

文章编号:1671-4229(2024)03-0033-11

# 非对称性 Goursat 引理的推广

何焕淇, 孟凡宁\*, 赖凯灵  
(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

**摘要:** 文章根据群与环上 Goursat 引理的非对称版本, 得到了理想上的 Goursat 引理, 并给出了计算 3 个三次交错群的直积的子群与  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的子环的一般步骤。另外, 进一步考虑有限个群直积的一个子群  $K$  和任意子群  $G$  的积都有对应的 Goursat 分解下的性质, 并给出了有限个环直积下的理想形式。

**关键词:** 群; 环; 理想; Goursat 引理

**中图分类号:** O152.7 **文献标志码:** A

## On the generalization of asymmetry of Goursat's lemma

HE Huan-qi, MENG Fan-ning\*, LAI Kai-ling

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** In this paper, according to the asymmetric version of Goursat's lemma on groups and rings, the Goursat's lemma on ideals is obtained, and the general steps for calculating the subgroups of the direct product of three cubic alternating groups and the rings of  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  are given. In addition, the product of a subgroup  $K$  and any subgroup  $G$  of the direct product of finite groups' properties under the corresponding Goursat decomposition is considered, and the form of ideal under the direct product of a finite number of rings is given.

**Key words:** group; ring; ideal; Goursat's lemma

1889 年, Goursat<sup>[1]</sup> 给出了两个群的直积的子群表达式, 称之为 Goursat 引理, 这是一个关于两个群的直积的子群的完整描述。因此, 这个涉及到商群之间同构的引理得到了许多应用以及不同代数结构上的推广。基于 Goursat 引理对两个群的直积的子群的刻画, Brewster 等<sup>[2]</sup> 给出了两个群的直积的子群之间包含的特征, 根据此特征得到了描述  $p$  群的直积的子群格的过程, 以此来描绘出两个 8 阶四元数群的直积  $Q \times Q$  的子群格。Tóth<sup>[3]</sup> 则推导出了群  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  的子群的简单表示和不变因子分解, 其中,  $m$  和  $n$  是任意正整数, 并且得到了子群总数、具有给定不变因子分解的子群

数以及给定阶子群数的显式公式。

另外, 除了群这个代数结构之外, 其他代数结构, 如环、模、域是否也具有对应的 Goursat 引理? Anderson 等<sup>[4]</sup> 给出环上的 Goursat 引理, 证明了构造两个环的直积的子环与理想的等价条件, 同时也给出了两个含幺环的直积的理想形式, 这为推广到有限多个含幺环的直积的理想形式提供了思路。Meng 等<sup>[5]</sup> 给出了  $R$  模上的 Goursat 引理的证明, 并且把 Goursat 引理推广到  $R$  代数上, 同时给出了相应的例子来说明 Goursat 引理的实用性。

对于此引理, 是否能够直接把它推广到  $n$  个群上? 事实上, Bauer 等<sup>[6]</sup> 给出了两个群上的

收稿日期: 2023-08-07; 修回日期: 2023-08-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12031003, 11701111); 广东省自然科学基金资助项目(2016A030310257)

作者简介: 何焕淇(1999—), 男, 硕士研究生. E-mail: 2740930156@qq.com

\*通信作者. E-mail: mfnfdbx@163.com.

引文格式: 何焕淇, 孟凡宁, 赖凯灵. 非对称性 Goursat 引理的推广[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2024, 23(3): 33-43.

Goursat 引理的非对称版本,同时说明了 Goursat 引理的非对称版本对于推广  $n > 2$  的 Goursat 引理的必要性,并通过例子加以说明,即在  $\mathbb{R}$  或者  $\mathbb{Q}$  上维数至少为 2 的 3 个向量空间的直积  $V_1 \times V_2 \times V_3$  的两个三维子空间  $W_1, W_2$  所对应的同构与子空间完全一致,但  $W_1 \neq W_2$ ,这显然违背了初始版本结构的双射对应原则,由此说明用初始版本的 Goursat 引理来推广  $n > 2$  的 Goursat 引理是行不通的,但是通过归纳法的证明以及引入新的符号记法表明是可以把 Goursat 引理推广到有限个群上。通过对此引理的推广, Mbarga<sup>[7]</sup> 给出了 3 个群的直积的子群之间包含的特征。笔者把这个推广应用到其他的代数结构上,得到一些结论。

本文首先介绍了群上的 Goursat 引理的推广,得到了  $Alt(3) \times Alt(3) \times Alt(3)$  的所有子群,进一步考虑具有某种特殊性质的子群与任意子群的积都有对应的 Goursat 分解下的性质。另外,在环上的 Goursat 引理的推广上,给出了计算  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的所有子环的详细过程,以及把环的直积下的理想形式推广到了有限多个,最后得到理想上的 Goursat 引理,并给出了一些应用。

## 1 群上的 Goursat 引理的推广

设  $A_1, A_2$  为两个群,  $G$  是  $A_1 \times A_2$  的子群,在不引起混淆的情况下,本文群的单位元均记为  $e$ 。记

$$\begin{aligned} G_{11} &= \{a \in A_1 \mid (a, e) \in G\}, \\ G_{12} &= \{a \in A_1 \mid \text{存在 } b \in A_2, \text{使得 } (a, b) \in G\}, \\ G_{21} &= \{b \in A_2 \mid (e, b) \in G\}, \\ G_{22} &= \{b \in A_2 \mid \text{存在 } a \in A_1, \text{使得 } (a, b) \in G\}. \end{aligned}$$

**定理 1**<sup>[4]</sup> 设  $A_1, A_2$  为两个群,则

(1) 若  $G$  为  $A_1 \times A_2$  的子群,则  $G_{i1}, G_{i2}$  为  $A_i$  的子群且满足  $G_{i1} \triangleleft G_{i2}, i = 1, 2$ , 而且映射

$$f_G: G_{12}/G_{11} \rightarrow G_{22}/G_{21}, aG_{11} \mapsto bG_{21}$$

为同构映射,其中,  $(a, b) \in G$ 。进一步地,若  $G \triangleleft A_1 \times A_2$ , 则  $G_{i1}, G_{i2} \triangleleft A_i, G_{i2}/G_{i1} \subseteq C(A_i/G_{i1}), i = 1, 2$ , 其中,  $C(A_i/G_{i1})$  为  $A_i/G_{i1}$  的中心集。

(2) 若  $G_{i1}, G_{i2}$  为  $A_i$  的子群且满足  $G_{i1} \triangleleft G_{i2}, i = 1, 2$ , 又  $f: G_{12}/G_{11} \rightarrow G_{22}/G_{21}$  为同构映射,则

$$G = \{(a, b) \in G_{12} \times G_{22} \mid f(aG_{11}) = bG_{21}\}$$

为  $A_1 \times A_2$  的子群。进一步地,若  $G_{i1}, G_{i2} \triangleleft A_i, G_{i2}/G_{i1} \subseteq C(A_i/G_{i1}), i = 1, 2$ , 则  $G \triangleleft A_1 \times A_2$ 。

(3) 上述(1)和(2)是互逆的。

类似地, Bauer 等<sup>[6]</sup> 运用 Goursat 五元组更简单地表达了定理 1, 结论如下:

**定理 2**<sup>[4]</sup> (群上的对称 Goursat 引理) 设  $A_1, A_2$  为两个群,  $G$  是  $A_1 \times A_2$  的子群, 则  $G$  和五元组  $Q_1(G) := \{G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}, \theta\}$  是双射对应的, 其中,  $G_{11} \triangleleft G_{12} \leq A_1, G_{21} \triangleleft G_{22} \leq A_2$ , 映射  $\theta: G_{12}/G_{11} \rightarrow G_{22}/G_{21}, aG_{11} \mapsto bG_{21}, (a, b) \in G$ , 是同构映射。

事实上, 子群  $G$  和五元组  $Q_1(G)$  之间的双射对应首先可以通过子群  $G$  得到五元组  $Q_1(G)$ , 即由映射

$$\begin{aligned} \pi_1: A_1 \times A_2 &\rightarrow A_1, (a, b) \mapsto a, \\ \pi_2: A_1 \times A_2 &\rightarrow A_2, (a, b) \mapsto b, \\ \nu_1: A_1 &\rightarrow A_1 \times A_2, a \mapsto (a, e), \\ \nu_2: A_2 &\rightarrow A_1 \times A_2, b \mapsto (e, b), \end{aligned}$$

得出五元组

$$Q_1(G) = \{G_{12} = \pi_1(G), G_{22} = \pi_2(G),$$

$G_{11} = \nu_1^{-1}(G), G_{21} = \nu_2^{-1}(G), \theta: G_{12}/G_{11} \xrightarrow{\sim} G_{22}/G_{21}\}$ 。其次, 通过五元组  $\{G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}, \theta\}$  可以构造出子群

$$G = \{(a, b) \in G_{12} \times G_{22} \mid \theta(aG_{11}) = bG_{21}\}。$$

**例 1** 取  $S_3 \times S_3$  的正规子群

$$G = \{(a, b) \in S_3 \times S_3 \mid (a, b) \in A_3 \times A_3 \text{ 或 } o(a) = o(b) = 2\},$$

其中,  $S_3$  为三阶对称群,  $A_3$  为三次交错群, 那么正规子群  $G$  和五元组

$$\begin{aligned} Q_1(G) := \{G_{11} = A_3, G_{12} = S_3, G_{21} = A_3, G_{22} = S_3, \\ \theta: S_3/A_3 \xrightarrow{\sim} S_3/A_3\} \end{aligned}$$

是双射对应的。此外易得,  $G \triangleleft S_3 \times S_3$  等价于  $A_3 \triangleleft S_3, S_3/A_3 \subseteq C(S_3/A_3)$ 。

**定理 3**<sup>[6]</sup> (群上的非对称 Goursat 引理) 设  $A_1, A_2$  为两个群, 若  $G$  是  $A_1 \times A_2$  的子群, 则  $G$  和四元组  $Q_2(G) := \{G_{12}, G_{21}, G_{22}, \theta_1\}$  是双射对应的, 其中,  $G_{12} \leq A_1, G_{21} \triangleleft G_{22} \leq A_2$ , 映射  $\theta_1: G_{12} \rightarrow G_{22}/G_{21}$  是满同态。

**例 2** 取  $\langle(12)\rangle \times \langle(12)\rangle$  的子群  $G = \{((1), (1)), ((12), (13))\}$ , 则子群  $G$  和四元组  $Q_2(G) := \{G_{12} = \langle(12)\rangle, G_{21} = \langle(1)\rangle, G_{22} = \langle(13)\rangle, \theta_1: \langle(12)\rangle \rightarrow \langle(13)\rangle/\langle(1)\rangle\}$

是双射对应的, 即通过子群  $G$  可得到

$$G_{12} = \pi_1(G), G_{22} = \pi_2(G), G_{11} = \nu_1^{-1}(G),$$

$$G_{21} = v_2^{-1}(G), \theta_1: G_{12} \rightarrow G_{22}/G_{21}.$$

另一方面,通过四元组

$$\{G_{12} = \langle (12) \rangle, G_{21} = \langle (1) \rangle, G_{22} = \langle (13) \rangle, \theta_1: \langle (12) \rangle \twoheadrightarrow \langle (13) \rangle / \langle (1) \rangle\},$$

可以构造出子群  $G = \{(a, b) \in \langle (12) \rangle \times \langle (13) \rangle \mid \theta_1(a) = b \langle (1) \rangle\}$ .

**注1:**定理2和定理3是相互等价的。事实上,只须证明  $\theta$  与  $\theta_1$  可以相互确定即可。

一方面,  $\theta$  可以确定  $\theta_1$ 。因为  $\varphi: G_{12} \rightarrow G_{12}/G_{11}$  为满同态,且  $\theta: G_{12}/G_{11} \rightarrow G_{22}/G_{21}$  为同构映射,从而有  $\theta_1 := \theta \circ \varphi: G_{12} \rightarrow G_{22}/G_{21}$  为满同态。

另一方面,  $\theta_1$  可以确定  $\theta$ 。由于  $\theta_1: G_{12} \rightarrow G_{22}/G_{21}$  为满同态,根据群同态基本定理可得  $G_{12}/\ker(\theta_1) \cong G_{22}/G_{21}$ 。又因为

$$\begin{aligned} \ker(\theta_1) &= \{a \in G_{12} \mid \theta_1(a) = bG_{21} = G_{21}, (a, b) \in G\} = \\ &= \{a \in G_{12} \mid b \in G_{21}, (a, b) \in G\} = \\ &= \{a \in G_{12} \mid (e, b) \in G, (a, b) \in G\} = \\ &= \{a \in G_{12} \mid (e, b)^{-1} = (e, b^{-1}) \in G, (a, b) \in G\} = \\ &= \{a \in G_{12} \mid (a, e) \in G\} = G_{11}, \end{aligned}$$

从而有  $\theta: G_{12}/G_{11} \xrightarrow{\sim} G_{22}/G_{21}$ 。

**定义1**<sup>[6]</sup> 设  $A_i (1 \leq i \leq n)$  为群,  $G \leq A_1 \times \cdots \times A_n$ 。令  $S \subset \{1, 2, \dots, n\} = \underline{n}, j \in \underline{n} \setminus S$ , 记

$$G(j \mid S) := \{x_j \in A_j \mid \text{存在 } x_i \in A_i, i \neq j, 1 \leq i \leq n, \text{使得 } (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in G, \text{并且若 } i \in S, \text{则 } x_i = e\}.$$

若  $S = \emptyset$ , 则

$$\begin{aligned} \bar{G}_j &:= G(j \mid \emptyset) := \{x_j \in A_j \mid \text{存在 } x_i \in A_i, i \neq j, \\ &1 \leq i \leq n, \text{使得 } (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in G\}. \end{aligned}$$

**注2:**为简便起见,一般忽略集合  $S$  中的括号,如  $G(1 \mid \{2, 3\}) = G(1 \mid 2, 3)$ 。实际上,当  $n = 2$  时,对比定理2来看,

$$\begin{aligned} G(1 \mid \emptyset) &= \bar{G}_1 = G_{12}, \\ G(2 \mid \emptyset) &= \bar{G}_2 = G_{22}, \\ G(2 \mid 1) &= G_{21}. \end{aligned}$$

**引理1**<sup>[6]</sup> (群上的非对称 Goursat 引理,  $n \geq 2$ ) 设  $A_j (1 \leq j \leq n)$  是群,  $G \leq A_1 \times \cdots \times A_n$ , 则  $G$  和  $(3n - 2)$  元组

$$Q_n(G) := \{\bar{G}_1, \bar{G}_2, G(2 \mid 1), \theta_1, \dots, \bar{G}_n, G(n \mid 1, \dots, n-1), \theta_{n-1}\}$$

是双射对应的,其中,  $G(i+1 \mid 1, \dots, i) \triangleleft \bar{G}_{i+1} \leq A_{i+1}$ , 并且映射  $\theta_i: A_i \rightarrow G_{i+1}/G(i+1 \mid 1, \dots, i)$  是满同态,其中,  $A_i \leq A_1 \times \cdots \times A_i (1 \leq i \leq n-1)$  是递

归定义的,即  $A_1 := \bar{G}_1$ ,

$$A_{i+1} := F(\{A_i, \bar{G}_{i+1}, G(i+1 \mid 1, \dots, i), \theta_i\}) \leq (A_1 \times \cdots \times A_i) \times A_{i+1},$$

且

$$F(\{A_i, \bar{G}_{i+1}, G(i+1 \mid 1, \dots, i), \theta_i\}) := p_i^{-1}(\psi_{\theta_i}),$$

其中,  $p_i: A_i \times \bar{G}_{i+1} \rightarrow A_i \times (\bar{G}_{i+1}/G(i+1 \mid 1, \dots, i))$  为自然满射,  $\psi_{\theta_i} \subseteq A_i \times (\bar{G}_{i+1}/G(i+1 \mid 1, \dots, i))$  为  $\theta_i$  的图。

根据引理1(见文献[6]中定理3.2)的证明过程,可知  $A_i = \prod_i(G) (1 \leq i \leq n-1)$ , 其中,映射  $\prod_i: A_1 \times \cdots \times A_n \twoheadrightarrow A_1 \times \cdots \times A_i$ 。

**例3** 求  $Alt(3) \times Alt(3) \times Alt(3)$  的所有子群,其中,  $Alt(3)$  为三次交错群。

(1)  $Alt(3)$  的子群只有  $\langle (1) \rangle$ ,  $Alt(3) = \langle (123) \rangle$ , 同时它们也是  $Alt(3)$  的正规子群。

(2) 找出所有的商群  $H/N$ , 其中,  $N \triangleleft H \leq Alt(3)$ , 并对其阶数进行分类,从而构造同构。由商群的阶可得

(a)  $|H/N| = 1: \langle (1) \rangle / \langle (1) \rangle, Alt(3) / Alt(3);$

(b)  $|H/N| = 3: Alt(3) / \langle (1) \rangle.$

(3) 根据 Goursat 引理,可得  $Alt(3) \times Alt(3)$  的子群共有6个。

在(2)中(a)情形下,商群的阶均为1,所以共有4个映射均为单位映射,从而只有4个同构,分别为

$$\begin{aligned} f_1 &: \langle (1) \rangle / \langle (1) \rangle \rightarrow \langle (1) \rangle / \langle (1) \rangle, \\ f_2 &: \langle (1) \rangle / \langle (1) \rangle \rightarrow Alt(3) / Alt(3), \\ f_3 &: Alt(3) / Alt(3) \rightarrow \langle (1) \rangle / \langle (1) \rangle, \\ f_4 &: Alt(3) / Alt(3) \rightarrow Alt(3) / Alt(3). \end{aligned}$$

这样共得到4个子群,分别为

$$G_{11} = \{(a, b) \in \langle (1) \rangle \times \langle (1) \rangle \mid f_1(a \langle (1) \rangle) = b \langle (1) \rangle\} = \langle (1) \rangle \times \langle (1) \rangle;$$

$$G_{12} = \{(a, b) \in \langle (1) \rangle \times Alt(3) \mid f_2(a \langle (1) \rangle) = b Alt(3)\} = \langle (1) \rangle \times Alt(3);$$

$$G_{13} = \{(a, b) \in Alt(3) \times \langle (1) \rangle \mid f_3(a Alt(3)) = b \langle (1) \rangle\} = Alt(3) \times \langle (1) \rangle;$$

$$G_{14} = \{(a, b) \in Alt(3) \times Alt(3) \mid f_4(a Alt(3)) = b Alt(3)\} = Alt(3) \times Alt(3).$$

在(2)中(b)情形下,商群的阶均为3,映射  $f_5: Alt(3) / \langle (1) \rangle \rightarrow Alt(3) / \langle (1) \rangle$  能够得出2个同构,从而得出2个子群,分别为

$$G_{15} = \{(a, b) \in Alt(3) \times Alt(3) \mid f_5(a\langle(1)\rangle) = b\langle(1)\rangle\} = \{((1), (1)), ((123), (123)), ((132), (132))\};$$

$$G_{16} = \{(a, b) \in Alt(3) \times Alt(3) \mid f_5(a\langle(1)\rangle) = b\langle(1)\rangle\} = \{((1), (1)), ((123), (132)), ((132), (123))\}.$$

因而,  $Alt(3) \times Alt(3)$  的子群有 6 个, 分别为  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{14}$ ,  $G_{15}$  和  $G_{16}$ 。根据定理 1 可知, 这 6 个子群均为  $Alt(3) \times Alt(3)$  的正规子群。

(4) 找出所有的商群  $H_1/N_1$ , 其中,  $N_1 \triangleleft H_1 \leq Alt(3) \times Alt(3)$ , 并对其阶数进行分类, 从而构造同构。由商群的阶可得

$$(a) \mid H_1/N_1 \mid = 1: G_{11}/G_{11}, G_{12}/G_{12}, G_{13}/G_{13}, G_{14}/G_{14}, G_{15}/G_{15}, G_{16}/G_{16};$$

$$(b) \mid H_1/N_1 \mid = 3: G_{12}/G_{11}, G_{13}/G_{11}, G_{15}/G_{11}, G_{16}/G_{11}, G_{14}/G_{12}, G_{14}/G_{13}, G_{14}/G_{15}, G_{14}/G_{16};$$

$$(c) \mid H_1/N_1 \mid = 9: G_{14}/G_{11}.$$

(5) 根据 Goursat 引理, 可得  $Alt(3) \times Alt(3) \times Alt(3)$  的子群共有 28 个。

在(4)中(a)情形下, 商群的阶均为 1, 所以共有 12 个映射均为单位映射, 从而只有 12 个同构, 分别为

$$\begin{aligned} g_1: G_{11}/G_{11} &\rightarrow \langle(1)\rangle/\langle(1)\rangle, \\ g_2: G_{12}/G_{12} &\rightarrow \langle(1)\rangle/\langle(1)\rangle, \\ g_3: G_{13}/G_{13} &\rightarrow \langle(1)\rangle/\langle(1)\rangle, \\ g_4: G_{14}/G_{14} &\rightarrow \langle(1)\rangle/\langle(1)\rangle, \\ g_5: G_{15}/G_{15} &\rightarrow \langle(1)\rangle/\langle(1)\rangle, \\ g_6: G_{16}/G_{16} &\rightarrow \langle(1)\rangle/\langle(1)\rangle, \\ g_7: G_{11}/G_{11} &\rightarrow Alt(3)/Alt(3), \\ g_8: G_{12}/G_{12} &\rightarrow Alt(3)/Alt(3), \\ g_9: G_{13}/G_{13} &\rightarrow Alt(3)/Alt(3), \\ g_{10}: G_{14}/G_{14} &\rightarrow Alt(3)/Alt(3), \\ g_{11}: G_{15}/G_{15} &\rightarrow Alt(3)/Alt(3), \\ g_{12}: G_{16}/G_{16} &\rightarrow Alt(3)/Alt(3). \end{aligned}$$

这样共得到 12 个子群, 分别为

$$G_{1,1} = \{(a, b, c) \in G_{11} \times \langle(1)\rangle \mid g_1((a, b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = G_{11} \times \langle(1)\rangle;$$

$$G_{1,2} = \{(a, b, c) \in G_{12} \times \langle(1)\rangle \mid g_2((a, b)G_{12}) = c\langle(1)\rangle\} = G_{12} \times \langle(1)\rangle;$$

$$G_{1,3} = \{(a, b, c) \in G_{13} \times \langle(1)\rangle \mid g_3((a, b)G_{13}) = c\langle(1)\rangle\} = G_{13} \times \langle(1)\rangle;$$

$$G_{1,4} = \{(a, b, c) \in G_{14} \times \langle(1)\rangle \mid g_4((a, b)G_{14}) =$$

$$c\langle(1)\rangle\} = G_{14} \times \langle(1)\rangle;$$

$$G_{1,5} = \{(a, b, c) \in G_{15} \times \langle(1)\rangle \mid g_5((a, b)G_{15}) = c\langle(1)\rangle\} = G_{15} \times \langle(1)\rangle;$$

$$G_{1,6} = \{(a, b, c) \in G_{16} \times \langle(1)\rangle \mid g_6((a, b)G_{16}) = c\langle(1)\rangle\} = G_{16} \times \langle(1)\rangle;$$

$$G_{1,7} = \{(a, b, c) \in G_{11} \times Alt(3) \mid g_7((a, b)G_{11}) = cAlt(3)\} = G_{11} \times Alt(3);$$

$$G_{1,8} = \{(a, b, c) \in G_{12} \times Alt(3) \mid g_8((a, b)G_{12}) = cAlt(3)\} = G_{12} \times Alt(3);$$

$$G_{1,9} = \{(a, b, c) \in G_{13} \times Alt(3) \mid g_9((a, b)G_{13}) = cAlt(3)\} = G_{13} \times Alt(3);$$

$$G_{1,10} = \{(a, b, c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid g_{10}((a, b)G_{14}) = cAlt(3)\} = G_{14} \times Alt(3);$$

$$G_{1,11} = \{(a, b, c) \in G_{15} \times Alt(3) \mid g_{11}((a, b)G_{15}) = cAlt(3)\} = G_{15} \times Alt(3);$$

$$G_{1,12} = \{(a, b, c) \in G_{16} \times Alt(3) \mid g_{12}((a, b)G_{16}) = cAlt(3)\} = G_{16} \times Alt(3).$$

在(4)中(b)情形下, 商群的阶均为 3, 映射有 8 个, 分别为

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1: G_{12}/G_{11} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_2: G_{13}/G_{11} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_3: G_{15}/G_{11} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_4: G_{16}/G_{11} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_5: G_{14}/G_{12} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_6: G_{14}/G_{13} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_7: G_{14}/G_{15} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle, \\ \tilde{g}_8: G_{14}/G_{16} &\rightarrow Alt(3)/\langle(1)\rangle. \end{aligned}$$

记单位元  $e = ((1), (1), (1))$ , 根据同构的定义, 这 8 个映射可以产生 16 个同构, 所以有 16 个子群, 分别为

$$G_{1,13} = \{(a, b, c) \in G_{12} \times Alt(3) \mid \tilde{g}_1((a, b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((1), (123), (123)), ((1), (132), (132))\};$$

$$G_{1,14} = \{(a, b, c) \in G_{12} \times Alt(3) \mid \tilde{g}_1((a, b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((1), (123), (132)), ((1), (132), (123))\};$$

$$G_{1,15} = \{(a, b, c) \in G_{13} \times Alt(3) \mid \tilde{g}_2((a, b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (1), (123)), ((132), (1), (132))\};$$

$$G_{1,16} = \{(a, b, c) \in G_{13} \times Alt(3) \mid \tilde{g}_2((a, b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (1), (132)), ((132), (1), (123))\};$$

$$G_{1,17} = \{(a,b,c) \in G_{15} \times Alt(3) \mid \bar{g}_3((a,b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (123), (123)), ((132), (132), (132))\};$$

$$G_{1,18} = \{(a,b,c) \in G_{15} \times Alt(3) \mid \bar{g}_3((a,b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (123), (132)), ((132), (132), (123))\};$$

$$G_{1,19} = \{(a,b,c) \in G_{16} \times Alt(3) \mid \bar{g}_4((a,b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (132), (123)), ((132), (123), (132))\};$$

$$G_{1,20} = \{(a,b,c) \in G_{16} \times Alt(3) \mid \bar{g}_4((a,b)G_{11}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (132), (132)), ((132), (123), (123))\};$$

$$G_{1,21} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_5((a,b)G_{12}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((1), (123), (1)), ((1), (132), (1)), ((123), (1), (123)), ((123), (123), (123)), ((123), (132), (123)), ((132), (1), (132)), ((132), (123), (132)), ((132), (132), (132))\};$$

$$G_{1,22} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_5((a,b)G_{12}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((1), (123), (1)), ((1), (132), (1)), ((123), (1), (132)), ((123), (123), (132)), ((123), (132), (132)), ((132), (1), (123)), ((132), (123), (123)), ((132), (132), (123))\};$$

$$G_{1,23} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_6((a,b)G_{13}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (1), (1)), ((132), (1), (1)), ((1), (123), (123)), ((123), (123), (123)), ((132), (123), (123)), ((1), (132), (132)), ((123), (132), (132)), ((132), (132), (132))\};$$

$$G_{1,24} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_6((a,b)G_{13}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (1), (1)), ((132), (1), (1)), ((1), (123), (132)), ((123), (123), (132)), ((132), (123), (132)), ((1), (132), (123)), ((123), (132), (123)), ((132), (132), (123))\};$$

$$G_{1,25} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_7((a,b)G_{15}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (123), (1)), ((132), (132), (1)), ((123), (1), (123)), ((1), (132), (123)), ((132), (123), (123)), ((132), (1), (132)), ((1), (123), (132)), ((123), (132), (132))\};$$

$$G_{1,26} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_7((a,b)G_{15}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (123), (1)), ((132), (132), (1)), ((123), (1), (132)), ((1), (132), (132)), ((132), (123), (132)), ((132), (1), (123)), ((1), (123), (123)), ((123), (132), (123))\};$$

$$G_{1,27} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_8((a,b)G_{16}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (132), (1)), ((132), (123), (1)), ((123), (1), (123)), ((1), (123), (123)), ((132), (132), (123)), ((132), (1), (132)), ((1), (132), (132)), ((123), (123), (132))\};$$

$$G_{1,28} = \{(a,b,c) \in G_{14} \times Alt(3) \mid \bar{g}_8((a,b)G_{16}) = c\langle(1)\rangle\} = \{e, ((123), (132), (1)), ((132), (123), (1)), ((123), (1), (132)), ((1), (123), (132)), ((132), (132), (132)), ((132), (1), (123)), ((1), (132), (123)), ((123), (123), (123))\}。$$

由于在(4)中(c)情形下,商群的阶为9,没有对应的商群同阶,无法构造出同构映射。

总之,根据 Goursat 引理得出  $Alt(3) \times Alt(3)$  有6个子群,  $Alt(3) \times Alt(3) \times Alt(3)$  有28个子群。

**定义 2**<sup>[6]</sup> 对于引理 1 中一个子群  $G$  所对应的  $(3n-2)$  元组  $Q_n(G)$  称为子群  $G$  的 Goursat 分解。

在定理 1 中,当子群  $G$  为  $A_1 \times A_2$  的正规子群时,可以得到  $G_{i1}, G_{i2} \triangleleft A_i, G_{i2}/G_{i1} \subseteq C(A_i/G_{i1}), i = 1, 2$ , 其中,  $C(A_i/G_{i1})$  为  $A_i/G_{i1}$  的中心集。同样地,在  $n > 2$  的情况下,若  $G \triangleleft A_1 \times \cdots \times A_n$ , 也有类似的结果。

**引理 2**<sup>[7]</sup> (正规子群上的 Goursat 引理,  $n \geq 2$ ) 令  $G \triangleleft A_1 \times \cdots \times A_n$ , 且  $G$  具有对应的 Goursat 分解

$$Q_n(G) := \{\bar{G}_1, \bar{G}_2, G(2 \mid 1), \theta_1, \dots, \bar{G}_n, G(n \mid 1, \dots, n-1), \theta_{n-1}\}。$$

若  $G \triangleleft A_1 \times \cdots \times A_n$ , 则  $\bar{G}_i \triangleleft A_i$ , 且  $\bar{G}_i/G(i \mid 1, \dots, i-1) \subseteq C(A_i/G(i \mid 1, \dots, i-1))$ , 其中,  $C(A_i/G(i \mid 1, \dots, i-1))$  为  $A_i/G(i \mid 1, \dots, i-1)$  的中心集。

**定理 4** 对于  $A_1 \times \cdots \times A_n$  的任意子群  $G$ , 若存在  $A_1 \times \cdots \times A_n$  的一个子群  $K$ , 使得  $KG$  具有对应的 Goursat 分解

$$Q_n(KG) := \{(\overline{KG})_1, (\overline{KG})_2, (KG)(2 \mid 1),$$

$\gamma_1, \dots, \overline{(KG)}_n, (KG)(n | 1, \dots, n-1), \gamma_{n-1} \}$ ,  
 则对任意  $a_i \in A_i (1 \leq i \leq n)$ ,

$$\bar{K}_i \leq N_{A_i}(K(i | 1, \dots, i-1) \langle a_i \rangle),$$

其中,  $N_{A_i}(K(i | 1, \dots, i-1) \langle a_i \rangle)$  为  $K(i | 1, \dots, i-1) \langle a_i \rangle$  在  $A_i$  中的正规化子。

**证明** 若  $KG$  都具有对应的 Goursat 分解  $Q_n(KG)$ , 则对任意  $G \leq A_1 \times \dots \times A_n, KG \leq A_1 \times \dots \times A_n$ 。因而

$$KG = (KG)^{-1} = G^{-1}K^{-1} = GK_0.$$

不失一般性, 令  $i=2$ , 对任意  $a_2 \in A_2, y_2 \in \bar{K}_2$ , 有

存在  $y_j \in A_j, j \neq 2, 1 \leq j \leq n, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K_0$ 。

因为  $A_1 \times \dots \times A_n$  的任意子群  $G$ , 有  $KG = GK_0$ 。取  $G = \langle (e, a_2, e, \dots, e) \rangle$ , 则

$$K \langle (e, a_2, e, \dots, e) \rangle = \langle (e, a_2, e, \dots, e) \rangle K_0.$$

从而, 对任意  $l \in \mathbb{Z}$ , 存在  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in K, m \in \mathbb{Z}$ , 使得

$$(z_1, z_2, \dots, z_n)(e, a_2^m, e, \dots, e) = (e, a_2^l, e, \dots, e)(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

因而,  $z_j = y_j, j \neq 2$ 。进一步可得,

$$(y_1, \dots, y_n)^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^{-1}(y_1, z_2, \dots, y_n) = (e, y_2^{-1}z_2, \dots, e) \in K_0.$$

所以,  $y_2^{-1}z_2 \in K(2 | 1)$ 。这样, 存在  $x_0 \in K(2 | 1)$ , 使得  $x_0 = y_2^{-1}z_2$ , 即  $z_2 = y_2x_0$ 。根据  $z_2a_2^m = a_2^l y_2$  得

$$y_2^{-1}a_2^l y_2 = x_0 a_2^m \in K(2 | 1) \langle a_2 \rangle.$$

因为  $K(2 | 1) \triangleleft \bar{K}_2$ , 所以对任意  $y_2 \in \bar{K}_2$ , 有  $y_2 K(2 | 1) y_2^{-1} = K(2 | 1)$ , 从而得

$$y_2 K(2 | 1) \langle a_2 \rangle y_2^{-1} = K(2 | 1) y_2 \langle a_2 \rangle y_2^{-1}.$$

另外, 对任意  $x \in K(2 | 1), l \in \mathbb{Z}$ , 存在  $x_0 \in K(2 | 1), m \in \mathbb{Z}$ , 使得

$$x y_2 a_2^l y_2^{-1} = x x_0 a_2^m \in K(2 | 1) \langle a_2 \rangle.$$

这样

$$y_2 K(2 | 1) \langle a_2 \rangle y_2^{-1} \subseteq K(2 | 1) \langle a_2 \rangle.$$

又因为  $y_2 K(2 | 1) = K(2 | 1) y_2$ , 所以对任意  $x \in K(2 | 1)$ , 存在  $x_1 \in K(2 | 1)$ , 使得  $x y_2 = y_2 x_1$ 。因此,

$$x a_2^l = x y_2 x_0 a_2^m y_2^{-1} = y_2 x_1 x_0 a_2^m y_2^{-1} = y_2 (x_1 x_0) a_2^m y_2^{-1} \in y_2 K(2 | 1) \langle a_2 \rangle y_2^{-1}.$$

所以,

$$K(2 | 1) \langle a_2 \rangle \subseteq y_2 K(2 | 1) \langle a_2 \rangle y_2^{-1}.$$

进一步有

$$y_2 K(2 | 1) \langle a_2 \rangle y_2^{-1} = K(2 | 1) \langle a_2 \rangle, \forall y_2 \in \bar{K}_2.$$

又  $\bar{K}_2, N_{A_2}(K(2 | 1) \langle a_2 \rangle)$  为  $A_2$  的子群, 所以,  $\bar{K}_2 \leq N_{A_2}(K(2 | 1) \langle a_2 \rangle)$ 。

对于  $i \neq 2$  的情形, 不失一般性, 同理可得。证毕。

**定理 5** 假设  $G \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ , 且  $G$  具有对应的 Goursat 分解  $Q_n(G)$ 。若  $G \triangleleft A_1 \times \dots \times A_n$ , 那么

$\prod_i (G) \triangleleft A_1 \times \dots \times A_i (1 \leq i \leq n)$ , 并且  $\ker(\theta_{n-1}) \triangleleft A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ , 其中, 映射  $\prod_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \times \dots \times A_i (1 \leq i \leq n)$ 。

**证明** 由于  $\prod_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \times \dots \times A_i (1 \leq i \leq n)$  为满射, 则对任意  $\bar{a} \in A_1 \times \dots \times A_i$ , 存在  $a \in A_1 \times \dots \times A_n$ , 使得  $\prod_i(a) = \bar{a}$ 。从而对任意  $\bar{g} \in \prod_i(G)$ , 存在  $g \in A_1 \times \dots \times A_n$ , 使得  $\prod_i(g) = \bar{g}$ 。由于  $G \triangleleft A_1 \times \dots \times A_n$ , 故  $a^{-1}ga \in G$ 。又因为

$\prod_i$  为同态映射, 因而  $(\bar{a})^{-1}\bar{g}\bar{a} = \prod_i(a^{-1}ga) \in \prod_i(G)$ , 这样

$$\prod_i(G) \triangleleft A_1 \times \dots \times A_i, 1 \leq i \leq n.$$

下证  $\ker(\theta_{n-1}) \triangleleft A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ 。因为  $\theta_{n-1}: \Lambda_{n-1} \rightarrow \bar{G}_n/G(n | 1, \dots, n-1)$ , 根据引理 1 的证明, 可知  $\Lambda_{n-1} = \prod_{n-1}(G)$ , 这样  $\ker(\theta_{n-1}) = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \prod_{n-1}(G) \mid (a_1, \dots, a_{n-1}, e) \in G, a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ 。

另一方面, 对任意  $k = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \ker(\theta_{n-1})$ , 有  $(a_1, \dots, a_{n-1}, e) \in G$ 。因为  $G \triangleleft A_1 \times \dots \times A_n$ , 所以, 对任意  $c = (c_1, \dots, c_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ , 有

$c^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, e)c = (c_1^{-1}a_1c_1, \dots, c_n^{-1}a_{n-1}c_n, e) \in G$ 。这样, 对任意  $(c_1, \dots, c_{n-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ , 有

$$(c_1, \dots, c_{n-1})^{-1}k(c_1, \dots, c_{n-1}) = (c_1^{-1}a_1c_1, \dots, c_n^{-1}a_{n-1}c_n) \in \ker(\theta_{n-1}),$$

从而  $\ker(\theta_{n-1}) \triangleleft A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ 。

## 2 环上的 Goursat 引理的推广

**引理 3** 设  $R_i (1 \leq i \leq n)$  为含么环, 那么  $R_1 \times \dots \times R_n$  的每一个右理想(左理想, 双边理想)都有

形式  $I_1 \times \cdots \times I_n$ , 其中,  $I_i (1 \leq i \leq n)$  为  $R_i$  的右理想 (左理想, 双边理想)。

**证明** 假设  $I$  为  $R_1 \times \cdots \times R_n$  的右理想, 令

$$I_i = \{a_i \in R_i \mid (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \in I, a_j = 0, j \neq i, 1 \leq j \leq n\},$$

则对任意  $a_i \in I_i$ , 有  $(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \in I, a_j = 0, j \neq i, 1 \leq j \leq n$ 。从而对任意  $(r_1, \cdots, r_i, \cdots, r_n) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ , 有

$$(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)(r_1, \cdots, r_i, \cdots, r_n) \in I,$$

即

$$(a_1 r_1, \cdots, a_i r_i, \cdots, a_n r_n) \in I, a_j r_j = 0, j \neq i, 1 \leq j \leq n.$$

因而  $a_i r_i \in I_i$ , 即  $I_i (1 \leq i \leq n)$  为  $R_i$  的右理想。

另一方面, 令  $(a_1, \cdots, a_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n$ , 即  $a_i \in I_i, 1 \leq i \leq n$ , 则

$$\{(a_1, 0, \cdots, 0), (0, a_2, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, a_n)\} \subset I.$$

从而

$$(a_1, 0, \cdots, 0) + (0, a_2, \cdots, 0) + \cdots + (0, 0, \cdots, a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in I,$$

这样  $I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq I$ 。

反之, 若  $(a_1, \cdots, a_n) \in I$ , 由于  $I$  为  $R_1 \times \cdots \times R_n$  的右理想, 则对任意  $(r_1, \cdots, r_n) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ , 有

$$(a_1, \cdots, a_n)(r_1, \cdots, r_n) \in I.$$

取  $(r_1, r_2, \cdots, r_n) = (1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$ , 则  $a_i \in I_i, 1 \leq i \leq n$ 。因而  $(a_1, \cdots, a_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n$ , 即  $I \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ , 这样  $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ 。

**定义 3**<sup>[4]</sup> 一个环  $R$  称为右  $e$  环, 如果对任意  $r \in R$ , 存在一个依赖于  $r$  的元素  $e_r \in R$ , 使得  $re_r = r$ 。一个环  $R$  称为左  $e$  环, 如果对任意  $s \in R$ , 存在一个依赖于  $s$  的元素  $e_s \in R$ , 使得  $e_s s = r$ 。

**推论 1** 环  $R$  是一个右  $e$  环当且仅当对  $R$  的任意右理想  $I$ , 有  $IR = I$ 。

**证明** 若  $R$  为右  $e$  环, 则对任意  $r \in R$ , 存在  $e_r \in R$ , 使得  $re_r = r$ 。从而对任意  $i \in I$ , 存在  $e_i \in R$ , 使得  $ie_i = i$ 。又因为  $I$  为右理想, 所以对任意  $r \in R, i \in I$ , 有  $ir \in I$ 。由于  $IR = \{\sum_{k=1}^m i_k r_k \mid i_k \in I, r_k \in R, m \in \mathbb{Z}^+\}$ , 有  $IR \subseteq I$ 。另外, 对任意  $i \in I$ , 有  $i = ie_i \in IR$ , 因此  $I \subseteq IR$ 。这样  $IR = I$ 。

反之, 若对  $R$  的任意右理想  $I$ , 有  $IR = I$ 。此时, 取  $I = (r), r \in R$ , 其中,  $(r)$  为由  $r$  生成的主右理想, 则  $(r)R = (r)$ 。因  $(r) = \{ra + nr \mid a \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ , 则

$$(r)R = \{\sum_{k=1}^m (ra_k + n_k r)b_k \mid a_k, b_k \in R, n_k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+\} = \{\sum_{k=1}^m (ra_k b_k + rn_k b_k) \mid a_k, b_k \in R, n_k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+\} = \{r \sum_{k=1}^m (c_k + n_k b_k) \mid b_k, c_k \in R, n_k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+\}.$$

这样, 对任意  $r \in (r) = (r)R$ , 显然存在  $e_r = \sum_{k=1}^m (c_k + n_k b_k) \in R$ , 使得  $re_r = r$ 。因而, 环  $R$  为右  $e$  环。

**引理 4**<sup>[4]</sup> 对于环  $R$ , 下列说法等价:

(1)  $R$  是左  $e$  环;

(2) 对于任意的环  $S, R \times S$  的每一个左理想具有形式  $I = I_1 \times I_2$ , 其中,  $I_1$  为  $R$  的左理想,  $I_2$  为  $S$  的左理想。

**定理 6** 对于环  $R_i (1 \leq i \leq n)$ , 下列说法等价:

(1)  $R_i (1 \leq i \leq n)$  是右  $e$  环;

(2) 对于任意的环  $S, S \times R_1 \times \cdots \times R_n$  的每一个右理想具有形式  $I = I_s \times I_1 \times \cdots \times I_n$ , 其中,  $I_s$  为  $S$  的右理想,  $I_i$  为  $R_i (1 \leq i \leq n)$  的右理想。

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2): 首先,  $R_1 \times \cdots \times R_n$  仍为一个右  $e$  环。事实上, 因为  $R_i (1 \leq i \leq n)$  是右  $e$  环, 故对任意  $r_i \in R_i$ , 存在  $e_{r_i} \in R_i$ , 使得  $r_i e_{r_i} = r_i$ 。这样, 对任意  $(r_1, \cdots, r_n) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ , 存在  $(e_{r_1}, \cdots, e_{r_n}) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ , 使得

$$(r_1, \cdots, r_n)(e_{r_1}, \cdots, e_{r_n}) = (r_1, \cdots, r_n).$$

因此,  $R_1 \times \cdots \times R_n$  仍为一个右  $e$  环。其次, 令  $I$  为  $S \times R_1 \times \cdots \times R_n$  的右理想, 由

$$(0, e_{r_1}, \cdots, 0), (0, 0, e_{r_2}, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, e_{r_n}) \in S \times R_1 \times \cdots \times R_n,$$

知道, 对任意  $(s, a_1, \cdots, a_n) \in I, s \in S, a_i \in R_i$ , 有

$$(0, a_1, \cdots, 0), (0, 0, a_2, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, a_n) \in I.$$

从而

$$(s, a_1, \cdots, a_n) - (0, a_1, \cdots, 0) - \cdots - (0, 0, \cdots, a_n) = (s, 0, \cdots, 0) \in I.$$

根据引理 3 的证明可得,  $I = I_s \times I_1 \times \cdots \times I_n$ , 其中,  $I_s = \{s \in S \mid (s, 0, \cdots, 0) \in I\}$  为  $S$  的右理想,

$$I_i = \{a_i \in R_i \mid (0, a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \in I, a_j = 0, j \neq i, 1 \leq j \leq n\}$$

为  $R_i (1 \leq i \leq n)$  的右理想。

(2)  $\Rightarrow$  (1): 令  $S = R_1 = R_i (2 \leq i \leq n)$ , 虽然这里有  $n+1$  个  $R_1$  直积, 不失一般性, 这里只需考虑  $n$  个  $R_1$  直积即可。对于任意  $a_1 \in R_1$ , 由  $(a_1, \cdots, a_1)$  生成的主右理想为

$$((a_1, \dots, a_1))_r = \{(a_1, \dots, a_1)(r_{11}, \dots, r_{1n}) + m(a_1, \dots, a_1) \mid r_{1i} \in R_1 (1 \leq i \leq n), m \in \mathbb{Z}\}.$$

由(2)知,  $((a_1, \dots, a_1))_r = I_1 \times \dots \times I_n$ , 其中,  $I_i$  为  $R_1$  的右理想。显然,  $a_1 \in I_i$ , 从而  $(a_1)_r \subseteq I_i$ 。这样  $(a_1)_r \times \dots \times (a_1)_r \subseteq I_1 \times \dots \times I_n = ((a_1, \dots, a_1))_r$ 。又因为  $(a_1)_r \times \dots \times (a_1)_r \supseteq ((a_1, \dots, a_1))_r$ , 因而

$$(a_1)_r \times \dots \times (a_1)_r = ((a_1, \dots, a_1))_r.$$

另外, 由于  $a_1 \in (a_1)_r, 0 \in (a_1)_r$ , 故  $(a_1, 0, \dots, 0) \in ((a_1, \dots, a_1))_r$ , 即存在  $r_{1i} \in R_1 (1 \leq i \leq n), m \in \mathbb{Z}$ , 使得

$$(a_1, 0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_1)(r_{11}, \dots, r_{1n}) + m(a_1, \dots, a_1),$$

即

$$\begin{cases} a_1 = a_1 r_{11} + m a_1, \\ 0 = a_1 r_{12} + m a_1, \\ \dots\dots\dots \\ 0 = a_1 r_{1n} + m a_1. \end{cases}$$

这样

$$a_1 = a_1 r_{11} + m a_1 = a_1 r_{11} - a_1 r_{1n} = a_1 (r_{11} - r_{1n}), \forall a_1 \in R_1.$$

因而,  $R_1$  是右  $e$  环。不失一般性, 可得  $R_i (1 \leq i \leq n)$  是右  $e$  环。

**推论 2** 对于环  $R_i (1 \leq i \leq n)$ , 下列说法等价:

(1)  $R_i (1 \leq i \leq n)$  是左  $e$  环;

(2) 对于任意的环  $S, R_1 \times \dots \times R_n \times S$  的每一个左理想具有形式  $I = I_1 \times \dots \times I_n \times I_s$ , 其中,  $I_s$  为  $S$  的左理想,  $I_i$  为  $R_i (1 \leq i \leq n)$  的左理想。

设  $R_1, R_2$  是两个环, 且  $S$  是  $R_1 \times R_2$  的子环。在不混淆的情况下, 本文所讨论的环的加法单位元均记为 0。记

$$S_{11} = \{a \in R_1 \mid (a, 0) \in S\},$$

$$S_{12} = \{a \in R_1 \mid \text{存在 } b \in R_2, \text{使得 } (a, b) \in S\},$$

$$S_{21} = \{b \in R_2 \mid (0, b) \in S\},$$

$$S_{22} = \{b \in R_2 \mid \text{存在 } a \in R_1, \text{使得 } (a, b) \in S\}.$$

**定理 7<sup>[4]</sup>** (环上的 Goursat 引理) 设  $R_1, R_2$  为两个环,  $S$  是  $R_1 \times R_2$  的子环, 则  $S$  和五元组  $Q_1(S) := \{S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}, f\}$  是双射对应的, 其中,  $S_{1i}, S_{2i}$  为  $R_i$  的子环,  $S_{1i}$  为  $S_{2i}$  的理想,  $i = 1, 2$ , 且映射  $f: S_{12}/S_{11} \rightarrow S_{22}/S_{21}$  是同构映射。进一步地,

(1)  $S$  为  $R_1 \times R_2$  的右理想(左理想, 双边理想);

(2)  $S_{12}R_i \subseteq S_{11} (R_i S_{12} \subseteq S_{11}; S_{22}R_i \subseteq S_{21} \text{ 和 } R_i S_{22} \subseteq$

$S_{21}), i = 1, 2$ 。

此外, (1) 与 (2) 是相互等价的。

**定理 8** (环上的 Goursat 引理的非对称版本)

设  $R_1, R_2$  为两个环,  $S$  是  $R_1 \times R_2$  的子环, 则  $S$  和四元组  $Q_2(S) := \{S_{12}, S_{21}, S_{22}, f_1\}$  是双射对应的, 其中,  $S_{12}$  为  $R_1$  的子环,  $S_{21}, S_{22}$  为  $R_2$  的子环, 且  $S_{21}$  为  $S_{22}$  的理想, 映射  $f_1: S_{12} \rightarrow S_{22}/S_{21}$  是环的满同态。

**证明** 根据定理 3, 可得  $S_{12}$  为  $R_1$  的子群,  $S_{21}, S_{22}$  为  $R_2$  的子群, 并且  $S_{21}$  为  $S_{22}$  的正规子群, 映射  $f_1: S_{12} \rightarrow S_{22}/S_{21}$  是群的满同态, 因此, 对于  $S_{12}, S_{21}, S_{22}$ , 只需证明它们在乘法下封闭即可; 对于映射  $f_1$  同样只需证明其保持乘法运算即可。对任意  $a_1, a_2 \in S_{12}$ , 存在  $b_1, b_2 \in R_2$ , 使得  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in S$ 。由于  $S$  是  $R_1 \times R_2$  的子环, 故

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \in S,$$

其中,  $b_1 b_2 \in R_2$ 。这样,  $a_1 a_2 \in S_{12}$ 。从而  $S_{12}$  为  $R_1$  的子环。同样可得,  $S_{21}, S_{22}$  为  $R_2$  的子环。另外, 对任意  $b \in S_{22}$ , 存在  $a \in R_1$ , 使得  $(a, b) \in S$ , 且对任意  $b' \in S_{21}, (0, b') \in S$ , 有

$$(a, b)(0, b') = (0, bb') \in S,$$

这样  $bb' \in S_{21}$ , 从而有  $S_{21}$  为  $S_{22}$  的理想。另一方面, 假设  $b_1, b_2 \in S_{12}$ , 由于映射  $f_1$  为群的满同态, 则存在  $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in S_{22}/S_{21}$ , 使得  $f_1(b_1) = \bar{b}_1, f_1(b_2) = \bar{b}_2$ 。又  $b_1 b_2 \in S_{12}$ , 根据商环的乘法运算, 有

$$f_1(b_1 b_2) = \overline{b_1 b_2} = \bar{b}_1 \bar{b}_2 = f_1(b_1) f_1(b_2)。$$

从而, 映射  $f_1: S_{12} \rightarrow S_{22}/S_{21}$  是环的满同态。

**定义 4** 设  $R_i (1 \leq i \leq n)$  是环,  $S$  为  $R_1 \times \dots \times R_n$  的子环。令  $E \subset \{1, 2, \dots, n\} = \underline{n}, j \in \underline{n} \setminus E$ , 定义

$$S(j \mid E) := \{x_j \in R_j \mid \text{存在 } x_i \in R_i, i \neq j, 1 \leq i \leq n, \text{使得 } (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in S, \text{并且若 } i \in E, \text{则 } x_i = 0\}。$$

另外, 定义  $\bar{S}_j := S(j \mid \emptyset)$ , 即

$$\bar{S}_j := \{x_j \in R_j \mid \text{存在 } x_i \in R_i, i \neq j, 1 \leq i \leq n, \text{使得 } (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in S\}。$$

**注 3:** 为简便起见, 一般忽略集合  $E$  中的括号, 如  $S(1 \mid \{2, 3\}) = S(1 \mid 2, 3)$ 。实际上, 当  $n = 2$  时, 对比定理 8 来看, 有

$$S(1 \mid \emptyset) = \bar{S}_1 = S_{12}, S(2 \mid \emptyset) = \bar{S}_2 = S_{22}, S(2 \mid 1) = S_{21}。$$

**推论 3** (环上的 Goursat 引理,  $n \geq 2$ ) 设  $R_j (1 \leq j \leq n)$  是环,  $S$  为  $R_1 \times \dots \times R_n$  的子环, 则  $S$  和  $(3n - 2)$  元组

$$Q_n(S) := \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, S(2 | 1), f_1, \dots, \bar{S}_n, S(n | 1, \dots, n-1), f_{n-1}\}$$

是双射对应的,其中,  $S(i+1 | 1, \dots, i)$ ,  $\bar{S}_{i+1}$  为  $R_{i+1}$  的子环,  $S(i+1 | 1, \dots, i)$  为  $\bar{S}_{i+1}$  的理想, 并且映射  $f_i: \Delta_i \rightarrow \bar{S}_{i+1}/S(i+1 | 1, \dots, i)$  是环的满同态, 其中,  $\Delta_i$  为  $R_1 \times \dots \times R_i (1 \leq i \leq n-1)$  的子环, 并且  $\Delta_i$  是递归定义的, 即

$$\Delta_1 := \bar{S}_1,$$

$$\Delta_{i+1} := \Gamma(\{\Delta_i, \bar{S}_{i+1}, S(i+1 | 1, \dots, i), f_i\}) \leq (R_1 \times \dots \times R_i) \times R_{i+1},$$

且

$\Gamma(\{\Delta_i, \bar{S}_{i+1}, S(i+1 | 1, \dots, i), f_i\}) := q_i^{-1}(\varphi_{f_i})$ , 其中,  $q_i: \Delta_i \times \bar{S}_{i+1} \rightarrow \Delta_i \times (\bar{S}_{i+1}/S(i+1 | 1, \dots, i))$  为自然满射,  $\varphi_{f_i} \subseteq \Delta_i \times (\bar{S}_{i+1}/S(i+1 | 1, \dots, i))$  为  $f_i$  的图。

根据引理 1 (文献 [6] 中定理 3.2) 的证明过程, 可知  $\Delta_i = \prod_i (S) (1 \leq i \leq n-1)$ , 其中, 映射  $\prod_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \times \dots \times A_i$ 。

例 4 求  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的所有子环。

(1)  $\mathbb{Z}_2$  的子环只有  $\{[0]\}$ ,  $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ , 同时它们也是  $\mathbb{Z}_2$  的理想。

(2) 找出所有的商环  $H/T$ , 其中,  $H, T$  为  $\mathbb{Z}_2$  的子环,  $T$  为  $H$  的理想, 对其加法阶进行分类, 从而构造同构。根据环的加法阶有

- (a)  $|H/T| = 1: \{[0]\}/\{[0]\}, \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$ ;
- (b)  $|H/T| = 2: \mathbb{Z}_2/\{[0]\}$ 。

(3) 根据环上的 Goursat 引理, 可得  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的子环共有 5 个。

在(2)中(a)情形下, 商环的阶均为 1, 所以共有 4 个映射均为单位映射, 从而只有 4 个同构, 分别为

$$\begin{aligned} f_1: \{[0]\}/\{[0]\} &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ f_2: \{[0]\}/\{[0]\} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2, \\ f_3: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ f_4: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

这样共得到 4 个子环, 分别为

$$\begin{aligned} S_{11} &= \{(a, b) \in \{[0]\} \times \{[0]\} \mid f_1(a + [0]) = b + [0]\} = \{[0]\} \times \{[0]\}; \\ S_{12} &= \{(a, b) \in \{[0]\} \times \mathbb{Z}_2 \mid f_2(a + [0]) = b + \mathbb{Z}_2\} = \{[0]\} \times \mathbb{Z}_2; \\ S_{13} &= \{(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \{[0]\} \mid f_3(a + \mathbb{Z}_2) = b + \end{aligned}$$

$$\{[0]\} = \mathbb{Z}_2 \times \{[0]\};$$

$$S_{14} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \mid f_4(a + \mathbb{Z}_2) = b + \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

在(2)中(b)情形下, 商群的阶均为 2, 映射  $f_5: \mathbb{Z}_2/\{[0]\} \rightarrow \mathbb{Z}_2/\{[0]\}$ , 只能得出 1 个同构, 从而得出 1 个子环

$$S_{15} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \mid f_5(a + \{[0]\}) = b + \{[0]\} = \{([0], [0]), ([1], [1])\}.$$

这样,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的子环有 5 个, 分别为  $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$  和  $S_{15}$ 。根据定理 7 可知,  $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$  为  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的理想, 但  $S_{15}$  不是  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的理想。

(4) 找出所有的商环  $H_1/T_1$ , 其中,  $H_1, T_1$  为  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的子环,  $T_1$  为  $H_1$  的理想。对其加法阶数进行分类, 从而构造同构。环的加法阶有

- (a)  $|H_1/T_1| = 1: S_{11}/S_{11}, S_{12}/S_{12}, S_{13}/S_{13}, S_{14}/S_{14}, S_{15}/S_{15}$ ;
- (b)  $|H_1/T_1| = 2: S_{12}/S_{11}, S_{13}/S_{11}, S_{15}/S_{11}, S_{14}/S_{12}, S_{14}/S_{13}$ ,
- (c)  $|H_1/T_1| = 4: S_{14}/S_{11}$ 。

(5) 根据环上的 Goursat 引理, 可得  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  的子环共有 15 个。

在(4)中(a)情形下, 商群的阶均为 1, 所以共有 10 个映射且均为单位映射, 从而只有 10 个同构, 分别为

$$\begin{aligned} g_1: S_{11}/S_{11} &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ g_2: S_{12}/S_{12} &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ g_3: S_{13}/S_{13} &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ g_4: S_{14}/S_{14} &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ g_5: S_{15}/S_{15} &\rightarrow \{[0]\}/\{[0]\}, \\ g_6: S_{11}/S_{11} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2, \\ g_7: S_{12}/S_{12} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2, \\ g_8: S_{13}/S_{13} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2, \\ g_9: S_{14}/S_{14} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2, \\ g_{10}: S_{15}/S_{15} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

这样共得到 10 个子环, 分别为

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \{(a, b, c) \in S_{11} \times \{[0]\} \mid g_1((a, b) + S_{11}) = c + \{[0]\}\} = S_{11} \times \{[0]\}; \\ S_{1,2} &= \{(a, b, c) \in S_{12} \times \{[0]\} \mid g_2((a, b) + S_{12}) = c + \{[0]\}\} = S_{12} \times \{[0]\}; \\ S_{1,3} &= \{(a, b, c) \in S_{13} \times \{[0]\} \mid g_3((a, b) + S_{13}) = c + \{[0]\}\} = S_{13} \times \{[0]\}; \\ S_{1,4} &= \{(a, b, c) \in S_{14} \times \{[0]\} \mid g_4((a, b) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{14} &= c + \{[0]\} = S_{14} \times \{[0]\}; \\
S_{1,5} &= \{(a, b, c) \in S_{15} \times \{[0]\} \mid g_5((a, b) + S_{15}) = c + \{[0]\}\} = S_{15} \times \{[0]\}; \\
S_{1,6} &= \{(a, b, c) \in S_{11} \times \mathbb{Z}_2 \mid g_6((a, b) + S_{11}) = c + \mathbb{Z}_2\} = S_{11} \times \mathbb{Z}_2; \\
S_{1,7} &= \{(a, b, c) \in S_{12} \times \mathbb{Z}_2 \mid g_7((a, b) + S_{12}) = c + \mathbb{Z}_2\} = S_{12} \times \mathbb{Z}_2; \\
S_{1,8} &= \{(a, b, c) \in S_{13} \times \mathbb{Z}_2 \mid g_8((a, b) + S_{13}) = c + \mathbb{Z}_2\} = S_{13} \times \mathbb{Z}_2; \\
S_{1,9} &= \{(a, b, c) \in S_{14} \times \mathbb{Z}_2 \mid g_9((a, b) + S_{14}) = c + \mathbb{Z}_2\} = S_{14} \times \mathbb{Z}_2; \\
S_{1,10} &= \{(a, b, c) \in S_{15} \times \mathbb{Z}_2 \mid g_{10}((a, b) + S_{15}) = c + \mathbb{Z}_2\} = S_{15} \times \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

在(4)中条件(b)下,商环的阶均为2,映射有5个,分别为

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1: S_{12}/S_{11} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\{[0]\}, \\
\tilde{g}_2: S_{13}/S_{11} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\{[0]\}, \\
\tilde{g}_3: S_{15}/S_{11} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\{[0]\}, \\
\tilde{g}_4: S_{14}/S_{12} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\{[0]\}, \\
\tilde{g}_5: S_{14}/S_{13} &\rightarrow \mathbb{Z}_2/\{[0]\}.
\end{aligned}$$

根据同构的定义,这5个映射可以产生5个同构,所以有5个子环,分别为

$$\begin{aligned}
S_{1,11} &= \{(a, b, c) \in S_{12} \times \mathbb{Z}_2 \mid \tilde{g}_1((a, b) + S_{11}) = c + \{[0]\}\} = \{([0], [0], [0]), ([0], [1], [1])\}; \\
S_{1,12} &= \{(a, b, c) \in S_{13} \times \mathbb{Z}_2 \mid \tilde{g}_2((a, b) + S_{11}) = c + \{[0]\}\} = \{([0], [0], [0]), ([1], [0], [1])\}; \\
S_{1,13} &= \{(a, b, c) \in S_{15} \times \mathbb{Z}_2 \mid \tilde{g}_3((a, b) + S_{11}) = c + \{[0]\}\} = \{([0], [0], [0]), ([1], [1], [1])\}; \\
S_{1,14} &= \{(a, b, c) \in S_{14} \times \mathbb{Z}_2 \mid \tilde{g}_4((a, b) + S_{12}) = c + \{[0]\}\} = \{([0], [0], [0]), ([0], [1], [0]), ([1], [0], [1]), ([1], [1], [1])\}; \\
S_{1,15} &= \{(a, b, c) \in S_{14} \times \mathbb{Z}_2 \mid \tilde{g}_5((a, b) + S_{13}) = c + \{[0]\}\} = \{([0], [0], [0]), ([1], [0], [0]), ([0], [1], [1]), ([1], [1], [1])\}.
\end{aligned}$$

由于在(4)中条件(c)下,商环的阶为4,没有对应的商环同阶,无法构造出同构映射。

综上,根据环上的Goursat引理得出 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 有5个子环, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 有15个子环。

**定义 5**<sup>[6]</sup> 对于推论3中一个子环 $S$ 所对应的

$(3n-2)$ 元组 $Q_n(S)$ 称为子环 $S$ 的Goursat分解。

**定理 9**(理想上的Goursat引理, $n \geq 2$ ) 设 $S$ 为 $R_1 \times \cdots \times R_n$ 的子环,且 $S$ 具有对应的Goursat分解

$$Q_n(S) := \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, S(2 \mid 1), f_1, \dots, \bar{S}_n, S(n \mid 1), \dots, n-1, f_{n-1}\}.$$

若 $S$ 为 $R_1 \times \cdots \times R_n$ 的右理想(或左理想),则 $S(i \mid 1, \dots, i-1), \bar{S}_i$ 为 $R_i$ 的右理想(或左理想),且 $\bar{S}_i R_i \subseteq S(i \mid 1, \dots, i-1)$ (或 $R_i \bar{S}_i \subseteq S(i \mid 1, \dots, i-1)$ )。

**证明** 根据定义可知,对任意 $s_i \in S(i \mid 1, \dots, i-1)$ ,存在 $a_j \in R_j (i+1 \leq j \leq n)$ 使得 $(0, \dots, 0, s_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in S$ ,且对任意 $r_i \in R_i$ ,有 $(0, \dots, r_i, \dots, 0) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ 。因为 $S$ 是 $R_1 \times \cdots \times R_n$ 的右理想,所以

$$(0, \dots, 0, s_i, a_{i+1}, \dots, a_n)(0, \dots, r_i, \dots, 0) = (0, \dots, 0, s_i r_i, 0, \dots, 0) \in S,$$

这样 $s_i r_i \in S(i \mid 1, \dots, i-1)$ ,从而 $S(i \mid 1, \dots, i-1)$ 为 $R_i$ 的右理想。

另外,对任意 $\bar{s}_i \in \bar{S}_i$ ,存在 $a_j \in R_j, j \neq i$ ,使得 $(a_1, \dots, a_{i-1}, \bar{s}_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in S$ ,且对任意 $r_i \in R_i$ ,有 $(0, \dots, r_i, \dots, 0) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ 。由于 $S$ 是 $R_1 \times \cdots \times R_n$ 的右理想,故

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, \bar{s}_i, a_{i+1}, \dots, a_n)(0, \dots, r_i, \dots, 0) = (0, \dots, 0, \bar{s}_i r_i, 0, \dots, 0) \in S,$$

这样 $\bar{s}_i r_i \in \bar{S}_i$ ,从而 $\bar{S}_i$ 为 $R_i$ 的右理想。

下证 $\bar{S}_i R_i \subseteq S(i \mid 1, \dots, i-1)$ 。由于对任意 $\bar{s}_i \in \bar{S}_i$ ,存在 $r_j \in R_j, j \neq i$ ,使得 $(r_1, \dots, \bar{s}_i, \dots, r_n) \in S$ 。由 $S$ 是 $R_1 \times \cdots \times R_n$ 的右理想可得,对任意 $r = (r_1, \dots, r_n) \in R_1 \times \cdots \times R_n, s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ ,有 $sr \in S$ 。又因为对任意 $r_i \in R_i$ ,有 $(0, \dots, r_i, \dots, 0) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ ,从而

$$(r_1, \dots, \bar{s}_i, \dots, r_n)(0, \dots, r_i, \dots, 0) = (0, \dots, \bar{s}_i r_i, \dots, 0) \in S,$$

这样 $\bar{s}_i r_i \in S(i \mid 1, \dots, i-1)$ 。根据引理1可得, $S(i \mid 1, \dots, i-1), \bar{S}_i$ 为 $(R_i, +)$ 的加法子群,因而 $S(i \mid 1, \dots, i-1)$ 对加法封闭。从而, $\bar{S}_i R_i \subseteq S(i \mid 1, \dots, i-1)$ 。

**推论 4**  $R_1 \times \cdots \times R_n$ 的子环 $S$ 可表示成形如 $S_1 \times \cdots \times S_n$ 当且仅当

$$\prod_i (S) = \ker(f_i) = S_1 \times \cdots \times S_i, \bar{S}_{i+1} = S(i+1 \mid 1, \dots, i) = S_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1,$$

其中,  $\ker(f_i), S(i+1 | 1, \dots, i)$  分别为  $\prod_i(S)$ ,  $\bar{S}_{i+1}$  的理想,  $f_i: \prod_i(S) \rightarrow \bar{S}_{i+1}/S(i+1 | 1, \dots, i)$ 。

**例5** 运用定理9和推论4证明引理3。

**证明** 由定理9得, 对于  $R_1 \times \dots \times R_n$  的任意一个右理想  $S$ , 有  $\bar{S}_i R_i \subseteq S(i | 1, \dots, i-1)$ 。由  $R_i (1 \leq i \leq n)$  为含幺环得  $\bar{S}_i \subseteq \bar{S}_i R_i$ , 又因为

$$\bar{S}_i R_i \subseteq S(i | 1, \dots, i-1) \subseteq \bar{S}_i,$$

故  $\bar{S}_i R_i = S(i | 1, \dots, i-1)$ , 从而  $\bar{S}_i \subseteq S(i | 1, \dots, i-1)$ 。因此  $\bar{S}_i = S(i | 1, \dots, i-1)$ 。

另外, 由于映射  $f_i: \Delta_i = \prod_i(S) \rightarrow \bar{S}_{i+1}/S(i+1 | 1, \dots, i)$  是环的满同态, 并且  $\bar{S}_i = S(i | 1, \dots, i-1)$ , 因而映射  $\tilde{f}_i: \prod_i(S)/\ker(f_i) \rightarrow \bar{S}_{i+1}/S(i+1 | 1, \dots, i)$  为平凡同构。这样  $\prod_i(S) = \ker(f_i) (1 \leq i \leq n-1)$ 。由推论4得,  $R_1 \times \dots \times R_n$  的每一个右理想  $S$  都有形式  $I_1 \times \dots \times I_n$ , 其中,  $I_j (1 \leq j \leq n)$  为  $R_j$  的右理想。

**例6** 运用定理9和推论4证明定理6中的

(1)  $\Rightarrow$  (2)。

**证明** 对于任意的环  $T_1$ , 由定理9得, 对  $T_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$  的任意一个右理想  $S$ , 有  $\bar{S}_j R_j \subseteq S(j | 1, \dots, j-1) (2 \leq j \leq n)$ 。因为  $R_j$  为右  $e$  环, 故  $\bar{S}_j \subseteq \bar{S}_j R_j$ 。

又因为

$$\bar{S}_j R_j \subseteq S(j | 1, \dots, j-1) \subseteq \bar{S}_j,$$

故  $\bar{S}_j R_j = S(j | 1, \dots, j-1)$ , 从而  $\bar{S}_j \subseteq S(j | 1, \dots, j-1)$ 。这样

$$\bar{S}_j = S(j | 1, \dots, j-1) (2 \leq j \leq n)。$$

另外, 因为  $f_1: \prod_1(S) = \bar{S}_1 \rightarrow \bar{S}_2/S(2 | 1)$  为满同态, 其中,  $\bar{S}_1$  为  $T_1$  的子环, 并且  $\bar{S}_2 = S(2 | 1)$ , 所以  $\tilde{f}_1: \bar{S}_1/\ker(f_1) \rightarrow \bar{S}_2/S(2 | 1)$  为平凡同构, 从而  $\prod_1(S) = \ker(f_1)$ 。以此类推可得,  $\prod_i(S) = \ker(f_i) (1 \leq i \leq n-1)$ 。根据推论4得,  $T_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$  的每一个右理想  $S$  都有形式  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ , 其中,  $I_i$  为  $T_1$  的右理想,  $I_j (2 \leq j \leq n)$  为  $R_j$  的右理想。

### 参考文献:

- [1] Goursat E. Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace[J]. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1889, 6(3): 9-102.
- [2] Brewster B, Lewis D. A characterization of subgroup containment in direct products[J]. Ricerche Di Matematica, 2012, 61(2): 347-354.
- [3] Tóth L. Subgroups of finite abelian groups having rank two via Goursat's lemma[J]. Tatra Mountains Mathematical Publications, 2015, 59(1): 93-103.
- [4] Anderson D D, Camillo V. Subgroups of direct products of groups, ideals and subrings of direct products of rings, and Goursat's lemma [J]. Contemporary Mathematics, 2009, 480: 1-12.
- [5] Meng F N, Guo J H. On the extensions of Zassenhaus lemma and Goursat's lemma to algebraic structures[J]. Journal of Mathematics, 2022, 2022(1): 1030-1040.
- [6] Bauer K, Sen D, Zvengrowski P. A generalized Goursat lemma [J]. Tatra Mountains Mathematical Publications, 2015, 64: 1-19.
- [7] Mbarga B R A. Some remarks on Goursat lemma[J]. Algebraic Structures and their Applications, 2021, 8(2): 119-129.

【责任编辑:卓祯雨】