第 22 卷　第 6 期
2023 年　12 月

广州大学学报(自然科学版)
Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)

Vol. 22　No. 6
Dec.　2023

文章编号:1671-4229(2023)06-0086-07

半群作用的传递紧

杨　霄，李华海，钟新林
(广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州　510006)

摘　要：文章主要研究了半群作用的动力系统中的传递紧以及它与其他传递性之间的关联。主要结果如下：①当 S 是一个交换半群时，若 (S,X) 是弱混合，则 (S,X) 是传递紧；②若 (S,X) 是弹性的，则 (S,X) 是完全传递的；③当 S 是一个交换半群时，n-传递 $(n\geqslant 2)$、弱混合和弹性是等价的。

关键词：传递紧；弱混合；弹性；n-传递

中图分类号：O189.11　　　**文献标志码**：A

Transitive compactness of semigroup action

YANG Xiao, *LI Hua-hai*, *ZHONG Xin-lin*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper studies transitive compactness and its relationships with other forms of transitivity for dynamical systems with semigroup actions. Main results are as follows: ① if (S,X) is weakly mixing where S is an Abelian semigroup, then (S,X) is transitively compact; ② if (S,X) is elastic, then (S,X) is completely transitive; ③ we prove that n-transitivity $(n\geqslant 2)$, weakly mixing and elastic are equivalent mutually when S is an Abelian semigroup.

Key words: transitive compactness; weak mixing; elasticity; n-transitivity

拓扑传递(topological transitive)，亦称拓扑可迁，是动力系统中的一个重要概念，也是一类常见的动力性质。为了更好地研究经典拓扑传递的动力系统中的 Auslander 点的动力性质，Huang 等[1]引入新的传递属性的概念——传递紧。

弹性作用这一概念偶尔也会出现在一些文献中，但它通常没有一个单独的名称来表示，因为它与流和单一映射的弱混合相一致，因此，为了更好地研究一般半群作用的拓扑动力系统中的弹性作用，Cairns 等[2]首次引入“弹性”一词。

弱混合和弹性是拓扑动力系统中的较强的回复性。在经典动力系统中，强混合蕴含 n-传递，n-传递蕴含弱混合和弹性。对于一个交换的群作用的动力系统而言，n-传递、弱混合和弹性是等价的[2]。但是在一般群(半群)作用的动力系统中，它们是不一样的，见文献[2]中的例 3 ~ 例 5。

在这些学者们研究的基础上，本文主要研究半群作用的动力系统中传递紧以及它与弱混合、弹性之间的联系。

1　预备知识

设 X 是一个紧致的度量拓扑空间，S 是一个离散的拓扑作用半群。如果 π: $S\times X\to X,(s,x)\mapsto sx$ 是一个连续映射(作用)，且对任意的 $x\in X$，$t,s\in S$，$t(sx)=(ts)x$，则称三元组 (S,X,π) 为一

收稿日期：2022-06-21；**修回日期**：2022-09-26
作者简介：杨霄(1998—)，女，硕士研究生. E-mail：2112115052@e.gzhu.edu.cn
引文格式：杨霄，李华海，钟新林. 半群作用的传递紧[J]. 广州大学学报(自然科学版)，2023，22(6)：86-92.

个半群作用的拓扑动力系统(或简称为一个动力系统,或一个系统),记为(S,X)。特别地,如果S含有单位元e,还要求对任意$x\in X$,有$ex=x$。

如果$S=\{T^n:n=0,1,\cdots\}$且$T: X\to X$是一个连续映射,则称(S,X)为一个经典动力系统。如果$(S,X_1),(S,X_2),\cdots,(S,X_n)$是$n$个动力系统,则它们的乘积系统$(S,X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)$定义为对任意的$s\in S$,任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$,有$s(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(sx_1,sx_2,\cdots,sx_n)$。

称S是一个交换半群,如果对任意的$a,b\in S$,有$ab=ba$。称半群S满足左消去律,如果对任意的$a,b,c\in S$,有$ab=ac$蕴含$b=c$。

本文假定X和S都是无限集。用$\mathbb{Z}_+$表示所有非负整数组成的集合,$\mathbb{N}=\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$。

设(S,X)是一个动力系统,$x_0\in X$,$U,V\subset X$。记$N(x_0,U)=\{s\in S:sx_0\in U\}$,$N(U,V)=\{s\in S:sU\cap V\neq\varnothing\}$,$Sx=\{sx:s\in S\}$。

设$A\subset X$,记$\overline{A}$是A的闭包;记A°是A的内部;记A的直径为

$$diam(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}。$$

假设α是X的一个开覆盖,定义α的直径为

$$diam(\alpha)=\sup\{diam(A):A\in\alpha\}。$$

定义1　设(S,X)是一个动力系统。

(1)称$P\subset S$是syndetic集,如果存在一个有限集$F\subset S$,满足$S=\bigcup_{f\in F}f^{-1}P$,而$f^{-1}P=\{s\in S:fs\in P\}$;

(2)称$P\subset S$是g-syndetic集,如果存在一个有限集$F\subset S$,满足$S=\bigcup_{f\in F}fP$,而$fP=\{fp:p\in P\}$;

(3)称$P\subset S$是thick集,如果对任意有限集$F\subset S$,都存在$s\in S$,满足$P\supset Fs$。

定义2　设(S,X)是一个动力系统。

(1)称(S,X)是点传递的,如果存在点$x_0\in X$,使得$\overline{Sx_0}=X$。这时,也称x_0是(S,X)的一个传递点,用$Trans(S,X)$表示(S,X)所有传递点组成的集合;

(2)称$A\subset X$是不变集,如果对所有的$s\in S$,都有$SA\subset A$;

(3)称$A\subset X$是强不变集,如果对所有的$s\in S$,都有$sA=A$;

(4)称$M\subset X$是极小集,如果对所有的$x\in M$,都有$\overline{Sx}=M$,其中,M中的点x称为极小点;

(5)称(S,X)是一个M系统,如果它是传递系统并且极小点集M在X中稠密。

定义3　设(S,X)是一个动力系统。

(1)称(S,X)是拓扑传递的,如果对X中的任意两个非空开集U,V,$N(U,V)$是非空的;

(2)称(S,X)是拓扑弱混合的,如果乘积系统$(S,X\times X)$是拓扑传递的。即对X中的任意非空开集U_1,U_2,V_1,V_2,存在一个$s\in S$,使得$(U_1\times U_2)\cap(s\times s)^{-1}(V_1\times V_2)\neq\varnothing$;

(3)称(S,X)是拓扑n-传递的,如果(S,X^n)是拓扑传递的。即$\bigcap_{i=1}^n N(U_i,V_i)=N(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)\neq\varnothing$;

(4)称(S,X)是弹性的,如果对任意的$n\in\mathbb{N}$和X中的任意有限开集$U,V_1,\cdots,V_n$,满足

$$\bigcap_{i=1}^n N(U,V_i)\neq\varnothing;$$

(5)称(S,X)是完全传递的,如果(S,X)是传递的且对S中任意的syndetic子半群H,(H,X)是拓扑传递的;

定义4　设S是一个非空集合,记$\mathcal{P}=\mathcal{P}(S)$是$S$所有子集组成的集族。称$\mathcal{F}\subset\mathcal{P}$是一个Furstenberg族,如果$\mathcal{F}$具有向上遗传性。即若$F_1\subset F_2$,且$F_1\in\mathcal{F}$,则$F_2\in\mathcal{F}$。给定一个族$\mathcal{F}$,它的对偶族定义为$\{F\in\mathcal{P};F\cap F'\neq\varnothing$对所有的$F'\in\mathcal{F}\}$,记为$k\mathcal{F}$。

定义5[1]　设(S,X)是一个动力系统。令$\mathcal{F}$是一个族,$x\in X$,相对于族$\mathcal{F}$的点x的ω-极限集,定义为

$\bigcap_{F\in F}\overline{\mathcal{F}x}=\{z\in X$:对$z$的每一个邻域$U$,有$N(x,U)\in k\mathcal{F}\}$,

记为$\omega_{\mathcal{F}}(x)$。

记$\mathcal{B}$是S中所有无限子集组成的族。特别地,点x的ω-极限集为

$\omega(x)=\bigcap_{F\in kB}\overline{\mathcal{F}x}=\{z\in X$:对$z$的每一个邻域$U$,有$N(x,U)\in\mathcal{B}\}$。

定义6[1]　设(S,X)是一个动力系统,记$\mathcal{N}$是包含$N(U,V)$的S的所有子集组成的集族,其中,U,V是X中的任意两个非空开集。称(S,X)是一个传递紧的动力系统,如果对任意的$x\in X$,$\omega_{\mathcal{N}}(x)$是非空集合。换句话说,对任意的$x\in X$,存在点$z\in X$,使得对点z的任意开邻域G_z和X中

的任意非空开集 U,V，都有 $N(x,G_z)\cap N(U,V)\neq\varnothing$。

定义7 设 S 是一个非空集合，称 S 的一个非空子集族 $\mathcal{F}$ 是一个滤子，如果它满足：

(1) $\varnothing\notin\mathcal{F}$;

(2) 如果 $F_1\in\mathcal{F}$ 且 $F_1\subset F_2$，则 $F_2\in\mathcal{F}$;

(3) 对任意的 F_1，$F_2\in\mathcal{F}$，有 $F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$。

定义8 设 S 是一个非空集合，$\mathcal{F}$ 是 S 的一个滤子。一个集族 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ 称为 F 的一个滤子基，如果 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ 且对每一个 $B\in\mathcal{F}$，存在一个 $A\in\mathcal{A}$，使得 $A\subset B$。

2 传递紧与拓扑传递

引理1[6] 如果 (S,X) 是一个传递紧的动力系统，则 X 没有孤立点。

证明 假设 (S,X) 有一个孤立点 x，设 U 为点 x 的开邻域并且 $U\cap\{x\}=\{x\}$，由于 (S,X) 是传递紧，故存在 $z\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$。

(1) 若 $z\neq x$。取 z 的开邻域 V，使得 $U\cap V=\varnothing$，于是存在 $s\in N(x,V)\cap N(U,U)$，故 $sx\in V$，$sx\in U$，矛盾；

(2) 若 $z=x$。取 X 中的一个非空开邻域 V，使得 $U\cap V=\varnothing$，于是存在 $s\in N(x,U)\cap N(U,V)$，故 $sx\in U$，$sx\in V$，矛盾。

引理2 设 (S,X) 是一个传递紧的动力系统且 $x\in X$。对 y 的任意开邻域 G_y，对 X 中的任意非空开集 U,V，则 $N(x,G_y)\cap N(U,V)$ 是一个无限集。

证明 假设存在 X 中非空开集 U,V，存在点 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$ 和 y 的一个开邻域 G_y，使得 $N(x,G_y)\cap N(U,V)$ 是一个有限集。不妨设 $N(x,G_y)\cap N(U,V)=\{s_1,\cdots,s_k\}$。因为非单点集空间 X 没有孤立点，所以可以构造非空开集 $U_1\subset U$，且 U_1 足够小，使得 $V_1=V\setminus\bigcup_{i=1}^{k}s_i\overline{U_1}$，故 V_1 是 X 中的一个非空开集。因此，

$N(U_1,V_1)\subset N(U,V)$，$N(x,G_y)\cap N(U_1,V_1)=\varnothing$，

这矛盾于 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$。

命题1 设 (S,X) 是一个动力系统，S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射，考虑下列条件：

(1) (S,X) 是传递紧的；

(2) (S,X) 是拓扑传递的且对任意的点 $x\in X$，存在点 $z\in X$，使得对 z 的任意开邻域 G_z 和 X 中的任意开集 W，对任意的 $s\in S$，有

$$N(x,G_z)\cap N(W,s^{-1}W)\neq\varnothing,$$

则(1)⇒(2)。如果 S 是一个交换半群，则(2)⇒(1)。

证明 (1)⇒(2)。显然成立。

(2)⇒(1)。假设存在 X 中非空开集 U,V，由于 (S,X) 是拓扑传递的，故存在 $t\in S$，使得 $V\cap t^{-1}U\neq\varnothing$。令 $W=V\cap t^{-1}U$。取定 $x\in X$，则存在 $z\in X$，使得对 z 的任意开邻域 G_z，对 X 中的非空开集 W，有

$$N(x,G_z)\cap N(W,t^{-1}W)\neq\varnothing。$$

取 $s\in N(x,G_z)\cap N(W,t^{-1}W)$，则 $sx\in G_z$，$s\in N(W,t^{-1}W)$。那么

$$W\cap s^{-1}t^{-1}W=W\cap(ts)^{-1}W\neq\varnothing,$$

即 $((ts)W)\cap W\neq\varnothing$，所以有

$((ts)W)\cap W=ts(V\cap t^{-1}U)\cap V\cap t^{-1}U\subset ts(t^{-1}U)\cap V=st(t^{-1}U)\cap V\subset sU\cap V$，即 $s\in N(U,V)$，故 $N(x,G_z)\cap N(U,V)\neq\varnothing$，则 (S,X) 是传递紧的。

引理3 设 (S,X) 是一个传递紧的动力系统，其中，S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射。对任意的 $x\in X$，则 $\omega_{\mathcal{N}}(x)$ 是 X 中的一个不变闭子集。

证明 易知 $\omega_{\mathcal{N}}(x)$ 是 X 中的一个闭子集。设 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$，$t\in S$。下证：$ty\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$。

令 G_{ty} 是 ty 的一个开邻域，则 $t^{-1}G_{ty}$ 是 y 的一个开邻域。设 U,V 是 X 中任意非空开集。由于 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$，故可取 $s\in N(x,t^{-1}G_{ty})\cap N(U,t^{-1}V)\neq\varnothing$。由 $s\in N(x,t^{-1}G_{ty})$，可得 $sx\in t^{-1}G_{ty}$，则 $tsx\in G_{ty}$。由 $s\in N(U,t^{-1}V)$，可得 $U\cap s^{-1}t^{-1}V\neq\varnothing$，即 $ts\in N(U,V)$，所以 $ts\in N(x,G_{ty})\cap N(U,V)\neq\varnothing$，故 $ty\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$。

引理4[3] 设 (S,X) 是一个动力系统，考虑下列条件：

(1) (S,X) 是拓扑传递；

(2) 对每一个非空开集 $U\subset X$，$S^{-1}U=\bigcup_{s\in S}s^{-1}U$ 稠密；

(3) 如果非空开集 U 满足：对任意的 $s\in S$，有 $s^{-1}U\subset U$，则 U 是稠密的；

(4)如果 E 是 X 的一个不变闭子集，则 $E=X$ 或 $\bar{E}^{\circ}=\varnothing$。

则(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)。如果存在 $s\in S$，使得 $s:X\to X$ 为满射，则(4)$\Rightarrow$(1)。

引理 5　设(S,X)是一个动力系统，其中,S 满足左消去律。对任意的 $x\in X$，则 $\omega(x)$是 X 中一个不变闭子集。

证明　显然看到 $\omega(x)$是一个闭集。令 $y\in\omega(x)$和 $t\in S$,接下来证明：$ty\in\omega(x)$。令 U 为 ty 的一个开邻域,则 $t^{-1}U$ 为 y 的一个开邻域。因为 $N(x,U)\supset tN(X,t^{-1}U)$和 $N(x,t^{-1}U)$是无限集，则 $N(x,U)$是无限集,因此,$ty\in\omega(x)$。

推论 1　设(S,X)是一个传递紧的动力系统，S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射，那么以下条件成立：

(1)要么 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=X$，要么$\overline{\omega_{\mathcal{N}}(x)}^{\circ}=\varnothing$；

(2)如果 x 是极小点且 M 是包含 x 的极小集，则 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=M$。特别地，如果 S 满足左消去律，那么 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=\omega(x)=M$。

证明　(1)因为(S,X)是一个传递紧的动力系统，所以(S,X)是拓扑传递的。由引理 3 可知，$\omega_{\mathcal{N}}(x)$是 X 中的一个不变闭子集。由引理 4 可知，要么 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=X$，要么$\overline{\omega_{\mathcal{N}}(x)}^{\circ}=\varnothing$。

(2)事实上有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)\subset\omega(x)\subset M$。由 M 的极小性，有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=M$。如果 S 满足左消去律，那么 $\omega_{\mathcal{N}}(x)\subset\omega(x)\subset M$。由 M 的极小性，有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=\omega(x)=M$。

3　传递紧与弱混合

引理 6[4]　设(S,X)是一个动力系统，其中，S 是一个交换半群,那么(S,X)是弱混合当且仅当 $\mathcal{A}=\{N(U,V):U$ 和 V 是 X 中的开子集$\}$是 S 中的滤子基。

引理 7[3]　设(S,X)是一个动力系统，其中，S 是一个交换半群。考虑如下条件：

(1)(S,X)是弱混合；

(2)对 X 中任意非空开集 U,V,有 $N(U,U)\cap N(U,V)\neq\varnothing$；

(3)对 X 中任意非空开集 U,V,有 $N(U,U)\cap N(V,U)\neq\varnothing$；

(4)$\{N(U,V):U,V$ 是 X 中的非空开集$\}$是 S 中的一个滤子基。

那么(1)$\Leftrightarrow$(4)，(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)。如果每个 $s\in S$ 都是 X 到 X 的满射，那么(3)$\Rightarrow$(1)。

引理 8[3]　设(S,X)是一个动力系统，其中 S 是一个交换半群，S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射。考虑如下条件：

(1)(S,X)是弱混合；

(2)(S,X)是 thickly 传递。

那么(1)$\Rightarrow$(2)。如果 S 是幺半群，那么(2)$\Rightarrow$(1)。

命题 2[6]　设(S,X)是一个弱混合的动力系统,其中,S 是一个交换半群，S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射。如果存在 $x\in X$ 和 X 中的一个紧子集 W,使得 $N(x,W)$是 syndetic 集，则 $\omega_{\mathcal{N}}(x)\cap W\neq\varnothing$。

证明　假设 $\omega_{\mathcal{N}}(x)\cap W=\varnothing$。那么对每一个 $y\in W$，存在 y 的非空开邻域 G_y 和 X 中的非空开集 U_y,V_y，使得 $N(x,G_y)\cap N(U_y,V_y)=\varnothing$。由于 W 是紧致的，故可取 $y_1,\cdots,y_k$,使得$\{G_{y_1},\cdots,G_{y_k}\}$覆盖 W。由于(S,X)是弱混合的，故设 U_{y_1},V_{y_1}是 X 中的开集。由引理 8 可知$\bigcap_{i=1}^{k}N(U_{y_i},V_{y_i})$是 thick 集。又由于 $N(x,W)$是 syndetic 集，故存在 $s\in\bigcap_{i=1}^{k}N(U_{y_i},V_{y_i})\cap N(x,W)$，则 $sx\in W$。那么存在 $1<j<k$,使得 $sx\in G_{y_j}$。所以 $s\in N(x,G_{y_j})\cap N(U_{y_j},V_{y_j})$，故与假设矛盾。

命题 3　设(S,X)是一个动力系统，其中,S 是一个交换半群且 X 是紧致的。如果(S,X)是弱混合的，那么(S,X)是传递紧的。

证明　假设存在 $x\in X$，使得 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=\varnothing$,那么对每一个 $y\in X$，存在 y 的非空开邻域 G_y 和 X 中的非空开集 U_y,V_y,使得 $N(x,G_y)\cap N(U_y,V_y)=\varnothing$。由于 X 是紧致的，故可取 $y_1,\cdots,y_k$，使得$\{G_{y_1},\cdots,G_{y_k}\}$覆盖 X。由于(S,X)是弱混合的，根据引理 6，可以找到

$$s\in\bigcap_{i=1}^{k}N(U_{y_i},V_{y_i})\neq\varnothing,$$

那么存在 $1\leqslant j\leqslant k$，使得 $sx\in G_{y_j}$，这就说明 $s\in N(x,G_{y_j})\cap N(U_{y_j},V_{y_j})$，矛盾。

4　弹性与完全传递

命题 4　设(S,X)是一个动力系统，其中,X

是紧致的。如果对所有的 $n\geqslant 2$,(S,X)是 n-传递的,那么(S,X)是传递紧的。

证明 假设存在 $x\in X$,使得 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=\varnothing$,那么对每一个 $y\in X$,存在 y 的非空开邻域 G_y 和 X 中的非空开集 U_y,V_y,使得 $N(x,G_y)\cap N(U_y,V_y)=\varnothing$。由于 X 是紧致的,故可取 $y_1,\cdots,y_k$,使得 $\{G_{y_1},\cdots,G_{y_k}\}$覆盖 X。因为对所有的 $n\geqslant 2$,有(S,X)是 n-传递的,所以可以找到

$$s\in\bigcap_{i=1}^{k}N(U_{y_i},V_{y_i})\neq\varnothing,$$

那么存在 $1\leqslant j\leqslant k$,使得 $sx\in G_{y_j}$,这就说明 $s\in N(x,G_{y_j})\cap N(U_{y_j},V_{y_j})$,矛盾。

命题5 设(G,X)是一个弱混合的动力系统,其中,G 是一个交换群,X 是一个紧致的度量空间。如果 $x\in X$,则 $\omega_{\mathcal{N}}(x)$是强不变的。

证明 由命题3易知,$\omega_{\mathcal{N}}(x)\neq\varnothing$。设 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$和 $g\in G$,下证存在 $z\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$,使得 $gz=y$。对每一个 $k\in N$,找到一个有限开覆盖$\mathcal{U}_k$覆盖 X 且 $diam(\mathcal{U}_k)<\dfrac{1}{k}$和 y 的一个开邻域 W_k,并且 $diam(W_k)<\dfrac{1}{k}$。因为(G,X)是弱混合并且 G 是交换的,由引理6可得,所以存在 X 中的非空开集 U_1,V_1,使得

$$N(U_1,V_1)\subset\bigcap_{U,V\in\mathcal{U}_1}N(U,V)。$$

由于 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$,所以可取

$$g_1\in N(x,W_1)\cap N(g^{-1}U_1,V_1)。$$

现假设 $g_1,g_2,\cdots,g_m$ 两两不等和构造 X 中的非空开集 $U_1,V_1,\cdots,U_m,V_m$,其中,$m\in\mathbb{N}$。可以从 X 中找到非空开集 U_{m+1},V_{m+1},使得

$$N(U_{m+1},V_{m+1})\subset\bigcap_{U,V\in\mathcal{U}_{m+1}}N(U,V)\cap\bigcap_{i=1}^{m}N(U_i,V_i)。$$

由于 $y\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$,故可以选出 $g_{m+1}\in N(x,W_{m+1})\cap N(g^{-1}U_{m+1},V_{m+1})$,而 $g_{m+1}\notin\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$。现假设 $\lim_{i\to\infty}g^{-1}g_ix=z\in X$。由于 $g_ix\in W_i$,故 $\lim_{i\to\infty}g_ix=y$,所以$\lim_{i\to\infty}g^{-1}g_ix=g^{-1}y$,于是 $g^{-1}y=z$,则 $gz=y$。

下证 $z\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$。令 G_z 是点 z 的一个开邻域,$U',V'\in\mathcal{U}_l$是 X 中的非空开集。取充分大的 l,使得 $U'_l\subset U',V'_l\subset V'$,且 $U'_l,V'_l\in\mathcal{U}_l$。现假设 l 充分大,使得 $g^{-1}g_l\in N(x,G_z)$。此外,

$$g_l\in N(g^{-1}U_l,V_l),$$

故 $g^{-1}g_l\in N(U_l,V_l)\subset N(U'_l,V'_l)\subset N(U',V')$,所以 $N(x,G_z)\cap N(U',V')\neq\varnothing$,故 $z\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$。

命题6 设(S,X)是一个动力系统。考虑以下条件:

(1)(S,X)是弱混合;

(2)存在 X 中的稠密子集 X',对任意的 $x\in X'$,有 $x\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$;

(3)存在 X 中的稠密 G_δ 子集 X'',对任意的 $x\in X''$,有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=X$;

(4)存在 $x_0\in X$,使得 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=X$;

那么有:

(a)(3)⇒(2)和(3)⇒(4);

(b)如果 S 是交换半群并且 S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射,那么(2)⇒(1);

(c)如果 S 是一个群,那么(4)⇒(1);

(d)如果 S 是交换半群,S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射,并且 X 有一个可数基,那么(1)⇒(3)。

证明 (a)(3)⇒(2)和(3)⇒(4)是显然的。

(b)如果 S 是一个交换半群并且 S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射,证明(2)⇒(1)。令 U,V 是 X 中的非空开集。根据 X'的稠密性,可以取点 $x\in U\cap X'$。因为 $x\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$,所以 $N(x,U)\cap N(U,V)\neq\varnothing$,故

$$N(U,U)\cap N(U,V)\neq\varnothing。$$

由引理7和 U,V 的任意性可得,(S,X)是弱混合。

(c)如果 S 是一个群,证明(4)⇒(1)。令 U_1,U_2,V_1,V_2 是 X 中的非空开集,取 $y_1\in U_1,y_2\in V_1$。注意到 $\omega_{\mathcal{N}}(x_0)=X$,$y_1\in\omega_{\mathcal{N}}(x_0)$,故存在 $s_0\in S$,使得 $s_0x_0\in U_1$。另外,根据 $y_2\in\omega_{\mathcal{N}}(x_0)$和引理2,可以选择

$$s\in N(x_0,V_1)\cap N(s_0^{-1}U_2,V_2),$$

其中,$s\neq s_0$。特别地,$ss_0^{-1}\in N(U_1,V_1)\cap N(U_2,V_2)$。由于 U_1,U_2,V_1,V_2 的任意性,故(S,X)是弱混合。

(d)假设 X 有一个可数基,证明(1)⇒(3)。令(S,X)是弱混合,根据文献[5]中的命题3.2,$Trans(S,X\times X)$是 $X\times X$ 中稠密的 G_δ 子集。对每一点$(x,y)\in Trans(S,X\times X)$,都有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=X$。令 G,U,V 是 X 中的非空开集,显然 $y\in Trans(S,X)$。因此,存在 $s_0\in S$,使得 $s_0y\in U$。偶对(x,y)

是拓扑传递点，所以存在 $s\in N(x,G)\cap N(y,s_0^{-1}V)\neq\varnothing$。$ss_0y\in V$ 和 $s_0y\in U$，所以 $sx\in G$ 和 $sU\cap V\neq\varnothing$。因此,对 X 中的任意非空开集 G,U,V，有 $s\in N(x,G)\cap N(U,V)\neq\varnothing$，故 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=X$。

推论2[6] 设(S,X)是一个 M 系统，其中,S 是一个交换半群，S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射。如果对任意的极小点 $x\in X$，有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)\neq\varnothing$，那么$(S,X)$是弱混合的。特别地，每一个传递紧的 M 系统都是弱混合的。

命题7 设(S,X)是一个动力系统，其中,S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射。如果(S,X)是弹性的，那么(S,X)是完全传递。

证明 因为(S,X)是弹性的，所以(S,X)是拓扑传递。令 H 是 S 的一个 syndetic 子半群,那么存在 S 中有限集 $F=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，使得 $F^{-1}H=S$。令 U,V 是 X 中的非空开集,(S,X)是弹性的，所以存在 $s\in S$，使得对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $sU\cap a_i^{-1}V\neq\varnothing$。

由于 $F^{-1}H=S$，故存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $a_js\in H$。那么有 $\varnothing\neq a_j(sU\cap a_j^{-1}V)\subset a_jsU\cap a_ja_j^{-1}V\subset a_jsU\cap V$，故$(H,X)$是拓扑传递。所以$(S,X)$是完全传递。

命题8 设(S,X)是一个弱混合动力系统，其中,S 是一个交换半群，X 是一个度量空间。如果 S 中每一个元素都是 X 到 X 的满射，那么对任意的 $x\in X$,存在有限集 F,使得

$$\omega_{\mathcal{N}}(x)=\bigcup_{a\in F}\omega_{\mathcal{N}}(ax,H),$$

其中,H 是 S 的一个 g-syndetic 子半群。在(H,X)中，$\omega_{\mathcal{N}}(ax,H)$是点 ax 的 $\omega_{\mathcal{N}}$ 极限集。

证明 因为 H 是 S 是一个 g-syndetic 子群，那么存在 S 中有限子集 F，使得 $FH=S$。令 $z\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$ 和 U,V 是 X 中的非空开集。对每一个 $k\in\mathbb{N}$，令 G_k 是以 z 为中心且半径为 $1/k$ 的开球。因为(S,X)是弱混合，则存在 X 中非空开集 U_1,V_1，使得 $N(U_1,V_1)\subset\bigcap_{s\in F}N(s^{-1}U,V)$。对任意的 $k\in\mathbb{N}$，$z\in\omega_{\mathcal{N}}(x)$，有 $N(x,G_k)\cap N(U_1,V_1)\neq\varnothing$。对每一个 $k\in\mathbb{N}$，取 $s_k\in N(x,G_k)\cap N(U_1,V_1)$，使得 $\{s_k:k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集。对所有 $i\in\mathbb{N}$，可以找到 $\{s_k:k\in\mathbb{N}\}$ 中的无限集 $\{s_{k_i}:i\in\mathbb{N}\}$，$a\in F$ 和 H 中一个子集 $\{h_{k_i}:k_i\in\mathbb{N}\}$ 使得 $ah_{k_i}=s_{k_i}$。那么对每一个 $i\in\mathbb{N}$，有 $h_{k_i}ax=s_{k_i}x\in G_{k_i}$。这就蕴含 $h_{k_i}\in N(ax,G_{k_i})$。因为

$$ah_{k_i}=s_{k_i}\in N(U_1,V_1)\subset\bigcap_{s\in F}N(s^{-1}U,V),$$

有 $ah_{k_i}\in N(a^{-1}U,V)$,这就蕴含 $h_{k_i}\in N(U,V)$。因此,$h_{k_i}\in N(ax,G_{k_i})\cap N(U,V)$，故 $z\in\omega_{\mathcal{N}}(ax,H)$。

推论3 设级联(X,T)是经典的动力系统，其中,X 是一个度量空间，T 是 X 到 X 的一个满射。令 $n\in\mathbb{N}$,则对动力系统(X,T^n)而言，若(X,T)是弱混合的，那么对任意 $x\in X$，有 $\omega_{\mathcal{N}}(x)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega_{\mathcal{N}}(T^ix,T^n)$，其中,$\omega_{\mathcal{N}}(T^ix,T^n)$是点 T^ix 的 $\omega_{\mathcal{N}}$ 极限集。

证明 令 $H=\{nk:k\in\mathbb{N}\}$，令 $F\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,那么 $F+H=\mathbb{Z}_+$。根据命题8，结论成立。

命题9 设(S,X)是一个动力系统，其中,S 是一个交换半群,则 n-传递($n\geqslant2$)，弱混合和弹性是等价的。

证明 仅需要证明：弱混合⇒n-传递；弹性⇒弱混合。

下面证明：弱混合⇒n-传递。考虑非空开集 U_i,V_i，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$,因为(S,X)是弱混合,所以存在 $s_1\in S$，使得

$$U_2\cap s_1^{-1}U_1\neq\varnothing \text{和} V_2\cap s_1^{-1}V_1\neq\varnothing。$$

存在 $s_2\in S$，使得 $U_3\cap s_2^{-1}(U_2\cap s_1^{-1}U_1)\neq\varnothing$ 和 $V_3\cap s_2^{-1}(V_2\cap s_1^{-1}V_1)\neq\varnothing$。

重复上面的步骤到 n。令 $U=U_n\cap s_{n-1}^{-1}(U_{n-1})\cap\cdots\cap(s_1s_2\cdots s_{n-1})^{-1}(U_1)\neq\varnothing$,

$V=V_n\cap s_{n-1}^{-1}(V_{n-1})\cap\cdots(s_1s_2\cdots s_{n-1})^{-1}(V_1)\neq\varnothing$。存在 $s\in S$，使得 $U\cap s^{-1}V\neq\varnothing$,那么 $U_n\cap s^{-1}V_n\neq\varnothing$。对所有 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，有$(s_i\cdots s_{n-1})^{-1}(U_i)\cap s^{-1}(s_i\cdots s_{n-1})^{-1}(V_i)=(s_i\cdots s_{n-1})^{-1}(U_i\cap s^{-1}V_i)\neq\varnothing$。所以,$(S,X)$是 n-传递。

下面证明：弹性⇒弱混合。考虑非空开集 U_1,U_2,V_1,V_2,因为(S,X)是弹性的，所以存在 $s_1\in S$，使得

$$U_1\cap s_1^{-1}U_2\neq\varnothing \text{和} U_1\cap s_1^{-1}V_2\neq\varnothing。$$

存在 $s_2\in S$，使得 $U_1\cap s_1^{-1}U_2\cap s_2^{-1}V_1\neq\varnothing$ 和

$$U_1\cap s_1^{-1}U_2\cap s_2^{-1}(U_1\cap s_1^{-1}V_2)\neq\varnothing。$$

那么 $U_1\cap s_2^{-1}V_1\neq\varnothing$,

$$s_1^{-1}U_2\cap s_2^{-1}s_1^{-1}V_2=s_1^{-1}(U_2\cap s_2^{-1}V_2)\neq\varnothing。$$

故 $U_2\cap s_2^{-1}V_2\neq\varnothing$，所以$(S,X)$是弱混合。

5 结 语

本文主要研究了半群作用的动力系统中的传递紧以及它与其他传递性之间的关联。在第2节中，证明了以下结论：设(S,X)是一个动力系统，其中,S是一个交换半群，S中每一个元素都是X到X的满射。则(S,X)是传递紧当且仅当(S,X)是拓扑传递的且对任意的$x\in X$，存在点$z\in X$，使得对z任意的开邻域G_z和X中的开集W,对任意的$s\in S$,有$N(x,G_z)\cap N(W,s^{-1}W)\neq\varnothing$。

在第3节中，证明了下面的结论：设(S,X)是一个动力系统，其中,S是一个交换半群。如果(S,X)是弱混合的，那么(S,X)是传递紧的。

在第4节中，证明了：设(S,X)是一个动力系统，其中,S中的每一个元素都是X到X的满射。如果(S,X)是弹性的，那么(S,X)是完全传递。并且，还证明了：设(S,X)是一个动力系统，其中,S是一个交换半群,则n-传递$(n\geqslant 2)$，弱混合和弹性是等价的。

参考文献：

[1] Huang W, Khilko D, Kolyada S, et al. Dynamical compactness and sensitivity[J]. Journal of Differential Equations,2016,260(9):6800-6827.

[2] Cairns G, Kolganova A, Nielsen A. Topological transitivity and mixing notions for group actions[J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2007, 37(2): 371-397.

[3] Wang H Y, Fang J Y, Zhong X L. Multi-transitivity of semigroup actions[J]. Journal of Difference Equations and Applications,2021,27(9): 4-5.

[4] Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation[J]. Mathematical Systems Theory,1967,1(1): 17-18.

[5] Kontorovich E, Megrelishvili M. A note on sensitivity of semigroup actions[J]. Semigroup Forum, 2008,76(1):133-141.

[6] 李华海. 半群作用动力系统中的传递紧和敏感性的一些研究[D].广州:广州大学,2019.

【责任编辑：卓祯雨】