变;

(2) $X'=(x_1',\cdots,x_n')$ 由如下的交换关系给出

$$x'_i=\begin{cases}\dfrac{\prod\limits_{b_{ik}>0}x_i^{b_{ik}}+\prod\limits_{b_{ik}<0}x_i^{-b_{ik}}}{x_k}, & i=k,\\ x_i, & i\neq k。\end{cases}$$

和 $\boldsymbol{B}'$ 定义如下:

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & i=k\text{ 或 }j=k;\\ b_{ij}+[b_{ik}]_+[b_{kj}]_+-[-b_{ik}]_+[-b_{kj}]_+, & \text{其他情形,}\end{cases}$$

其中,$[a]_+=\max\{a,0\}$。

注意到每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,种子突变 μ_k 是一个对合,即

$$\mu_k(\mu_k(X,\boldsymbol{B}))=(X,\boldsymbol{B})。$$

种子 $(X',\boldsymbol{B}')$ 被认为突变等价于 $(X,\boldsymbol{B})$,如果 $(X',\boldsymbol{B}')$ 可以通过种子突变序列从 $(X,\boldsymbol{B})$ 获得,即存在 $1\leqslant k_1,\cdots,k_t\leqslant n$,有

$$(X',\boldsymbol{B}')=\mu_{k_t}\circ\mu_{k_{t-1}}\circ\cdots\circ\mu_{k_1}(X,\boldsymbol{B})。$$

记 T_n 是 n-正则树,当 $n>1$ 时,它是平面上一个具有无穷多顶点的连通图,每个顶点都有 n 条边与之相连接,这 n 条边可用 $[1,n]$ 中的整数标记,其中,$[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$。

设 $(X,\boldsymbol{B})$ 是域 $\mathcal{F}$ 中的一个带标记的种子,令 $(X,\boldsymbol{B})$ 的一个丛模式 $t\mapsto\sum_t$ 使得 t_0 是其根。对于每一个顶点 $t\in T_n$,记

$$X_t=(x_{1;t},\cdots,x_{n;t}),\boldsymbol{B}_t=(b_{ij;t})。$$

称所有丛变量 $\mathcal{X}:=\{x_{i;t}\mid i\in[1,n], t\in T_n\}$ 生成的 $\mathcal{F}$ 的 $\mathbb{Z}$-子代数为丛模式

$t\mapsto\sum_t$ 对应的丛代数,记为 $\mathcal{A}:=\mathcal{A}(\sum_{t_0})$。

注意这里的种子 $(X,\boldsymbol{B})$ 的丛模式 $t\mapsto\sum_t$ 是指赋予 T_n 的每一个顶点 t 一个带标记的种子 $\sum_t=(X_t,\boldsymbol{B}_t)$,

其中,(1) $t\overset{k}{\longrightarrow}t'$ 为 n-正则树中的一条边,则 $\mu_k(\sum_t)=\sum_{t'}$;

(2)存在顶点 $t_0\in T_n$,使得 $\sum_{t_0}=(X,\boldsymbol{B})$。

接下来用一个例子来理解丛代数。

例 1　设 $X=\{x_1,x_2\}$ 和交换矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}$ 共同构成域 $\mathcal{F}$ 中的一个初始丛,则有

$$\cdots\overset{\mu_1}{\leftrightarrow}(\{x_1,x_0\},-\boldsymbol{B})\overset{\mu_2}{\leftrightarrow}(\{x_1,x_2\},\boldsymbol{B})\overset{\mu_1}{\leftrightarrow}\cdots\overset{\mu_t}{\leftrightarrow}(\{x_i,x_j\},\boldsymbol{B}_t)\leftrightarrow\cdots,$$

其中,$j=\begin{cases}i-1,t=1,\\ i+1,t=2;\end{cases}$ $\boldsymbol{B}_t=\begin{cases}-\boldsymbol{B},t=1,\\ \boldsymbol{B},\quad t=2。\end{cases}$

并且丛变量 $x_n(n\in\mathbb{Z})$ 满足交换关系:

$$x_{n-1}x_{n+1}=\begin{cases}x_n+1,&n\text{ 为奇数},\\ x_n^2+1,&n\text{ 为偶数}。\end{cases}$$

通过直接的计算可得到:

$$x_3=\frac{x_2^2+1}{x_1},x_4=\frac{x_1+x_2^2+1}{x_1x_2},x_5=\frac{x_2^2+2x_1+x_1^2+1}{x_2^2x_1},$$

$$x_6=x_0=\frac{1+x_1}{x_2},x_7=x_1,x_8=x_2。$$

显而易见,丛变量 $\{x_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 的序列周期是 6,因此,只有 6 个不同的丛变量,这 6 个丛变量生成的 $\mathbb{Z}$ - 子代数称为一个丛代数。

定理 1[1](洛朗现象)　对于任意的丛变量 x_i',都有

$$x_i'\in\mathbb{Z}[x_1^{\pm},\cdots,x_n^{\pm}],$$

即在丛代数中,任何丛变量都可以用任意给定的丛表示为$\mathbb{Z}$上的洛朗多项式。

接下来介绍广义丛代数的定义[9,13]。

定义 3　一个广义种子在 $\mathcal{F}=\mathbb{Q}(x_1,\cdots,x_m)$ 是一个三元组 $(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$,其中,

(1)集合 $\tilde{X}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一组超越基,称为扩展丛;$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 称为丛,其元素称为丛变量;并且集合 $\{x_i\mid i\in[n+1,m]\}$ 被称为冻结向量。

(2)矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别称为扩展交换矩阵和交换矩阵。

(3)$\rho=\{\rho_i\mid i\in[1,n]\}$ 是一组字符串,其中,对于每个 $i\in[1,n]$,用 $\rho_i:=\{\rho_{i,0},\cdots,\rho_{i,d_i}\}$ 表示第 i 个字符串,其中,$\rho_{i,0}=\rho_{i,d_i}=1$,$d_i$ 为 $\gcd\{b_{ij}\mid 1\leqslant j\leqslant n\}$ 的一个因子,而 $\rho_{i,j}$ 是$\mathbb{Z}[x_i\mid i\in[n+1,m]]$中的单项式,其中,$1\leqslant j\leqslant d_i$。

种子突变定义如下:

定义 4　对于 $1\leqslant k\leqslant n$,沿方向 k 的广义种子 $(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$ 的突变是另一个广义种子 $\mu_k(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}}):=(\tilde{X}',\rho',\tilde{\boldsymbol{B}}')$,其中,

(1)集合 $\tilde{X}':=(\tilde{X}\setminus\{x_k\})\cup\{x_k'\}$,其中,新变量 $x_k'\in\mathcal{F}$ 且有下面等式给出

$$x'_k:=\mu_k(x_k)=x_k^{-1}\Big(\sum_{r=0}^{d_k}p_{k,r}\prod_{j=1}^{m}x_j^{\lfloor[r\beta_{jk}]_+\rfloor+\lfloor[-(d_k-r)\beta_{jk}]_+\rfloor}\Big),\qquad(1)$$

称式(1)为交换关系。$\tilde{\boldsymbol{B}}=(b_{ij})$ 为 $m\times n$ 整数矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 的 $n\times n$ 可斜对称子矩阵,其中,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 的主部分;$\lfloor x\rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数。

(2)$\rho':=\mu_k(\rho)=\{\rho_l'\mid l\in[1,n]-\{k\}\}$,其中,$\rho_k'=(\rho'_{k,0},\cdots,\rho'_{k,d_k})$。对于 $0\leqslant r\leqslant d_k$ 有

$$\rho'_{i,r}=\begin{cases}\rho_{i,d_i-r},&\text{当 }i=k,\\ \rho_{i,r},&\text{其他情形}。\end{cases}$$

(3)矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}':=\mu_k(\tilde{\boldsymbol{B}})=(b'_{ij})$ 的元素由下面等式给出

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij},&\text{当 }i=k\text{ 或 }j=k,\\ b_{ij}+([b_{kj}]_+b_{ik}+b_{kj}[-b_{ik}]_+),&\text{其他情形}。\end{cases}$$

注意到每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,种子突变 μ_k 是一个对合,即

$$\mu_k(\mu_k(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}}))=(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})。$$

广义种子 $(\tilde{X}',\rho',\tilde{\boldsymbol{B}}')$ 被认为突变等价于 $(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$,如果 $(\tilde{X}',\rho',\tilde{\boldsymbol{B}}')$ 可以通过种子突变序列从 $(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$ 获得,即存在 $1\leqslant k_1,\cdots,k_t\leqslant n$,有

$$(\tilde{X}',\rho',\tilde{\boldsymbol{B}}')=\mu_{k_t}\circ\mu_{k_{t-1}}\circ\cdots\circ\mu_{k_1}(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})。$$

设 $(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$ 是初始广义种子,称由 $(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$ 突变等价于 $(\tilde{X}',\rho',\tilde{\boldsymbol{B}}')$ 的所有丛变量生成的 $\mathcal{F}$ 的 $\mathbb{Z}$ - 子代数为广义丛代数,记为 $\mathcal{A}(\tilde{X},\rho,\tilde{\boldsymbol{B}})$。接下来用一个例子来理解广义丛代数(参考文献[14])。

例 2　设 $\tilde{X}=X=\{x_1,x_2\}$ 和矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}$ 共同构成域 $\mathcal{F}$ 中的一个初始丛。令 $(d_1,d_2)=(2,1)$ 和 $\rho=\{\rho_1,\rho_2\}$,其中,对于任意 $h\in\mathbb{Z}$ 都有 $\rho_1=\{1,h,1\}$ 且 $\rho_2=\{1,1\}$。这个三元组 $(X,\rho,\boldsymbol{B})$ 是一个广义种子,则有

$$\cdots\overset{\mu_1}{\leftrightarrow}(\{x_1,x_0\},\rho,-\boldsymbol{B})\overset{\mu_2}{\leftrightarrow}(\{x_1,x_2\},\rho,\boldsymbol{B})\overset{\mu_1}{\leftrightarrow}\cdots\overset{\mu_t}{\leftrightarrow}(\{x_i,x_j\},\rho,\boldsymbol{B}_t)\leftrightarrow\cdots,$$

这里,$j=\begin{cases} i-1, & t=1,\\ i+1, & t=2; \end{cases}$ $\boldsymbol{B}_t=\begin{cases} -\boldsymbol{B}, & t=1,\\ \boldsymbol{B}, & t=2, \end{cases}$

其中,丛变量 $x_n(n\in\mathbb{Z})$ 满足交换关系:

$$x_{n-1}x_{n+1}=\begin{cases} x_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ x_n^2+hx_n+1, & n\text{ 为偶数}。 \end{cases}$$

通过计算可得到:

$$x_3=\frac{x_2^2+hx_2+1}{x_1},\ x_4=\frac{hx_2+x_1+x_2^2+1}{x_1x_2},$$

$$x_5=\frac{x_2^2+hx_2+hx_1x_2+2x_1+x_1^2+1}{x_2^2x_1},$$

$$x_6=x_0=\frac{1+x_1}{x_2},x_7=x_1,x_8=x_2。$$

显而易见,丛变量 $\{x_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 的序列周期是6,因此,只有6个不同的丛变量,这6个丛变量生成 $\mathbb{Z}$ - 子代数 $\mathbb{Q}(x_1,x_2)$ 的广义丛代数。

定理2[9](洛朗现象) 对于任意的丛向量 x_i' 都有

$$x_i'\in\mathbb{Z}[x_1^{\pm},\cdots,x_n^{\pm}],$$

即在广义丛代数中洛朗现象依然成立。

注1 作为文献[1]中建立的 Laurent 现象的一个特例,$\mathcal{A}(2,2)$ 包含在 Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}[x_1^{\pm},x_2^{\pm}]$。特别地,所有的 x_n 和 s_m 都可以表示为 x_1 和 x_2 的整系数 Laurent 多项式。根据文献[3,15]通过几何方法给出了 Laurent 多项式的具体计算过程。

注2 本文统一给出以下记号:$s_{-n}=0(n>0)$。

2 广义丛代数 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 乘法公式

设 $\mathcal{F}=\mathbb{Q}(x_1,x_2)$ 是两个自由变量 x_1 和 x_2 的有理函数域。取定初始种子 $(X,\rho,\boldsymbol{B})$,令 $\rho=\{\rho_1,\rho_2\}$,$X=\{x_1,x_2\}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0 \end{pmatrix}$,其中,$\rho_1=\rho_2=\{1,h,1\}$,这里 $h\in\mathbb{Z}$,容易得到以下交换关系式:

$$x_{n-1}x_{n+1}=x_n^2+hx_n+1, \tag{2}$$

根据定义1,$\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 是由 $x_n\in\mathcal{F}(n\in\mathbb{Z})$ 生成的广义丛代数。元素 x_n 称为丛变量,关系式(2)称为交换关系式。集合 $(x_n,x_{n+1})(\forall n\in\mathbb{Z})$ 称为丛,形如 $x_m^px_{m+1}^q(p,q\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},m\in\mathbb{Z})$ 称为丛单项式。

本文的主要研究对象是广义丛代数 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$,而 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 包含元素 $s_0,s_1,\cdots$,其定义如下:

$$s_0=1,s_1=x_0x_3-(x_1+h)(x_2+h),$$

$$s_m=s_1s_{m-1}-s_{m-2}(m\geqslant 2)。$$

下面介绍本节的主要结果:

定理3 在广义丛代数 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 中

(1)对任意 $m\in\mathbb{Z},n\geqslant 3$,有

$$x_ns_m=\sum_{i=0}^{m}x_{n-m+2i}+h\sum_{i=1}^{m-1}(m-i)s_i+mh;$$

(2)对任意 $m\in\mathbb{Z},n\geqslant 3$,有

$$x_mx_{m+n}=x_{\lfloor m+\frac{n}{2}\rfloor}x_{\lceil m+\frac{n}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}x_{m+i+j}+h^2\Delta_n+\sum_{i\geqslant 1}s_{n-2i}。$$

这里

$$\Delta_n=\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor}\frac{(n-2-2i)^2}{4}s_{2i+1}+\\ \quad\sum\limits_{i=0}^{\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor}\frac{(n-2-2i)(n-2i)}{4}s_{2i}, & \text{当 } n\equiv 0\ (\mathrm{mod}2),\\ \sum\limits_{i=0}^{\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor}\frac{(n-1-2i)^2}{4}s_{2i}+\\ \quad\sum\limits_{i=0}^{\lfloor\frac{n-3}{2}-1\rfloor}\frac{(n-3-2i)(n-1-2i)}{4}s_{2i+1}, & \text{其他情形}。 \end{cases}$$

$\lceil x\rceil$ 表示大于等于 x 的最小整数,$\lfloor x\rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数。

为了证明定理3,需要以下引理:

设 σ 是 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 到 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 的映射,定义 $\sigma(x_n)=x_{n+1},\forall x_n\in\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$。显然 σ 是 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 上的一个代数同构。

引理1 对于任意的 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,都有 $\sigma(s_n)=s_n$ 成立。

证明 因为

$$\sigma(s_1)=\sigma(x_0x_3-(x_1+h)(x_2+h))=x_1x_4-(x_2+h)(x_3+h)=$$

$$x_1\frac{x_3^2+hx_3+1}{x_2}-(x_2+h)(x_3+h)=\frac{x_1x_3^2+hx_1x_3+x_1-x_2(x_2+h)(x_3+h)}{x_2}=$$

$$\frac{x_3(x_2^2+hx_2+1)+h(x_2^2+hx_2+1)+x_1-x_2(x_2+h)(x_3+h)}{x_2}=\frac{x_1+x_3+h}{x_2},$$

$$s_1 = x_0x_3 - (x_1 + h)(x_2 + h) = \frac{x_1^2 + hx_1 + 1}{x_2}\frac{x_2^2 + hx_2 + 1}{x_1} - (x_1 + h)(x_2 + h) =$$

$$\frac{x_1^2 + hx_1 + 1}{x_2}\frac{x_2^2 + hx_2 + 1}{x_1} - (x_1x_2 + hx_1 + hx_2 + h^2) =$$

$$\frac{(x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1) + (hx_1^2x_2 + hx_1x_2^2 + h^2x_1x_2 + hx_1 + hx_2)}{x_1x_2} - (x_1x_2 + hx_1 + hx_2 + h^2) =$$

$$\frac{(x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1) - x_1^2x_2^2}{x_1x_2} + \frac{(hx_1^2x_2 + hx_1x_2^2 + h^2x_1x_2 + hx_1 + hx_2) - x_1x_2(hx_1 + hx_2 + h^2)}{x_1x_2} =$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{x_1x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}h = \frac{x_2^2 + hx_2 + 1}{x_1x_2} + \frac{x_1^2 + hx_1}{x_1x_2} = \frac{x_1x_3}{x_1x_2} + \frac{x_1 + h}{x_2} = \frac{x_1 + x_3 + h}{x_2}。$$

故 $\sigma(s_1) = s_1$。

当 $m = 1$ 时,由上式可知 $\sigma(s_1) = s_1$ 成立;假设当 $m \leqslant n - 1$ 时,有等式 $\sigma(s_m) = s_m$ 成立,则当 $m = n$ 时,有

$$\sigma(s_n) = \sigma(s_1s_{n-1} - s_{n-2}) = \sigma(s_1)\sigma(s_{n-1}) - \sigma(s_{n-2}) = s_1s_{n-1} - s_{n-2} = s_n。$$

证毕。

引理 2　对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$,都有 $x_{n+1} = x_ns_1 - x_{n-1} - h$ 成立。

证明　根据引理 1,可以得到

$$s_1 = \sigma^{n-2}(s_1) = \sigma^{n-2}\left(\frac{x_1 + x_3 + h}{x_2}\right) = \frac{x_{n-1} + x_{n+1} + h}{x_n},$$

故 $x_{n+1} = x_ns_1 - x_{n-1} - h$。证毕。

下面证明定理 3。

(1)当 $m = 1$ 时,由引理 2 可知

$$x_ns_1 = x_{n+1} + x_{n-1} + h。$$

当 $m \leqslant k - 1$ 时,假设等式成立。现在证明当 $m = k$ 时,

$$x_ns_k = x_n(s_{k-1}s_1 - s_{k-2}) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_{n-k+1+2i} + h\sum_{i=1}^{k-2}(k - 1 - i)s_i + (k - 1)h\right)s_1 -$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k-2} x_{n-k+2+2i} + h\sum_{i=1}^{k-3}(k - 2 - i)s_i + (k - 2)h\right) =$$

$$\left(s_1\sum_{i=0}^{k-1} x_{n-k+1+2i} - \sum_{i=0}^{k-2} x_{n-k+2+2i}\right) +$$

$$h\left(s_1\sum_{i=1}^{k-2}(k - 1 - i)s_i - \sum_{i=1}^{k-3}(k - 2 - i)s_i\right) +$$

$$((k - 1)hs_1 - (k - 2)h) = \Delta' + h\Delta'' +$$

$$((k - 1)hs_1 - (k - 2)h),$$

这里的 $\Delta' = s_1\sum_{i=0}^{k-1} x_{n-k+1+2i} - \sum_{i=0}^{k-2} x_{n-k+2+2i}$,$\Delta'' = s_1\sum_{i=1}^{k-2}(k - 1 - i)s_i - \sum_{i=1}^{k-3}(k - 2 - i)s_i$。

接下来分别计算 Δ' 及 Δ''。

$$\Delta' = s_1\sum_{i=0}^{k-1} x_{n-k+1+2i} - \sum_{i=0}^{k-2} x_{n-k+2+2i} =$$

$$s_1(x_{n-k+1} + x_{n-k+3} + \cdots + x_{n+k-3} + x_{n+k-1}) -$$

$$(x_{n-k+2} + x_{n-k+4} + \cdots + x_{n+k-4} + x_{n+k-2}) =$$

$$(x_{n-k+2} + x_{n-k} + h) + (x_{n-k+4} + x_{n-k+2} + h) +$$

$$\cdots + (x_{n+k-2} + x_{n+k-4} + h) + (x_{n+k} + x_{n+k-2} + h) -$$

$$(x_{n-k+2} + x_{n-k+4} + \cdots + x_{n+k-4} + x_{n+k-2}) =$$

$$x_{n-k} + h + x_{n-k+2} + h + \cdots + x_{n+k-2} + h + x_{n+k} =$$

$$\sum_{i=0}^{k} x_{n-k+2i} + kh。$$

$$\Delta'' = s_1\sum_{i=1}^{k-2}(k - 1 - i)s_i - \sum_{i=1}^{k-3}(k - 2 - i)s_i =$$

$$s_1[(k - 2)s_1 + (k - 3)s_2 + \cdots + 2s_{k-3} + s_{k-2}] -$$

$$[(k - 3)s_1 + (k - 4)s_2 + \cdots + 2s_{k-4} + s_{k-3}] =$$

$$(k - 2)(s_2 + 1) + (k - 3)(s_3 + s_1) + \cdots +$$

$$2(s_{k-2} + s_{k-4}) + (s_{k-1} + s_{k-3}) - [(k - 3)s_1 +$$

$$(k - 4)s_2 + \cdots + 2s_{k-4} + s_{k-3}] = (k - 2)(s_2 + 1) +$$

$$(k - 3)s_3 + \cdots + 2s_{k-2} + s_{k-1}。$$

$$\Delta' + h\Delta'' + [(k - 1)hs_1 - (k - 2)h] =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k} x_{n-k+2i} + kh\right) + h[(k - 2)(s_2 + 1) +$$

$$(k - 3)s_3 + \cdots + 2s_{k-2} + s_{k-1}] +$$

$$[(k - 1)hs_1 - (k - 2)h] = \left(\sum_{i=0}^{k} x_{n-k+2i} + kh\right) +$$

$$h[(k - 1)s_1 + (k - 2)s_2 + (k - 3)s_3 + \cdots +$$

$$2s_{k-2} + s_{k-1}] = \sum_{i=0}^{k} x_{n-k+2i} + h\sum_{i=1}^{k-1}(k - i)s_i + kh。$$

故 $x_ns_k = \sum_{i=0}^{k} x_{n-k+2i} + h\sum_{i=1}^{k-1}(k - i)s_i + kh$。证毕。

(2)证明以下等式

$$x_1x_{1+n}=x_{\lfloor 1+\frac{n}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{n}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}x_{1+i+j}+h^2\Delta_n+\sum_{i\geqslant 1}s_{n-2i}\circ \tag{3}$$

当 $n=3$ 时,有

$$\begin{aligned}x_1x_4&=x_1(x_3s_1-x_2-h)=s_1(x_2^2+hx_2+1)-x_1x_2-hx_1=\\&x_2(x_3+x_1+h)+h(x_3+x_1+h)+s_1-x_1x_2-hx_1=\\&x_2x_3+h(x_3+x_2+h)+s_1=\\&x_{\lfloor 1+\frac{3}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{3}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{3-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{3}{2}\rceil}x_{1+i+j}+\\&h^2\Delta_3+\sum_{i\geqslant 1}s_{3-2i}\circ\end{aligned}$$

当 $n\leqslant k-1$ 时,假设等式(3)成立。现在证明当 $n=k$ 时,有

$$\begin{aligned}x_1x_{1+k}&=x_1(x_ks_1-x_{k-1}-h)=\\&x_1(x_{1+(k-1)}s_1-x_{1+(k-2)}-h)=\\&s_1\left(x_{\lfloor 1+\frac{k-1}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{k-1}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k-1-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil}x_{1+i+j}+\right.\\&\left.h^2\Delta_{k-1}+\sum_{i\geqslant 1}s_{k-1-2i}\right)-\left(x_{\lfloor 1+\frac{k-2}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{k-2}{2}\rceil}+\right.\\&\left.h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k-2-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{k-2}{2}\rceil}x_{1+i+j}+h^2\Delta_{k-2}+\sum_{i\geqslant 1}s_{k-2-2i}\right)-\\&hx_1=\left(s_1x_{\lfloor 1+\frac{k-1}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{k-1}{2}\rceil}-x_{\lfloor 1+\frac{k-2}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{k-2}{2}\rceil}\right)+\\&\left(h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k-1-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil}s_1x_{1+i+j}-h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k-2-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{k-2}{2}\rceil}x_{1+i+j}\right)+\\&(h^2s_1\Delta_{k-1}-h^2\Delta_{k-2})+\left(\sum_{i\geqslant 1}s_1s_{k-1-2i}-\right.\\&\left.\sum_{i\geqslant 1}s_{k-2-2i}\right)-hx_1\circ\end{aligned}$$

(I)当 $k=2t$ 时,

$$\begin{aligned}&\left(s_1x_{\lfloor 1+\frac{2t-1}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{2t-1}{2}\rceil}-x_{\lfloor 1+\frac{2t-2}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{2t-2}{2}\rceil}\right)+\\&\left(h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2t-1-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{2t-1}{2}\rceil}s_1x_{1+i+j}-h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2t-2-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{2t-2}{2}\rceil}x_{1+i+j}\right)+\\&(h^2s_1\Delta_{2t-1}-h^2\Delta_{2t-2})+\\&\left(\sum_{i\geqslant 1}s_1s_{2t-1-2i}-\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2-2i}\right)-hx_1=\\&(s_1x_tx_{t+1}-x_tx_t)+\left(h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}s_1x_{1+i+j}-\right.\\&\left.h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t-1}x_{1+i+j}\right)+(h^2s_1\Delta_{2t-1}-h^2\Delta_{2t-2})+\\&\left(s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-1-2i}-\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2-2i}\right)-hx_1=\\&\nabla_1+\nabla_2+\nabla_3+\nabla_4-hx_1\circ\end{aligned}$$

这里的 $\nabla_1=s_1x_tx_{t+1}-x_tx_t$,$\nabla_2=h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}s_1x_{1+i+j}-h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t-1}x_{1+i+j}$,$\nabla_3=h^2s_1\Delta_{2t-1}-h^2\Delta_{2t-2}$,$\nabla_4=s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-1-2i}-\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2-2i}\circ$

接下来分别计算∇_1、∇_2、∇_3及∇_4。

(i)$\nabla_1=x_t(x_{t+2}+x_t+h)-x_tx_t=(x_{t+1}x_{t+1}+hx_{t+1}+1)+hx_t=x_{t+1}x_{t+1}+h(x_{t+1}+x_t)+1\circ$

(ii)$\nabla_2=h\sum_{j=0}^{t-2}\left(\sum_{i=1}^{t}(x_{2+i+j}+x_{i+j}+h)-\sum_{i=1}^{t-1}x_{1+i+j}\right)=h\sum_{j=0}^{t-2}\left(\sum_{i=1}^{t}x_{2+i+j}+th+x_{1+j}\right)=h\sum_{j=0}^{t-2}\left(\sum_{i=1}^{t}x_{2+i+j}+x_{1+j}\right)+(t-1)th^2=h\sum_{j=1}^{t-1}\left(\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}+x_j\right)+(t-1)th^2=h\left(\sum_{j=1}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}+\sum_{j=1}^{t-1}x_j\right)+(t-1)th^2=h\left(\sum_{j=1}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}+\sum_{i=1}^{t-1}x_i\right)+(t-1)th^2=h\left(\sum_{j=1}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}+\left(\sum_{i=1}^{t}x_{i+1}+x_1-x_t-x_{t+1}\right)\right)+(t-1)th^2=h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}+(t-1)th^2+h(x_1-x_t-x_{t+1})\circ$

(iii)$\nabla_3=h^2s_1\Delta_{2t-1}-h^2\Delta_{2t-2}=h^2s_1\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i}+\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+1}\right)-h^2\left(\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)^2s_{2i+1}+\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i}\right)=h^2\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2(s_{2i-1}+s_{2i+1})+\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)(s_{2i}+s_{2i+2})\right)-h^2\left(\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)^2s_{2i+1}+\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i}\right)=h^2\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i-1}-\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)^2s_{2i+1}\right)+h^2\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i+1}+\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+2}\right)=h^2\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i-1}-\sum_{i=0}^{t-2}(t-2-i)^2s_{2i+1}\right)+h^2\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-$

$i)^2 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+2}\Big) = h^2\Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+2}\Big) = h^2\Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+2} + t(t-1)s_0 - t(t-1)\Big) = h^2\Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i}\Big) - t(t-1)h^2$。

(iv) $\nabla_4 = s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-1-2i} - \sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2-2i} = \sum_{i=1}^{t-1}s_{2t-2i} = \Big(\sum_{i=1}^{t-1}s_{2t-2i} + 1\Big) - 1 = \Big(\sum_{i=1}^{t-1}s_{2t-2i} + s_0\Big) - 1 = \sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i} - 1$。

由(i)~(iv)可知,

$\nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3 + \nabla_4 - hx_1 = (x_{t+1}x_{t+1} + h(x_{t+1} + x_t) + 1) + \Big(h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} + (t-1)th^2 + h(x_1 - x_t - x_{t+1})\Big) + \Big(h^2\Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i}\Big) - (t-1)th^2\Big) + \Big(\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i} - 1\Big) - hx_1 = x_{t+1}x_{t+1} + h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} + h^2\Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i}\Big) + \sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i}$。

(II)当 $k = 2t+1$ 时,

$\Big(s_1 x_{\lfloor 1+\frac{2t+1-1}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{2t+1-1}{2}\rceil} - x_{\lfloor 1+\frac{2t+1-2}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{2t+1-2}{2}\rceil}\Big) + \Big(h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2t+1-1-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{2t+1-1}{2}\rceil}s_1 x_{1+i+j} - h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2t+1-2-2}{2}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lceil\frac{2t+1-2}{2}\rceil}x_{1+i+j}\Big) + (h^2 s_1\Delta_{2t+1-1} - h^2\Delta_{2t+1-2}) + \Big(s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t+1-1-2i} - \sum_{i\geqslant 1}s_{2t+1-2-2i}\Big) - hx_1 = (s_1 x_{t+1}x_{t+1} - x_t x_{t+1}) + \Big(h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}s_1 x_{1+i+j} - h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}\Big) + (h^2 s_1\Delta_{2t} - h^2\Delta_{2t-1}) + \Big(s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i} - \sum_{i\geqslant 1}s_{2t-1-2i}\Big) - hx_1 = \tilde{\nabla}_1 + \tilde{\nabla}_2 + \tilde{\nabla}_3 + \tilde{\nabla}_4 - hx_1$。

这里的 $\tilde{\nabla}_1 = s_1 x_{t+1}x_{t+1} - x_t x_{t+1}$, $\tilde{\nabla}_2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}s_1 x_{1+i+j} - h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}$, $\tilde{\nabla}_3 = h^2 s_1\Delta_{2t} - h^2\Delta_{2t-1}$, $\tilde{\nabla}_4 = s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i} - \sum_{i\geqslant 1}s_{2t-1-2i}$。

接下来分别计算 $\tilde{\nabla}_1$、$\tilde{\nabla}_2$、$\tilde{\nabla}_3$ 及 $\tilde{\nabla}_4$。

(i) $\tilde{\nabla}_1 = s_1 x_{t+1}x_{t+1} - x_t x_{t+1} = (x_{t+2} + x_t + h)x_{t+1} - x_t x_{t+1} = x_{t+2}x_{t+1} + hx_{t+1}$。

(ii) $\tilde{\nabla}_2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}s_1 x_{1+i+j} - h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} = h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}(x_{2+i+j} + x_{i+j} + h) - h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(\sum_{i=1}^{t}x_{2+i+j} + \sum_{i=1}^{t}x_{i+j} + th\Big) - h\sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(\sum_{i=1}^{t}x_{2+i+j} + \sum_{i=1}^{t}x_{i+j} + th\Big) - h\Big(\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} - \sum_{i=1}^{t}x_{t+i}\Big) = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(\sum_{i=1}^{t}x_{2+i+j} - \sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j} + \sum_{i=1}^{t}x_{i+j} + th\Big) + h\sum_{i=1}^{t}x_{t+i} = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(x_{2+t+j} - x_{2+j} + \sum_{i=1}^{t}x_{i+j}\Big) + h\sum_{i=1}^{t}x_{t+i} + t^2h^2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(x_{2+t+j} - x_{2+j} + \sum_{i=1}^{t}x_{i+j}\Big) + h\sum_{j=0}^{t-1}x_{1+t+j} + t^2h^2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(-x_{2+j} + \sum_{i=1}^{t+2}x_{i+j}\Big) + t^2h^2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(-x_{2+j} + \sum_{i=0}^{t+1}x_{1+i+j}\Big) + t^2h^2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\Big(-x_{2+j} + x_{1+j} + \sum_{i=1}^{t+1}x_{1+i+j}\Big) + t^2h^2 = h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t+1}x_{1+i+j} + t^2h^2 + h(x_1 - x_{t+1})$。

(iii) $\tilde{\nabla}_3 = h^2 s_1\Delta_{2t} - h^2\Delta_{2t-1} = h^2(s_1\Delta_{2t} - \Delta_{2t-1}) = h^2\Big(\sum_{i=0}^{t-1}(t-i)^2 s_{2i} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}\Big) - h^2t^2$。

上式的详细计算如下:

$s_1\Delta_{2t} - \Delta_{2t-1} = \Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_1 s_{2i+1} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_1 s_{2i}\Big) - \Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i} + \sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+1}\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2(s_{2i+2} + s_{2i}) + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)(s_{2i+1} + s_{2i-1})\Big) - \Big(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i} + \sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+1}\Big) = \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2 s_{2i+2} + \sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-$

$i)(s_{2i+1}+s_{2i-1})-\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+1}=\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i+2}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}+\left(\sum_{i=1}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i-1}-\sum_{i=0}^{t-3}(t-2-i)(t-1-i)s_{2i+1}\right)=\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i+2}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}=\sum_{i=0}^{t-1}(t-i)^2s_{2i}-t^2+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}$。

(iv) $\tilde{\nabla}_4=s_1\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i}-\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-1-2i}=\sum_{i\geqslant 1}s_{2t+1-2i}$。

由(i)~(iv)可知,

$$\tilde{\nabla}_1+\tilde{\nabla}_2+\tilde{\nabla}_3+\tilde{\nabla}_4-hx_1=(x_{t+2}x_{t+1}+hx_{t+1})+\left(h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t+1}x_{1+i+j}+t^2h^2+h\left(x_1-x_{t+1}\right)\right)+\left(h^2\left(\sum_{i=0}^{t-1}(t-i)^2s_{2i}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}\right)-t^2h^2\right)+\sum_{i\geqslant 1}s_{2t+1-2i}-hx_1=x_{t+2}x_{t+1}+h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t+1}x_{1+i+j}+h^2\left(\sum_{i=0}^{t-1}(t-i)^2s_{2i}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}\right)+\sum_{i\geqslant 1}s_{2t+1-2i}。$$

即当 $n=k$ 时,

$$x_1x_{1+k}=\begin{cases}x_{t+1}x_{t+1}+h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t}x_{1+i+j}+h^2\left(\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i+1}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i}\right)+\sum_{i\geqslant 1}s_{2t-2i}, & k=2t\\ x_{t+2}x_{t+1}+h\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{t+1}x_{1+i+j}+h^2\left(\sum_{i=0}^{t-1}(t-i)^2s_{2i}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}\right)+\sum_{i\geqslant 1}s_{2t+1-2i}, & k=2t+1\end{cases}=$$

$$x_{\lfloor 1+\frac{k}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{k}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor\lceil\frac{k}{2}\rceil}\sum_{i=1}x_{1+i+j}+h^2\Delta_k+\sum_{i\geqslant 1}s_{k-2i}。$$

这里 $\Delta_k=\begin{cases}\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)^2s_{2i+1}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i}, & k=2t,\\ \sum_{i=0}^{t-1}(t-i)^2s_{2i}+\sum_{i=0}^{t-2}(t-1-i)(t-i)s_{2i+1}, & k=2t+1。\end{cases}$

证毕。

由(I)~(II)可知,等式(3)成立。结合引理2可得,

$$\sigma^{m-1}(x_1x_{1+n})=\sigma^{m-1}\left(x_{\lfloor 1+\frac{n}{2}\rfloor}x_{\lceil 1+\frac{n}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor\lceil\frac{n}{2}\rceil}\sum_{i=1}x_{1+i+j}+h^2\Delta_n+\sum_{i\geqslant 1}s_{n-2i}\right)。$$

故 $x_mx_{m+n}=x_{\lfloor m+\frac{n}{2}\rfloor}x_{\lceil m+\frac{n}{2}\rceil}+h\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor\lceil\frac{n}{2}\rceil}\sum_{i=1}x_{m+i+j}+h^2\Delta_n+\sum_{i\geqslant 1}s_{n-2i}$。证毕。

注3 令 $h=0$,可得以下等式:

(1) $x_ns_m=\sum_{i=0}^{m}x_{n-m+2i}$;

(2) $x_mx_{m+n}=x_{\lfloor m+\frac{n}{2}\rfloor}x_{\lceil m+\frac{n}{2}\rceil}+\sum_{i\geqslant 1}s_{n-2i}$, $(n\geqslant 3)$。

注4 Sherman-Zelevinsky 已经给出了$\{x_m,z_n\mid m\in\mathbb{Z},n\geqslant 1\}$的乘法关系式[16],这里的 z_n 满足第一 Chebyshev 多项式的定义关系。而本文的 s_n 满足第二 Chebyshev 多项式的定义关系。如果利用第一和第二 Chebyshev 多项式之间的联系,理论上可以推出定理3。但本文是用了一个独立的方法得到了$\{x_m,s_n\mid m\in\mathbb{Z},n\geqslant 1\}$的乘法公式。

3 广义丛代数$\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$的一组整基

本节将证明$\{x_m^{n_1}x_{m+1}^{n_2},s_n\mid m\in\mathbb{Z},n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},n\geqslant 1\}$是广义丛代数$\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$的整基。在证明整基问题之前,需要准备以下结论:

引理3 (1)对任意 $n\geqslant 0$,有 $s_n=\frac{N_{(n,n)}(x_1,x_2)+1}{x_1^nx_2^n}$;

(2)(a)对任意 $n\geqslant 3$,有 $x_n=\frac{N_{(n-2,n-3)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{n-2}x_2^{n-3}}$;

(b)对任意$n\leqslant 0$,有 $x_n=\frac{N_{(-n,-n+1)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{-n}x_2^{-n+1}}$,

这里,N_α 是一个常数项为零的二元多项式,其中,$\alpha=(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$。

证明

(1)当 $n=0,1$ 时,由引理 2 可知

$$s_0=1=\frac{N_{(0,0)}(x_1,x_2)+1}{x_1^0x_2^0},$$

$$s_1=\frac{x_1+x_3+h}{x_2}=\frac{x_1+\dfrac{x_2^2+hx_2+1}{x_1}+h}{x_2}=\frac{N_{(1,1)}(x_1,x_2)+1}{x_1x_2}。$$

当 $n\leqslant k$ 时,假设等式成立。现在证明当 $n=k+1$ 时,

$$s_{k+1}=s_ks_1-s_{k-1}=\frac{N_{(k,k)}(x_1,x_2)+1}{x_1^kx_2^k}\frac{N_{(1,1)}(x_1,x_2)+1}{x_1^1x_2^1}-\frac{N_{(k-1,k-1)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k-1}x_2^{k-1}}=$$

$$\frac{(N_{(k,k)}(x_1,x_2)+1)(N_{(1,1)}(x_1,x_2)+1)-x_1^2x_2^2(N_{(k-1,k-1)}(x_1,x_2)+1)}{x_1^{k+1}x_2^{k+1}}=\frac{N_{(k+1,k+1)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k+1}x_2^{k+1}}。$$

故引理 3(1)成立。证毕。

(2)将分两部分 $n\geqslant 3$ 和 $n\leqslant 0$ 进行证明:

(a)当 $n=3$ 时,由式(2)可知,

$$x_3=\frac{x_2^2+hx_2+1}{x_1}=\frac{x_2^2+hx_2+1}{x_1^1x_2^0}=\frac{N_{(1,0)}(x_1,x_2)+1}{x_1^1x_2^0}。$$

当 $n\leqslant k$ 时,假设等式成立。现在证明当 $n=k+1$ 时,

$$x_{k+1}=x_ks_1-x_{k-1}-h=\frac{N_{(k-2,k-3)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k-2}x_2^{k-3}}\frac{N_{(1,1)}(x_1,x_2)+1}{x_1x_2}-\frac{N_{(k-3,k-4)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k-3}x_2^{k-4}}-h=$$

$$\frac{(N_{(k-2,k-3)}(x_1,x_2)+1)(N_{(1,1)}(x_1,x_2)+1)-x_1^2x_2^2(N_{(k-3,k-4)}(x_1,x_2)+1)-hx_1^{k-1}x_2^{k-2}}{x_1^{k-1}x_2^{k-2}}=$$

$$\frac{N_{(k-1,k-2)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k-1}x_2^{k-2}}。$$

(b)当 $n=0$ 时,由式(2)可知,

$$x_0=\frac{x_1^2+hx_1+1}{x_2}=\frac{x_1^2+hx_1+1}{x_1^0x_2^1}=\frac{N_{(0,1)}(x_1,x_2)+1}{x_1^0x_2^1},$$

假设当 $n\geqslant -k$ 时,等式成立。当 $n=-k-1$ 时,有

$$x_{-k-1}=x_{-k}s_1-x_{-k+1}-h=$$

$$\frac{N_{(k,k+1)}(x_1,x_2)+1}{x_1^kx_2^{k+1}}\cdot\frac{N_{(1,1)}(x_1,x_2)+1}{x_1x_2}-$$

$$\frac{N_{(k-1,k)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k-1}x_2^k}-h=$$

$$\frac{N_{(k+1,k+2)}(x_1,x_2)+1}{x_1^{k+1}x_2^{k+2}}。$$

由(a)及(b)可知,引理 3(2)成立。证毕。

定理 4　证明 $\{x_m^{n_1}x_{m+1}^{n_2},s_n\mid m\in\mathbb{Z},n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},n\geqslant 1\}$ 是广义丛代数 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 的一组整基。

证明　将分两步证明整基问题。

(i)利用定理 3 中的广义丛代数 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 乘法公式和

$$s_ns_p=\sum_{i=0}^{p}s_{n-p+2i},(n\geqslant p),$$

由 Sherman 等在文献[16]中定理 2.3 的证明方法,可以得到 $\tilde{\mathcal{A}}(2,2)$ 可由 $\{x_m^{n_1}x_{m+1}^{n_2},s_n\mid m\in\mathbb{Z},n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},n\geqslant 1\}$ 线性张成。

(ii)根据引理 3,利用 Sherman 等在文献[16]中定理 2.3 关于线性无关的证明方法,容易得到 $\{x_m^{n_1}x_{m+1}^{n_2},s_n\mid m\in\mathbb{Z},n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},n\geqslant 1\}$ 线性无关。证毕。

参考文献:

[1] Fomin S, Zelevinsky A. Cluster algebras I: Foundations[J]. Journal of the American Mathematical Society, 2002, 15(2): 497-529.

[2] Gekhtman M, Shapiro M, Vainshtein A. Cluster algebras and Poisson geometry[J]. Moscow Mathematical Journal, 2003, 3(3): 899-934.

[3] Caldero P, Chapoton F. Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations[J]. European Mathematical Society, 2006, 81(3): 595-616.

[4] Buan A B, Marsh R, Reineke M, et al. Tilting theory and cluster combinatorics[J]. Advances in Mathematics, 2005, 204

(2):572-618.

[5] Marsh R, Reineke M, Zelevinsky A. Generalized associahedra via quiver representations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2003, 355(10):4171-4186.

[6] Buan A B, Marsh R J, Reiten I. Cluster mutation via quiver representations[J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 2010, 83(1):143-177.

[7] Francesco P D, Kedem R. Q-systems as cluster algebras II: Cartan matrix of finite type and the polynomial property[J]. Letters in Mathematical Physics, 2009, 89(3):183-216.

[8] Fomin S, Zelevinsky A. Y-systems and generalized associahedra[J]. Annals of Mathematics, 2003, 158(3):977-1018.

[9] Chekhov L, Shapiro M. Teichmüller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables[J]. Department of Mathematics, 2014, 8(10):2746-2772.

[10] Nakanishi T. Structure of seeds in generalized cluster algebras[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2015, 277(1):201-217.

[11] Cao P, Li F. On some combinatorial properties of generalized cluster algebras[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2021, 225(8):106650.

[12] Williams L K. Cluster algebras: An introduction[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2014, 51(1):1-26.

[13] Gekhtman M, Shapiro M, Vainshtein A. Drinfeld double of *GLn* and generalized cluster structures[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 2018(3):429-484.

[14] Bai L, Chen X, Ding M, et al. On the generalized cluster algebras of geometric types[J]. SIGMA16, 2020, doi:10.3842/SIGMA.2020.092.

[15] Caldero P, Zelevinsky A. Laurent expansions in cluster algebras via quiver representations[J]. Moscow Mathematical Journal, 2006, 6(3):411-429, 587.

[16] Sherman P, Zelevinsky A. Positivity and canonical bases in rank 2 cluster algebras of finite and affine types[J]. Moscow Mathematical Journal, 2003, 4(4):947-974.

【责任编辑:卓祯雨】