第 23 卷　第 3 期　　广州大学学报(自然科学版)　　Vol. 23　No. 3
2024 年　6 月　　Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)　　Jun.　2024

文章编号:1671-4229(2024)03-0026-07

一类时间离散反应扩散对流模型的全局动力学

彭清源，郭志明
(广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州　510006)

摘　要：时间离散空间连续的反应扩散方程模型是描述物种扩散行为的一类重要的研究工具。考虑到物种除了随机扩散外还会存在依赖于局部环境的扩散，文章建立了单个物种关于时间离散空间连续的反应扩散对流模型，然后利用主特征值理论分析了模型平衡点的存在性和稳定性。研究表明，加入依赖于局部环境的扩散对种群的生存是有利的。

关键词：时间离散；空间连续；反应扩散对流模型；稳定性；主特征值
中图分类号：O175　　　**文献标志码**：A

Global dynamics of a class of temporally-discrete reaction-diffusion-advection models

PENG Qing-yuan, *GUO Zhi-ming*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The temporally-discrete and spatially-continuous reaction-diffusion model is one of the most important tools to describe diffusion behavior. In this paper, it is assumed that the diffusion of species depends not only on random diffusion but also on advection due to the local environment, a temporally-discrete and spatially-continuous reaction-diffusion-advection model is established. The stability and existence of the equilibrium point of this model is analyzed by principal eigenvalue theory. It shows that advection based on the local environment is beneficial for population survival.

Key words: temporally-discrete; spatially-continuous; reaction-diffusion-advection model; stability; principal eigenvalue

1　引言和模型的建立

物种的扩散行为是生态系统中一种普遍存在的现象。由于种群在栖息地中的各个位置分布是不均匀的，并且栖息地资源分布也是不均匀的，这些不均匀性导致种群中的个体会在栖息地中随机进行移动，即物种出现了扩散行为。物种的扩散不但可以减少种内或种间的竞争，还可以使种群找到新的适合生存的区域，使种群更好地发展。

描述物种扩散行为的数学工具有很多，反应扩散方程模型是最为经典的研究工具。反应扩散方程模型常用于描述环境、扩散、竞争等相互作用的动态关系，在物种的生存和迁移、生态资源的利用等方面得到了深入的应用，国内外的学者对反应扩散方程模型进行了广泛的研究[1-8]。在实际的生态环境中，扩散的方式通常有两种：不依赖于局部环境的随机扩散，以及依赖于局部环境的扩散。在许多早期的研究中，对于物种扩散的研究只用到了随机扩散[9-11]。然而在自然界中，有时

收稿日期：2023-11-20；**修回日期**：2023-12-26
作者简介：彭清源(1998—)，男，硕士研究生．E-mail:2253236578@qq.com
引文格式：彭清源，郭志明．一类时间离散反应扩散对流模型的全局动力学[J]．广州大学学报(自然科学版)，2024,23(3):26-32.

用随机扩散不能很好地描述生物的扩散行为。1995 年，Belgacem 等[3]指出，在空间异质的环境中，物种为了寻找更好的生存条件和资源，除了随机扩散之外，还会存在沿着资源梯度方向上的对流运动。他们提出了关于单个物种含有对流项的反应扩散模型：

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot [\, d\,\nabla u - \alpha u\,\nabla m\,] + u(m-u) \\ \quad x \in \Omega \times (0,\infty), \\ (d\,\nabla u - \alpha u\,\nabla m) \cdot \vec{n} = 0 \quad x \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

其中，$u(x,t)$ 表示物种在空间位置 $x \in \Omega$ 和时间 $t>0$ 的种群密度，d 表示物种的随机扩散率，$m(x)$ 是与 x 有关的空间资源函数，非负常数 α 表示物种沿着资源梯度方向的对流强度，Ω 是 R^N 中的有界区域，具有光滑的边界 $\partial\Omega$，N 是非负整数的集合，$\vec{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。其研究结果表明，在上述边界条件下，沿着资源梯度方向进行扩散时，对于物种生存总是有利的。2003 年，Cosner 等[12]在相同的模型下发现如果栖息地是凸的，那么沿着资源梯度方向的扩散总是对物种生存有利；而对于非凸的栖息地，这种扩散方式可能使物种灭绝。2010 年，Cantrell 等[13]在物种扩散进化的研究中，提出了单个物种含有对流的反应扩散方程模型：

$$\begin{cases} u_t = \mu\,\nabla \cdot [\,\nabla u - u\,\nabla P\,] + u(m-u) \\ \quad x \in \Omega \times (0,\infty), \\ (\nabla u - \alpha u\,\nabla P)\vec{n} = 0 \quad x \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases} \tag{2}$$

其中的参数与模型(1)中的参数表示含义相同。在这种情况下，当且仅当 $P = \ln m + C$，C 是常量时，种群的扩散策略是理想自由扩散策略，并且这种扩散策略可以使物种产生理想自由分布。

在很多关于反应扩散方程模型的研究中，研究者大多是建立关于时间连续的反应扩散方程模型来分析问题。但是在自然界中，许多现象本质上就是离散的，例如一年生植物、世代不重叠的物种、一年只繁殖一次的物种等，这些物种的种群数量变化都是在离散时间点上。在实际生活中，很多观察数据在时间上都是离散的，例如人口数量的变化、鸟类的迁徙和外来物种的入侵等等，都是按照离散时间来统计的。因此，通过建立时间离散空间连续的反应扩散方程模型来研究相关问题，在应用中能更好地反映实际情况，并且能更好地描述种群动态。2008 年，Lin 等[14]研究了反应项具有拟单调性的时滞时间离散扩散方程：

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = d\Delta_x u_n(x) + f(u_n(x), u_{n-\tau}(x)), \tag{3}$$

其中，$u_n(x)$ 表示物种在时刻 $n \in N$，$x \in R$ 位置时个体的数量或密度，$d>0$ 是扩散速率，Δ_x 是关于 x 的拉普拉斯算子，$\tau \geqslant 0$ 是时滞，N 是非负整数的集合，$f(u,v)$ 是 (u,v) 的连续函数，他们利用单调迭代技巧和上下解方法建立了上述方程波前解的存在性。后来 Xia 等[15]又将单个的时间离散反应扩散方程推广到方程组的情形：

$$\begin{cases} u_n(x) - u_{n-1}(x) = d_1\Delta_x u_n(x) + \\ \quad f_1(u_{n-\tau_1}(x), v_{n-\tau_2}(x)), \\ v_n(x) - v_{n-1}(x) = d_2\Delta_x v_n(x) + \\ \quad f_2(u_{n-\tau_3}(x), v_{n-\tau_4}(x)), \end{cases} \tag{4}$$

其中的参数与模型(3)中的参数表示含义相同，得到了上述方程行波解的存在性。2021 年，Guo 等[16]以具有年龄结构的单种群生长为背景，推导出了一种具有时滞的时间离散反应扩散方程：

$$w(n+1,x) = D\Delta_x w(n+1,x) + (1-d)w(n,x) + \eta b w(n+1-r,x), \tag{5}$$

其中，$w(n,x)$ 为物种在时刻 $n \in N$，$x \in \Omega$ 位置时全部成年个体的数量或密度，N 为非负整数的集合，$\Omega \in R^n$ 是一个开区域，Δ_x 是关于 x 的拉普拉斯算子，$r \in N \backslash \{0\}$ 为物种成年所需的时间，$D>0$ 为成年个体的扩散速率，$0<d<1$ 为成年个体的死亡率，b 为出生函数，$0<\eta<1$ 为未成年个体能生长到成年的幸存率，他们应用上下解方法证明了上述方程行波解的存在性。随后 Guo 等[17]又讨论了有界域上时间离散的非局部反应扩散方程的全局动力学。

现在假设物种的栖息地是一个一维有界区域，记为 $\Omega = [0,l]$，随机扩散率记为 d，$0<d$ 是一个常数，在时刻 $n \in N$，$x \in \Omega$ 位置的种群密度记为 $u_n(x)$，N 为非负整数的集合，考虑到物种除了随机扩散以外还会进行趋向性的移动，将建立以下模型：

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = [\, d u'_{n+1}(x) - \alpha u_{n+1}(x) P' \,]' + \\ \quad \dfrac{m(x)\, f_0 u_n(x)}{1 + b_0\, u_n(x)} \quad x \in [0,l], \\ d u'_n(0) - \alpha u_n(0) P'(0) = d u'_n(l) - \\ \quad \alpha u_n(l) P'(l) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

其中,α 和 b_0 是大于0的常数,$m(x)$为资源分布函数,f_0 表示物种在时刻 n 的最大存活率,P 表示与 $m(x)$有关的函数。

2 非负平衡点的存在性

模型平衡点的存在性和稳定性是研究种群动力学行为的一个重要部分,所以先分析模型平衡点的存在性。

显然可以知道,$u(x)=0$ 是模型(6)的一个平衡点,下面来研究模型正平衡点的存在性。当物种达到平衡状态时,则有

$$\begin{cases} u(x)=[du'(x)-\alpha u(x)P']'+\dfrac{m(x)f_0u(x)}{1+b_0u(x)} \\ x\in[0,l], \\ du'(0)-\alpha u(0)P'(0)=du'(l)-\alpha u(l)P'(l)=0, \end{cases} \tag{7}$$

即

$$\begin{cases} [du'(x)-\alpha u(x)P']'+(\dfrac{m(x)f_0}{1+b_0u(x)}-1)u(x)=0 \\ x\in[0,l], \\ du'(0)-\alpha u(0)P'(0)=du'(l)-\alpha u(l)P'(l)=0。 \end{cases} \tag{8}$$

将模型(8)在 $u=0$ 处线性化,可以得到

$$\begin{cases} [du'(x)-\alpha u(x)P']'+(m(x)f_0-1)u(x)=0 \\ x\in[0,l], \\ du'(0)-\alpha u(0)P'(0)=du'(l)-\alpha u(l)P'(l)=0, \end{cases} \tag{9}$$

令 $A=-\dfrac{\alpha}{d}P$,$z(x)=e^Au(x)$,则有

$$\begin{cases} [dz'(x)-dz(x)A']'+(m(x)f_0-1)z(x)=0 \\ x\in[0,l], \\ z'(0)=z'(l)=0。 \end{cases} \tag{10}$$

对于方程$[dz'(x)-dz(x)A']'+(m(x)f_0-1)z(x)=0$,两边同时乘以 e^{-A},并且注意到

$$(e^{-A}z')'=e^{-A}z''-e^{-A}A'z',$$

则模型(10)变为

$$\begin{cases} d(e^{-A}z'(x))'+(m(x)f_0-1)e^{-A}z(x)=0 \\ x\in[0,l], \\ z'(0)=z'(l)=0, \end{cases} \tag{11}$$

所以模型(11)对应的主特征值问题为

$$\begin{cases} d(e^{-A}\phi')'+\gamma(m(x)f_0-1)e^{-A}\phi=0 \\ x\in[0,l], \\ \phi'(0)=\phi'(l)=0, \end{cases} \tag{12}$$

其中,ϕ 是 γ 对应的特征函数。不妨记模型(12)对应的主特征值为 γ_1^+,记

$$\begin{cases} d(e^{-A}\phi')'+(m(x)f_0-1)e^{-A}\phi=\tau e^{-A}\phi \\ x\in[0,l], \\ \phi'(0)=\phi'(l)=0 \end{cases} \tag{13}$$

的主特征值为 τ_1,由文献[18]中的引理3.2可以知道 $\tau_1>1$ 和 $0<\gamma_1^+<1$ 是等价的。模型(12)对应的主特征值为

$$\frac{1}{\gamma_1^+}=\max_{\substack{\phi\in L^2([0,l])\\ \phi\neq0}}\frac{\int_0^l(m(x)f_0-1)e^{-A}\phi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l de^{-A}(\phi')^2\mathrm{d}x}。$$

将模型(6)在 $u=0$ 处线性化,有

$$\begin{cases} u_{n+1}(x)=[du'_{n+1}(x)-\alpha u_{n+1}(x)P']'+ \\ \quad m(x)f_0u_n(x)\quad x\in[0,l], \\ du'_n(0)-\alpha u_n(0)P'(0)=du'_n(l)- \\ \quad \alpha u_n(l)P'(l)=0, \end{cases} \tag{14}$$

令 $A=-\dfrac{\alpha}{d}P$,$h_n(x)=e^Au_n(x)$,则有

$$\begin{cases} h_{n+1}(x)=dh''_{n+1}(x)-dh'_{n+1}(x)A'+m(x)f_0h_n(x) \\ x\in[0,l], \\ h'_n(0)=h'_n(l)=0。 \end{cases} \tag{15}$$

模型(15)对应的主特征值问题为

$$\begin{cases} \lambda\varphi=\lambda d(\varphi''-A'\varphi')+m(x)f_0\varphi\quad x\in[0,l], \\ \varphi'(0)=\varphi'(l)=0, \end{cases} \tag{16}$$

其中,φ 是 λ 对应的特征函数。两边同时乘以 e^{-A},并且注意到

$$(e^{-A}\varphi')'=e^{-A}\varphi''-e^{-A}A'\varphi',$$

则有

$$\begin{cases} \lambda e^{-A}\varphi=\lambda d(e^{-A}\varphi')'+m(x)f_0e^{-A}\varphi\quad x\in[0,l], \\ \varphi'(0)=\varphi'(l)=0。 \end{cases} \tag{17}$$

不妨记模型(17)的主特征值为 λ_1,对于(17)的第一个方程,可以知道

$$\lambda(e^{-A}\varphi-d(e^{-A}\varphi')')=m(x)f_0e^{-A}\varphi,$$

上述方程两边同时乘以 φ,并且对 x 在$[0,l]$上积分,则有

$$\lambda\left(\int_0^l e^{-A}\varphi^2\mathrm{d}x-\int_0^l d\varphi(e^{-A}\varphi')'\mathrm{d}x\right)=$$

$$\int_0^l m(x)f_0 e^{-A}\varphi^2\mathrm{d}x,$$

由于边界条件，则有

$$\lambda\left(\int_0^l e^{-A}\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^l de^{-A}(\varphi')^2\mathrm{d}x\right)=\int_0^l m(x)f_0 e^{-A}\varphi^2\mathrm{d}x,$$

所以得到模型(17)的主特征值为

$$\lambda_1=\max_{\substack{\varphi\in L^2([0,l])\\ \varphi\neq 0}}\frac{\int_0^l m(x)f_0 e^{-A}\varphi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l e^{-A}\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^l de^{-A}(\varphi')^2\mathrm{d}x}。$$

所以有如下定理：

定理 1　模型(17)的主特征值 $\lambda_1>1$ 当且仅当 $0<\gamma_1^+<1$，γ_1^+ 是模型(12)对应的正的主特征值。

证明　令 φ_1 是 λ_1 对应的特征函数，由上面的分析可以知道

$$\lambda_1\left(\int_0^l e^{-A}(\varphi_1)^2\mathrm{d}x+\int_0^l de^{-A}(\varphi'_1)^2\mathrm{d}x\right)=\int_0^l m(x)f_0 e^{-A}(\varphi_1)^2\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l (m(x)f_0-1)e^{-A}(\varphi_1)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\gamma_1^+}d\int_0^l e^{-A}(\varphi'_1)^2\mathrm{d}x,$$

所以有

$$\left(\frac{1}{\gamma_1^+}-\lambda_1\right)d\int_0^l e^{-A}(\varphi'_1)^2\mathrm{d}x\geqslant(\lambda_1-1)\int_0^l e^{-A}(\varphi_1)^2\mathrm{d}x。$$

当 $\frac{1}{\gamma_1^+}<\lambda_1$ 时，有 $\lambda_1-1<0$，即 $\lambda_1<1$，所以如果 $\gamma_1^+>1$，则 $\lambda_1<1$。令 ϕ_1 是 γ_1^+ 对应的特征函数，又因为

$$-d\int_0^l e^{-A}(\phi'_1)^2\mathrm{d}x=-\gamma_1^+\int_0^l (m(x)f_0-1)e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x,$$

$$\lambda_1\geqslant\frac{\int_0^l m(x)f_0 e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x}{\int_0^l e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x+d\int_0^l e^{-A}(\phi'_1)^2\mathrm{d}x},$$

则有

$$\lambda_1-1\geqslant\frac{\int_0^l m(x)f_0 e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^l e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x+d\int_0^l e^{-A}(\phi'_1)^2\mathrm{d}x\right)}{\int_0^l e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x+d\int_0^l e^{-A}(\phi'_1)^2\mathrm{d}x}=$$

$$\frac{\int_0^l (m(x)f_0-1)e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x-\gamma_1^+\int_0^l (m(x)f_0-1)e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x}{\int_0^l e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x+d\int_0^l e^{-A}(\phi'_1)^2\mathrm{d}x}=$$

$$\frac{(1-\gamma_1^+)\int_0^l (m(x)f_0-1)e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x}{\int_0^l e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x+d\int_0^l e^{-A}(\phi'_1)^2\mathrm{d}x}。$$

因为 $\gamma_1^+>0$，则有 $\int_0^l (m(x)f_0-1)e^{-A}(\phi_1)^2\mathrm{d}x>0$，如果 $0<\gamma_1^+<1$，则 $\lambda_1>1$。

由文献[18]中的引理 3.1、引理 3.2 以及引理 3.3 可以知道，模型(6)平衡态的存在性有以下两种情况：

(1) $\lambda_1>1$ 时，模型(6)的正平衡态存在并唯一；

(2) $\lambda_1<1$ 时，模型(6)不存在正平衡态。

3　理想自由分布种群模型平衡点的存在性和稳定性

现在来考虑一个具有理想自由分布的种群[19]。对于一个理想自由分布的种群，种群扩散之后的分布状况和没扩散时的分布状况是一样的，所以，假设种群存在正平衡态 $u^*(x)$，则有

$$u^*(x)=\frac{m(x)f_0u^*(x)}{1+b_0u^*(x)},$$

即

$$u^*(x)=\frac{m(x)f_0-1}{b_0}。$$

因此，正平衡点的存在条件为 $m(x)f_0>1$ 对任意的 $x\in[0,l]$ 成立。并且由前面的分析已经知道在 $m(x)f_0>1$ 时，$\lambda_1>1$，模型的正平衡点是唯一的。

在种群达到理想自由分布的状态下，由 d 和 P 决定的扩散策略是理想自由扩散策略当且仅当

$$d(u^*(x))'-\alpha u^*(x)P'=0,$$

即

$$\frac{df_0(m(x))'}{b_0}-\alpha(\frac{m(x)\,f_0-1}{b_0})P'=0,$$

等价于

$$P'=\frac{df_0(m(x))'}{\alpha(m(x)f_0-1)},$$

所以

$$P=\frac{d}{\alpha}\ln(m(x)f_0-1)。$$

因此,模型(6)变为

$$\begin{cases}u_{n+1}(x)=[du'_{n+1}(x)-\\ \quad du_{n+1}(x)(\ln(m(x)f_0-1))']'+\\ \quad \dfrac{m(x)\,f_0\,u_n(x)}{1+b_0u_n(x)}\quad x\in[0,l],\\ u'_n(0)-u_n(0)[\ln(m(0)f_0-1)]'=\\ \quad u'_n(l)-u_n(l)[\ln(m(l)f_0-1)]'=0。\end{cases}\tag{18}$$

下面将首先讨论模型(18)零平衡点的稳定性。

把模型(18)在 $u=0$ 处线性化,有

$$\begin{cases}u_{n+1}(x)=[du'_{n+1}(x)-\\ \quad du_{n+1}(x)(\ln(m(x)f_0-1))']'+\\ \quad m(x)f_0u_n(x)\quad x\in[0,l],\\ u'_n(0)-u_n(0)[\ln(m(0)f_0-1)]'=\\ \quad u'_n(l)-u_n(l)[\ln(m(l)f_0-1)]'=0,\end{cases}\tag{19}$$

令 $B=-\ln(m(x)f_0-1)$, $v_n(x)=e^Bu_n(x)$,则有

$$\begin{cases}v_{n+1}(x)=dv''_{n+1}(x)-dv'_{n+1}(x)B'+m(x)f_0v_n(x)\\ \quad x\in[0,l],\\ v'_n(0)=v'_n(l)=0,\end{cases}\tag{20}$$

模型(20)对应的主特征值问题为

$$\begin{cases}\mu\varphi=\mu d(\varphi''-\varphi'B')+m(x)f_0\varphi\quad x\in[0,l],\\ \varphi'(0)=\varphi'(l)=0,\end{cases}\tag{21}$$

其中,φ 是 μ 对应的特征函数。模型(21)的第一个方程两边同时乘以 e^{-B},并且注意到

$$(e^{-B}\varphi')'=e^{-B}\varphi''-e^{-B}B'\varphi',$$

则有

$$\begin{cases}\mu e^{-B}\varphi=\mu d(e^{-B}\varphi')'+m(x)f_0e^{-B}\varphi\quad x\in[0,l],\\ \varphi'(0)=\varphi'(l)=0。\end{cases}\tag{22}$$

不妨记模型(22)的主特征值为 μ_1,则有定理2:

定理2 如果 $m(x)f_0>1$ 对任意的 $x\in[0,l]$ 成立,则 $\mu_1>1$,从而 $u=0$ 是不稳定的;如果 $m(x)f_0<1$ 对任意的 $x\in[0,l]$ 成立,则 $\mu_1<1$,从而 $u=0$ 是稳定的。

证明 对于模型(22)的第一个方程,可以得到

$$\mu(e^{-B}\varphi-d(e^{-B}\varphi')')=m(x)\,f_0\,e^{-B}\varphi,$$

上述方程两边同时乘以 φ,并且对 x 在 $[0,l]$ 上积分,则有

$$\mu\left(\int_0^l e^{-B}\varphi^2\mathrm{d}x-\int_0^l d\varphi(e^{-B}\varphi')'\mathrm{d}x\right)=\int_0^l m(x)\,f_0e^{-B}\varphi^2\mathrm{d}x,$$

由于边界条件,则有

$$\mu\left(\int_0^l e^{-B}\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^l de^{-B}(\varphi')^2\mathrm{d}x\right)=\int_0^l m(x)f_0e^{-B}\varphi^2\mathrm{d}x,$$

所以得到模型(22)的主特征值为

$$\mu_1=\max_{\substack{\varphi\in L^2([0,l])\\ \varphi\neq0}}\frac{\int_0^l m(x)f_0e^{-B}\varphi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l e^{-B}\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^l de^{-B}(\varphi')^2\,\mathrm{d}x},$$

将 $B=-\ln(m(x)f_0-1)$ 代入 μ_1 中得到

$$\mu_1=\max_{\substack{\varphi\in L^2([0,l])\\ \varphi\neq0}}\cdot\frac{\int_0^l m(x)f_0(m(x)f_0-1)\varphi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l(m(x)f_0-1)\varphi^2\mathrm{d}x+d\int_0^l(m(x)f_0-1)(\varphi')^2\mathrm{d}x}.$$

由上面的分析可以知道,在 $m(x)f_0>1$ 对任意的 $x\in[0,l]$ 成立时,$m(x)f_0-1>0$,因为 $\varphi\in L^2([0,l])$,不妨取 $\varphi=1$,则有

$$\frac{\int_0^l m(x)f_0(m(x)f_0-1)\varphi^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^l(m(x)f_0-1)\varphi^2\,\mathrm{d}x+d\int_0^l(m(x)f_0-1)(\varphi')^2\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^l m(x)f_0(m(x)f_0-1)\mathrm{d}x}{\int_0^l(m(x)f_0-1)\mathrm{d}x}>1,$$

则 $\mu_1>1$,从而 $u=0$ 是不稳定的。如果 $m(x)f_0<1$ 对任意的 $x\in[0,l]$ 成立时,有

$$\frac{\int_0^l m(x)f_0(1-m(x)f_0)\varphi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l(1-m(x)f_0)\varphi^2\mathrm{d}x+d\int_0^l(1-m(x)f_0)(\varphi')^2\mathrm{d}x}\leqslant$$

$$\frac{\int_0^l m(x)f_0(1-m(x)f_0)\varphi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l (1-m(x)f_0)\varphi^2\mathrm{d}x} < 1,$$

则 $\mu_1 < 1$,从而 $u = 0$ 是稳定的。

接下来将研究正平衡态的稳定性。由前面分析可知,当 $m(x)f_0 > 1$ 时,存在正平衡态 $u^*(x) = \frac{m(x)f_0 - 1}{b_0}$,将模型(18)在 $u^*(x) = \frac{m(x)f_0 - 1}{b_0}$ 处线性化,可以得到

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = [du'_{n+1}(x) - \\ \quad du_{n+1}(x)(\ln(m(x)f_0 - 1))']' + \\ \quad \frac{1}{m(x)f_0}u_n(x) \quad x \in [0,l], \\ u'_n(0) - u_n(0)[\ln(m(0)f_0 - 1)]' = \\ \quad u'_n(l) - u_n(l)[\ln(m(l)f_0 - 1)]' = 0。 \end{cases}$$

令 $Q = -\ln(m(x)f_0 - 1)$,$w_n(x) = e^Q u_n(x)$,则有

$$\begin{cases} w_{n+1}(x) = dw''_{n+1}(x) - dw'_{n+1}(x)Q' + \frac{1}{m(x)f_0}w_n(x) \\ \quad x \in [0,l], \\ w'_n(0) = w'_n(l) = 0。 \end{cases} \tag{23}$$

模型(23)对应的主特征值问题为

$$\begin{cases} \sigma\psi = \sigma d(\psi'' - \psi'Q') + \frac{1}{m(x)f_0}\psi \quad x \in [0,l], \\ \psi'(0) = \psi'(l) = 0, \end{cases} \tag{24}$$

其中,ψ 是 σ 对应的特征函数。模型(24)的第一个方程两边同时乘以 e^{-Q},并且注意到

$$(e^{-Q}\psi')' = e^{-Q}\psi'' - e^{-Q}Q'\psi',$$

则有

$$\begin{cases} \sigma e^{-Q}\psi = \sigma d(e^{-Q}\psi')' + \frac{1}{m(x)f_0}e^{-Q}\psi \quad x \in [0,l], \\ \psi'(0) = \psi'(l) = 0。 \end{cases} \tag{25}$$

不妨记模型(25)的主特征值为 σ_1,则有定理 3:

定理 3　如果 $m(x)f_0 > 1$ 对任意的 $x \in [0,l]$ 成立,则 $\sigma_1 < 1$,从而 $u^*(x)$ 是稳定的。

证明　对于模型(25)的第一个方程,可以知道

$$\sigma(e^{-Q}\psi - d(e^{-Q}\psi')') = \frac{1}{m(x)f_0}e^{-Q}\psi,$$

方程两边同时乘以 ψ,并且对 x 在 $[0,l]$ 上积分,则有

$$\sigma\left(\int_0^l e^{-Q}\psi^2\mathrm{d}x - \int_0^l d\psi(e^{-Q}\psi')'\mathrm{d}x\right) = \int_0^l \frac{1}{m(x)f_0}e^{-Q}\psi^2\mathrm{d}x。$$

由于边界条件,则有

$$\sigma\left(\int_0^l e^{-Q}\psi^2\mathrm{d}x + d\int_0^l e^{-Q}(\psi')^2\mathrm{d}x\right) = \int_0^l \frac{1}{m(x)f_0}e^{-Q}\psi^2\mathrm{d}x,$$

所以得到模型(25)的主特征值为

$$\sigma_1 = \max_{\substack{\psi \in L^2([0,l]) \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_0^l \frac{1}{m(x)f_0}e^{-Q}\psi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l e^{-Q}\psi^2\mathrm{d}x + \int_0^l de^{-Q}(\psi')^2\mathrm{d}x}。$$

将 $Q = -\ln(m(x)f_0 - 1)$ 代入 σ_1 中得到

$$\sigma_1 = \max_{\substack{\varphi \in L^2([0,l]) \\ \varphi \neq 0}} \cdot \frac{\int_0^l \frac{m(x)f_0 - 1}{m(x)f_0}\psi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l (m(x)f_0 - 1)\psi^2\mathrm{d}x + d\int_0^l (m(x)f_0 - 1)(\psi')^2\mathrm{d}x}。$$

$m(x)f_0 > 1$ 对任意的 $x \in [0,l]$ 成立,所以有

$$\int_0^l \frac{m(x)f_0 - 1}{m(x)f_0}\psi^2\mathrm{d}x < \int_0^l (m(x)f_0 - 1)\psi^2\mathrm{d}x,$$

则有

$$\frac{\int_0^l \frac{m(x)f_0 - 1}{m(x)f_0}\psi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l (m(x)f_0 - 1)\psi^2\mathrm{d}x + d\int_0^l (m(x)f_0 - 1)(\psi')^2\mathrm{d}x} < \frac{\int_0^l (m(x)f_0 - 1)\psi^2\mathrm{d}x}{\int_0^l (m(x)f_0 - 1)\psi^2\mathrm{d}x + d\int_0^l (m(x)f_0 - 1)(\psi')^2\mathrm{d}x} < 1,$$

因此,主特征值 $\sigma_1 < 1$,$u^*(x)$ 是稳定的。

在 $m(x)f_0 > 1$ 对任意的 $x \in [0,l]$ 成立时,系统的零平衡点不稳定,正平衡点稳定,并且根据前面的分析可以知道正平衡点是唯一的,所以正平衡点也是全局渐近稳定的。

本文建立了单个物种关于时间离散空间连续的反应扩散对流模型,首先讨论了模型平衡点的存在性。对于一个具有理想自由分布的种群,利用主特征值理论分析了模型平衡点的稳定性。最

后证明了在 $m(x)f_0>1$ 的情况下,模型的正平衡点是全局渐近稳定的,这表明物种沿着依赖于局部环境的扩散能够使物种持续生存下去,这种扩散行为对物种生存是有利的。

参考文献:

[1] Cosner C. Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2014, 34(5): 1701-1745.

[2] Cantrell R S, Cosner C, Lou Y. Movement toward better environments and the evolution of rapid diffusion[J]. Mathematical Biosciences, 2006, 204(2): 199-214.

[3] Belgacem F, Cosner C. The effects of dispersal along environmental gradients on the dynamics of populations in heterogeneous environment[J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 1995, 3(4): 379-397.

[4] Alikakos N D. An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations[J]. Journal of Differential Equations, 1979, 33(2): 201-225.

[5] Chen X F, Lou Y. Principal eigenvalue and eigenfunctions of an elliptic operator with large advection and its application to a competition model[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2008,57(2): 627-658.

[6] Chen X F, Lam K Y, Lou Y. Dynamics of a reaction-diffusion-advection model for two competing species[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2012, 32(11): 3841-3859.

[7] He X Q, Ni W M. The effects of diffusion and spatial variation in Lotka-Volterra competition-diffusion system I: Heterogeneity vs. homogeneity[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 254(2): 528-546.

[8] He X Q, Ni W M. The effects of diffusion and spatial variation in Lotka-Volterra competition-diffusion system Ⅱ: The general case[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 254(10): 4088-4108.

[9] Hastings A. Can spatial variation alone lead to selection for dispersal? [J]. Theoretical Population Biology, 1983, 24(3): 244-251.

[10] Dockery J, Hutson V, Mischaikow K, et al. The evolution of slow dispersal rates: A reaction diffusion model[J]. Journal of Mathematical Biology, 1998, 37(1): 61-83.

[11] McPeek M A, Holt R D. The evolution of dispersal in spatially and temporally varying environments[J]. The American Naturalist, 1992, 140(6): 1010-1027.

[12] Cosner C, Lou Y. Does movement toward better environments always benefit a population? [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 277(2): 489-503.

[13] Cantrell R S, Cosner C, Lou Y. Evolution of dispersal and the ideal free distribution[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2010, 7(1): 17-36.

[14] Lin G, Li W T. Traveling wavefronts in temporally discrete reaction-diffusion equations with delay[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(1): 197-205.

[15] Xia J, Yu Z. Traveling wave solutions in temporally discrete reaction-diffusion systems with delays[J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 91(10): 809-823.

[16] Guo Z M, Guo H P, Chen Y M. Traveling wavefronts of a delayed temporally discrete reaction-diffusion equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021, 496(1): 124787.

[17] Guo H P, Guo Z M, Li Y J. Dynamical behavior of a temporally discrete non-local reaction-diffusion equation on bounded domain[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, 2024, 29(1): 198-213.

[18] Cantrell R S, Cosner C. Spatial ecology via reaction-diffusion equations[M]. Hoboken: Wiley, 2004.

[19] Fretwell S D, Lucas H L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds: Ⅱ. Sex ratio variation in the Dickcissel (Spiza americana Gmel)[J]. Acta Biotheoretica, 1969, 19(1): 16-36.

【责任编辑:卓祯雨】