

文章编号:1671-4229(2023)06-0082-04

一类 Volterra 型积分微分方程不可数个有界正解的存在性

罗志敏, 钟满田

(江门职业技术学院 人文教育学院, 广东 江门 529000)

摘要: 文章讨论了一类 Volterra 型积分微分方程解的存在性, 运用 Banach 空间中不动点方法, 得到两个定理给出方程存在不可数个有界正解的充分条件, 拓展了一些已有结果。最后举例说明结论的可行性。

关键词: 积分微分方程; 不动点; Banach 空间; 不可数

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

Existence for uncountable bounded positive solutions of Volterra integral-differential equations

LUO Zhi-min, ZHONG Man-tian

(College of Humanities and Education, Jiangmen Polytechnic, Jiangmen 529000, China)

Abstract: The paper deals with the existence of solutions for a class of Volterra integral-differential equations. By using the fixed point method in Banach space, two theorems were obtained to give sufficient conditions for the existence of uncountable bounded positive solutions of the equation. The conclusions generalize these results. Finally, an example is given to illustrate the application of the theorems.

Key words: integral-differential equation; fixed point; Banach space; uncountable

0 引言

诸多领域如物理、生物和社会学中的很多问题可以归结为非线性中立型积分或微分方程数学模型, 通过对模型解的振动性、稳定性、(概)周期性以及极限环等方面的讨论, 从而对现实问题进行决策与预测。学者们为此做了大量工作, 并得到了很多优秀成果^[1-10]。对于这些方面的讨论, 解的存在性是首要问题, 该方面的文献主要聚焦于解存在或不存在条件, 但对于不可数个解存在

条件的研究并不多见。文献[7]讨论如下非线性中立型方程:

$[x(t) - a(t)x(t - \tau)]' = p(t)f(x(t - \sigma)), t \geq t_0,$
不可数个有界正解的存在性。受其启发, 本文研究形式更为广泛的 Volterra 型积分微分方程:

$$[x(t) - p(t)x(\delta(t))] ' = \int_{t_0}^t q(t, \gamma(s))f(x(\sigma(s)))ds, t \geq t_0. \quad (1)$$

文献[4, 6, 9]等运用了非紧性测度、压缩映射原理及 Chebyshev 谱配置等方法研究了积分方程模型存在解的充分条件。本文则运用 Krasnoselskii 不

收稿日期: 2023-01-05; 修回日期: 2023-09-01

基金项目: 广东省江门市基础与理论科学研究类资助项目(ZJ2022021N)

作者简介: 罗志敏(1979—), 男, 副教授. E-mail: zmluo@126.com

引文格式: 罗志敏, 钟满田. 一类 Volterra 型积分微分方程不可数个有界正解的存在性[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2023, 22(6): 82-85.

不动点定理,不仅给出了方程(1)存在有界正解的充分条件(定理1),更进一步给出了存在不可数个有界正解的充分条件(定理2),拓展了一些已有的相关结论。

引理 1^[10] (Krasnoselskii 不动点定理) 设 C 是 Banach 空间, X 是 C 上的有界闭凸子集。给定两个映射 $F, U: X \rightarrow C$, 满足:

(1) 对任意 $x, y \in X$, 有 $Fx + Uy \in X$;

(2) F 是 X 上的压缩映射;

(3) U 是全连续算子;

则 $F + U$ 在 X 上存在不动点。

1 主要结论

为得到本文的结论,假设方程(1)满足如下条件:

(H₁) $t_0 \leq \delta(t), \sigma(t), \gamma(t) \leq t, p \in C([t_0, \infty), (0, \infty)), q \in (R \times [t_0, t], (0, \infty))$;

(H₂) $f \in C(R, R)$, 当 $x > 0$ 时, f 是非减函数, 且 $f(x) > 0$;

(H₃) 存在有上界函数 v 和有下界函数 $u, u, v \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$; 同时存在常数 $\lambda > 0, K_2 > K_1 \geq 0, t_1 \geq t_0 + m (m > 0)$, 使得

$$\begin{aligned} u(t) &\leq v(t), t \geq t_0, \\ v(t) - v(t_1) &\geq u(t) - u(t_1), t_0 \leq t \leq t_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p(t) &\geq \frac{1}{u(\delta(t))} \left(u(t) - K_1 + \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(v(\sigma(s))) ds dr \right), t \geq t_1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p(t) &\leq \frac{1}{v(\delta(t))} \left(v(t) - K_2 + \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(u(\sigma(s))) ds dr \right) \leq \\ &\lambda < 1, t \geq t_0. \end{aligned} \quad (4)$$

定理 1 若方程(1)满足条件(H₁)、(H₂)和(H₃), 则方程(1)存在有界正解。

证明 给定 $[t_0, \infty)$ 上的全体连续函数集合 $C([t_0, \infty), (0, \infty))$, 对任意 $x(t) \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, 定义 $C([t_0, \infty), (0, \infty))$ 上的范数为 $\|x\| = \sup_{t \geq t_0} |x(t)|$ 。易验证 $C([t_0, \infty), (0, \infty))$ 为 Banach 空间。在空间 $C([t_0, \infty), (0, \infty))$ 中,

构造如下有界闭凸子集:

$$\begin{aligned} X = \{ x = x(t) \in C([t_0, \infty), (0, \infty)) : \\ u(t) \leq x(t) \leq v(t), t \geq t_0 \}. \end{aligned}$$

取 $K \in [K_1, K_2]$, 定义两个映射 $F, U: X \rightarrow C([t_0, \infty), (0, \infty))$, 使得:

$$(Fx)(t) = \begin{cases} K + p(t)x(\delta(t)), & t \geq t_1, \\ (Fx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (Ux)(t) = \\ \begin{cases} - \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr, & t \geq t_1, \\ (Ux)(t_1) + v(t) - v(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

以下证明 F, U 满足引理 1 条件:

(i) 任取 $x, y \in X$, 当 $t \geq t_1$ 时, 结合式(4)有

$$\begin{aligned} (Fx)(t) + (Uy)(t) &= K + p(t)x(\delta(t)) - \\ &\int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr \leq \\ &K + p(t)v(\delta(t)) - \\ &\int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(u(\sigma(s))) ds dr \leq \\ &K + v(t) - K_2 \leq v(t). \end{aligned}$$

当 $t_0 \leq t \leq t_1$ 时, 由式(2)有

$$\begin{aligned} (Fx)(t) + (Uy)(t) &= (Fx)(t_1) + \\ &(Uy)(t_1) + v(t) - v(t_1) \leq \\ &v(t_1) + v(t) - v(t_1) = v(t). \end{aligned}$$

另一方面, 当 $t \geq t_1$ 时, 结合式(3)有

$$\begin{aligned} (Fx)(t) + (Uy)(t) &= K + p(t)x(\delta(t)) - \\ &\int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr \geq \\ &K + p(t)u(\delta(t)) - \\ &\int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(v(\sigma(s))) ds dr \geq \\ &K + u(t) - K_1 \geq u(t). \end{aligned} \quad (7)$$

当 $t_0 \leq t \leq t_1$ 时, 由式(2)有

$$\begin{aligned} (Fx)(t) + (Uy)(t) &= (Fx)(t_1) + \\ &(Uy)(t_1) + v(t) - v(t_1) \geq \\ &u(t_1) + v(t) - v(t_1) \geq u(t). \end{aligned}$$

由以上可得, 对任意 $x, y \in X$, 当 $t \in [t_0, \infty)$ 时, 有 $Fx + Uy \in X$ 。

(ii) F 是 X 上的压缩映射。任取 $x, y \in X$, 当 $t \geq t_1$ 时,

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| =$$

$|p(t)| |x(\delta(t)) - y(\delta(t))| \leq \lambda \|x - y\|$ 。
即 $\|Fx - Fy\| \leq \lambda \|x - y\|$ 。当 $t_0 \leq t \leq t_1$ 时,
 $|(Fx)(t) - (Fy)(t)| = |(Fx)(t_1) - (Fy)(t_1)| \leq$
 $\lambda \|x - y\|$ 也是明显成立的。因此,可以推出 F 是 X
上的压缩映射。

(iii) U 是全连续算子。首先证明 U 是连续的,
取函数序列 $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n(t) \in X$, 当 $n \rightarrow \infty$
时, $x_n(t) \rightarrow x(t)$ 。由于 X 是闭集, 则 $x = x(t) \in$
 X 。当 $t \geq t_1$ 时有

$$\begin{aligned} |(Ux_n)(t) - (Ux)(t)| = & \left| \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) [f(x_n(\sigma(s))) - \right. \\ & \left. f(x(\sigma(s)))] ds dr \right| \leq \\ & \int_{t_1}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) |f(x_n(\sigma(s))) - \\ & f(x(\sigma(s)))| ds dr. \end{aligned}$$

因为 $Fx + Uy \in X$, 故 $Fx + Uy$ 有界, 由式(7)可知

$$\int_{t_1}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(v(\sigma(s))) ds dr < \infty, \quad (8)$$

即 $\int_{t_1}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(v(\sigma(s))) ds dr$ 收敛。另外,
由 f 的连续性可得:

$$|f(x_n(\sigma(s))) - f(x(\sigma(s)))| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 可以得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(Ux_n)(t) - (Ux)(t)\| = 0,$$

故 U 是连续的。

接下来验证 UX 是相对紧的。由 U 的连续性
及 X 的定义易知 UX 一致有界, 根据 Arzela-Ascoli
定理, 仅需证明 U 等度连续。

对任意的 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 取充分大的 $t_2 \geq t_1$,
由式(8)有

$$\int_{t_2}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(v(\sigma(s))) ds dr < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此, 对任意的 $T_2 > T_1 \geq t_2$ 有

$$\begin{aligned} |(Ux)(T_2) - (Ux)(T_1)| = & \left| \int_{T_1}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr - \right. \\ & \left. \int_{T_2}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr \right| \leq \\ & \int_{T_1}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr + \\ & \int_{T_2}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr < \end{aligned}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

任取 $T_1, T_2 \in [t_1, t_2]$, 且 $T_1 < T_2$, 有

$$\begin{aligned} |(Ux)(T_2) - (Ux)(T_1)| \leq & \int_{T_1}^{T_2} \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr \leq \\ & \sup_{t_1 \leq r \leq t_2} \left\{ \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds \right\} (T_2 - T_1), \end{aligned}$$

取 $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{M}$, 这里 $M = \sup_{t_1 \leq r \leq t_2} \left\{ \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds \right\} (T_2 - T_1)$, 当 $0 < T_2 - T_1 <$
 δ_1 时, 于是有

$$|(Ux)(T_2) - (Ux)(T_1)| < \varepsilon.$$

最后, 考查任取 $T_1, T_2 \in [t_0, t_1]$, 且 $T_1 < T_2$, 取 $\delta_2 =$

$$\frac{\varepsilon}{\sup_{t_0 \leq r \leq t_2} \{|v'(s)|\}}, \text{ 当 } 0 < T_2 - T_1 < \delta_2 \text{ 时有}$$

$$|(Ux)(T_2) - (Ux)(T_1)| =$$

$$|v(T_1) - v(T_2)| = \left| \int_{T_1}^{T_2} v'(s) ds \right| \leq$$

$$\sup_{t_0 \leq r \leq t_2} \{|v'(s)|\} (T_2 - T_1) < \varepsilon.$$

U 的等度连续性得到证明, 由 Arzela-Ascoli 定理
可知 UX 是相对紧的, 因此, 算子 U 是全连续的。

综合以上讨论, 由引理 1 可知, 存在 $x^* \in X$, 有
 $Fx^* + Ux^* = x^*$, 故 $x^* = x^*(t)$ 即为方程(1)的正解。

定理 2 若方程(1)满足条件 (H_1) 、 (H_2) 和
 (H_3) , 则方程存在不可数个正解, 且介于 u, v 之间。

证明 任取 $K^* \in [K_1, K_2]$, 且 $K^* \neq K$, 将式
(5)中的 K 替换为 K^* , 相应得到两个映射 F^* 和
 U^* , 由定理 1 可知, 存在 $x_1 = x_1(t) \in X$ 和 $x_2 =$
 $x_2(t) \in X$, 满足 $Fx_1 + Ux_1 = x_1$, $F^*x_2 + U^*x_2 = x_2$,
即 $x_1 = x_1(t)$ 和 $x_2 = x_2(t)$ 为方程(1)的有界正解。
由于区间 $[K_1, K_2]$ 是不可数集, 要证明方程(1)存
在不可数个正解, 仅需证明当 $K^* \neq K$ 时, $x_1 \neq x_2$ 。

事实上, 当 $t > t_1$ 时有

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| = & \left| K + p(t)x_1(\delta(t)) - \right. \\ & \left. \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) f(x_1(\sigma(s))) ds dr - \right. \\ & \left. K^* - p(t)x_2(\delta(t)) + \right. \\ & \left. \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) f(x_2(\sigma(s))) ds dr \right| = \\ & \left| K - K^* + p(t)[x_1(\delta(t)) - x_2(\delta(t))] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) [f(x_1(\sigma(s))) - f(x_2(\sigma(s)))] ds dr \right| \geq \\ & |K - K^*| - p(t) |x_1(\delta(t)) - x_2(\delta(t))| - \\ & \left| \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) [f(x_1(\sigma(s))) - f(x_2(\sigma(s)))] ds dr \right| \geq |K - K^*| - p(t)x_1 - x_2 - \\ & \left| \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) [f(x_1(\sigma(s))) - f(x_2(\sigma(s)))] ds dr \right| \geq |K - K^*| - \lambda x_1 - x_2 - \\ & \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) [f(x_1(\sigma(s))) + f(x_2(\sigma(s)))] ds dr, \end{aligned}$$

由此不等式进一步可以得到:

$$(1 + \lambda)x_1 - x_2 \geq |K - K^*| - \int_t^\infty \int_{t_0}^r q(t, \gamma(s)) [f(x_1(\sigma(s))) + f(x_2(\sigma(s)))] ds dr.$$

因为 $\int_{t_1}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds dr$ 收敛, 则存在 $t_2 > t_1$ 有

$$\int_{t_2}^\infty \int_{t_0}^r q(r, \gamma(s)) [f(x_1(\sigma(s))) + f(x_2(\sigma(s)))] ds dr < |K - K^*|,$$

则当 $t \geq t_2 > t_1$ 有 $x_1 \neq x_2$ 。因此, 方程(1)存在不可数个正解, 且介于 u, v 之间。

2 结论应用

例: 考查下列 Volterra 型积分微分方程:

$$[x(t) - p(t)x(\delta(t))]'' = \int_{t_0}^t q(t, \gamma(s)) f(x(\sigma(s))) ds, \quad t \geq t_0. \quad (9)$$

这里 $t_0 = 1, t_1 = 4, \delta(t) = \gamma(t) = \sigma(t) = t - 1, q(t, s) = e^{-t-s}, f(x(t)) = x^2(t)$ 。接着取 $u(t) = e^{-t}, v(t) = e^t + 2e^{-t}, t \geq 1$ 。验证方程(9)满足条件 $(H_1), (H_2)$ 和 (H_3) 。显然

$$u(t) \leq v(t), t \geq 1,$$

$$v(t) - v(t_1) \geq u(t) - u(t_1), 1 \leq t \leq 4.$$

进一步取常数 $K_1 = 1, K_2 = e - 1$ 。当 $t \geq 4$ 时, 有

$$e^{-1}(1 - e^t + e^3 + 6e^{3-t} + 4e^{3-2t}) \leq p(t) \leq e^{-1} + \frac{e^{3-4t}}{3(1 + 3e^{-t})}, \quad (10)$$

因不等式(10)左边小于0, 故不等式(10)成立是必然的。于是方程(9)有不可数个有界正解。

参考文献:

- [1] 陈凤德. 具无限时滞的非线性积分微分方程的周期解[J]. 应用数学学报, 2003, 26(1):141-148.
- [2] 胡猛, 吕海燕. 时标上具时滞积分-微分方程正解的存在性与稳定性(英文)[J]. 应用数学, 2021, 34(1):194-203.
- [3] 刘怡建. 一类中立型积分微分方程的概周期解[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2021, 42(4):16-20.
- [4] Darwish A, Banas J, Alzahrani O. The existence and attractivity of solutions of an Urysohn integral equation on an unbounded interval[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 10:1-10.
- [5] 罗志敏. 含偏差变元 Volterra 型积分方程解的存在性与渐近性[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2014, 13(2):15-18.
- [6] 叶陆红, 杨海洋. 一类特殊的 Volterra 型积分方程的解的存在性[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2015, 21(2):7-9.
- [7] Bozna D, Martina K, Rudolf O. Uncountably many solutions of first-order neutral nonlinear differential equations[J]. Advances in Difference Equations, 2013, 140(1):1-8.
- [8] 郑伟删. 带线性延迟项的 Volterra 积分方程研究(英文)[J]. 湖南师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(4):83-88.
- [9] Gu Z, Chen Y. Chebyshev spectral collocation method for Volterra integral equations[J]. Contemporary Mathematics, 2013, 586:163-170.
- [10] Zhou Y. Existence for nonoscillatory solutions of second-order nonlinear differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331:91-96.

【责任编辑:卓祯雨】