文章编号:1671-4229(2023)02-0064-13

关于几类四维 F-流形代数结构的讨论

陈家辉
(广州大学 数学与信息科学学院,广东 广州　510006)

摘　要: F-流形代数是代数学中的一个重要研究内容。作为一种新型的代数结构,F-流形代数不同于传统的向量空间,它是同时具有交换结合代数和李代数两种代数运算,并且满足 Hertling-Manin 关系的代数结构。泊松代数是一类重要的 F-流形代数,在数学、数学物理、金融和医学等各个领域都有重大研究成果,而关于 F-流形代数的研究才刚刚开始,所以 F-流形代数仍具有极大的研究价值。现阶段,低维($1\leqslant n\leqslant 3$)F-流形代数的分类问题已得到解决,但高维($n\geqslant 4$)的 F-流形代数的分类研究没有得到确切的结果,仍有待更多学者们深入研究。为此,文章在已知复数域上四维交换结合代数分类的基础上,结合李代数性质来研究几类四维 F-流形代数的结构。

关键词: F-流形代数; 交换结合代数; 李代数; Hertling-Manin 关系
中图分类号: O 187.2　　**文献标志码:** A

The discussion of some algebraic structures of four dimensional F-manifolds

CHEN Jia-hui
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: F-manifold algebras are an important subject in algebra. As a new algebraic structure, F-manifold algebras are different from the traditional vector space. It has both commutative associative algebra and Lie algebra, and satisfies the Hertling-Manin relation. Poisson algebras are a kind of important F-manifold algebras, which have made significant research achievements in various fields such as mathematics, mathematical physics, finance and medicine. However, F-manifold algebras have just begun to be researched, so F-manifold algebras still have great research value. At present, the classification problem of F-manifold algebras of lower dimensions ($1\leqslant n\leqslant 3$) has been solved, but the classification problem of F-manifold algebras of higher dimensions ($n\geqslant 4$) has not achieved an exact result, and still needs further study by more scholars. Therefore, on the basis of the known classification of four-dimensional commutative associative algebras and combined with the properties of Lie algebras over complex fields, this paper studies the structures of some four dimensional F-manifold algebras.

Key words: F-manifold algebra; commutative associative algebra; Lie algebra; Hertling-Manin relation

近年来,F-流形代数在代数学研究中逐渐成为了一个研究热点。作为一种新型的代数结构,F-流形代数不同于传统的向量空间,它是具有良好且应用广泛的交换结合代数和李代数两种代数运算的代数结构。

Dubrovin[1] 早在 1994 年就从几何的角度研究 Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde 方程,并引入了 Frobenius 流形的概念。而 Frobenius 流形具有很好的几何性质,除了从纯数学的角度来看之外,在数学和理论物理学领域也发挥了很大作用,如奇

收稿日期: 2022-02-23; **修回日期:** 2022-03-21
作者简介: 陈家辉(1995—),男,硕士研究生. E-mail:1876573392@qq.com.
引文格式: 陈家辉. 关于几类四维 F-流形代数结构的讨论[J]. 广州大学学报(自然科学版),2023,22(2):64-76.

点理论[2]、可积系统[3-5]等。与此同时,许多学者在雅可比群的轨道空间[6-7],阿贝尔积分空间[8]和 Toda 的晶格层次结构[9]中研究 Frobenius 流形结构,使 Frobenius 流形得到进一步发展。

Hertling 等[10]在 1999 年通过弱化 Frobenius 流形的条件,引入 F-流形的概念。作为 F-流形的延伸和拓展,F-流形代数的发展尚未成熟,仍存在着极大的研究空间,这使得 F-流形代数在近年来成为学者的热门研究方向之一。现阶段,F-流形代数在数学的许多领域发挥着重要作用[11-12]。为了研究 F-流形代数的结构和性质,文献[13]引入了预 F-流形代数和对偶预 F-流形代数,在一定条件下,证明了预 F-流形代数就是 F-流形代数。反过来,利用 F-流形代数上的 Rota-Baxter 算子和平均算子来构造预 F-流形代数和对偶预 F-流形代数。对于低维的 F-流形代数的分类,已经被许多学者广泛研究。泊松代数是 F-流形代数的一个重要特殊形式。目前,关于泊松代数的研究已经吸引了国际上许多学者的注意,并且取得一系列有意义的成果[14-17]。特别地,对于泊松代数的分类,文献[18]研究了二维流形或仿射簇上的三维流形上的泊松结构并给出其分类结果。由于泊松代数吸引了国际上许多学者的研究,对推动泊松代数在数学、数学物理、互联网金融和医学等研究领域深入发展有着深刻影响。现如今,泊松代数分类的重要性已经在许多学者的研究范围中得到体现。

F-流形代数作为泊松代数的自然推广,其分类已经变得迫在眉睫。在这个研究方向上,本文按照泊松代数分类的构架,在已知复数域上的四维交换结合代数分类基础上,研究了部分四维 F-流形代数的结构。

本文的组织结构如下:第一节回顾在复数域上的四维交换结合代数的结构,以及李代数和 F-流形代数的定义;第二节讨论复数域上的 5 类四维 F-流形代数结构,并探索其分类及相关结果。

1　预备知识

首先回顾四维交换结合代数的定义。

定义 1　设 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 是交换结合代数 $(A,\cdot)$ 的一组基,其中 $e_i\cdot e_j=\sum_{k=1}^{4}a_{ij}^{k}e_k$,$(A,\cdot)$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{4}a_{11}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{12}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{13}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{14}^{k}e_k \\ \sum_{k=1}^{4}a_{21}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{22}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{23}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{24}^{k}e_k \\ \sum_{k=1}^{4}a_{31}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{32}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{33}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{34}^{k}e_k \\ \sum_{k=1}^{4}a_{41}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{42}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{43}^{k}e_k & \sum_{k=1}^{4}a_{44}^{k}e_k \end{pmatrix}。$$

在文献[19]中,Burde 等对复数域上的四维 Novikov 代数进行了分类。因为交换结合代数是一类特殊的 Novikov 代数,所以很自然地知道四维交换结合代数的分类。表 1 列出了将要讨论的 5 类交换结合代数。

表 1　复数域ℂ上的 5 类四维交换结合代数

Table 1　Five classes of four dimensinal commutative associative algebras over complex fields

代数	特征矩阵	代数	特征矩阵
$\tilde{A}_{3,3}$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\tilde{A}_1+A_{2,2}$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2\tilde{A}_0+A_{2,2}$	$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$2\tilde{A}_0+A_1$	$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 \end{pmatrix}$
$4\tilde{A}_0$	$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}$		

由于在接下来的计算中,需要用李代数的相关性质,为此,回顾李代数的定义。

定义 2[20]　设 A 是复数域ℂ上的向量空间,并设在 A 中定义了一个换位运算,即对于 A 中任意两个元素 X 和 Y,都有 A 中唯一的一个元素与之对应,这个元素记作 $[X,Y]$,称为 X 和 Y 的换位元素。如果这个换位运算满足以下条件:

$(L1)$ $[\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y]=\lambda_1[X_1,Y]+\lambda_2[X_2,Y]$,$\forall X_1,X_2,Y\in A$,$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$。

$(L2)$ $[X,Y]=-[Y,X]$,$\forall X,Y\in A$。

$(L3)$ $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$,$\forall X,Y,Z\in A$。

这时$(A,\cdot)$就称为复数域上的李代数,简称复李代数。

注记:根据李代数的定义,容易得到:

(ⅰ)$[X,\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2]=\lambda_1[X,Y_1]+\lambda_2[X,Y_2]$, $\forall X,Y_1,Y_2\in A$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$。

(ⅱ)$[X,X]=0$, $\forall X\in A$。

(ⅲ)$(L3)$称为 Jacobi 等式。

下面介绍 F-流形代数的定义。

定义 3[12] F-流形代数是一个三元$(A,\cdot,[\,,])$,其中$(A,\cdot)$是一个交换结合代数和$(A,[\,,])$是一个李代数,并且满足 Hertling-Manin 关系:

$$P_{x\cdot y}(w,v)=x\cdot P_y(w,v)+y\cdot P_x(w,v),\ \forall x,y,v,w\in A,$$

其中,$P_x(y,z)=[x,y\cdot z]-[x,y]\cdot z-y\cdot[x,z]$, $\forall x,y,z\in A$。

2 复数域上的5类四维F-流形代数结构的计算

设$(A,\cdot,[\,,])$是一个F-流形代数,其中$(A,\cdot)$是一个以$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$为基的交换结合代数和$(A,[\,,])$是一个李代数。在表1中的5类交换结合代数的基础上,研究对应的F-流形代数的结构。根据F-流形代数的定义,容易得到:$(A,\cdot,[\,,])$是一个F-流形代数当且仅当$(A,\cdot)$是一个交换结合代数和$(A,[\,,])$是一个李代数,并且满足 Hertling-Manin 关系:

$$P_{e_i\cdot e_j}(e_k,e_l)=e_i\cdot P_{e_j}(e_k,e_l)+e_j\cdot P_{e_i}(e_k,e_l),\quad 1\leqslant i,j,k,l\leqslant 4。$$

2.1 交换结合代数 $\tilde{A}_{3,3}$

设$\tilde{A}_{3,3}$的一组基$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$,满足$e_1^2=e_1$, $e_1\cdot e_2=e_2$, $e_1\cdot e_3=e_3$, $e_1\cdot e_4=e_4$, $e_2^2=e_3$, $e_2\cdot e_3=e_4$,其余为零。下面给出$(\tilde{A}_{3,3},\cdot,[\,,])$是一个F-流形代数的等价条件。

引理1 $(\tilde{A}_{3,3},\cdot,[\,,])$是一个F-流形代数当且仅当对任意的$1\leqslant k,l\leqslant 4$有

$$\begin{cases}P_{e_1}(e_k,e_l)=0,P_{e_3}(e_k,e_l)=2e_2\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ P_{e_4}(e_k,e_l)=3e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),e_4\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0,\\ e_3\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_4\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=0。\end{cases}$$

其中,$(\tilde{A}_{3,3},\cdot)$是一个交换结合代数,$(\tilde{A}_{3,3},[\,,])$是一个李代数。

证明 根据表1中给出的$(\tilde{A}_{3,3},\cdot)$的特征矩阵以及定义3,得到$(\tilde{A}_{3,3},\cdot,[\,,])$是一个F-流形代数当且仅当对任意的$1\leqslant k,l\leqslant 4$有

$$\begin{cases}P_{e_1}(e_k,e_l)=2e_1\cdot P_{e_1}(e_k,e_l),P_{e_3}(e_k,e_l)=\\ \quad 2e_2\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ P_{e_2}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)+e_2\cdot P_{e_1}(e_k,e_l),\\ P_{e_3}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)+e_3\cdot P_{e_1}(e_k,e_l),\\ P_{e_4}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)+e_4\cdot P_{e_1}(e_k,e_l),\\ P_{e_4}(e_k,e_l)=e_2\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)+e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ e_2\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)+e_4\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0,e_3\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=0,\\ e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)+e_4\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=0,e_4\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=0。\end{cases}\tag{1}$$

其中,$(\tilde{A}_{3,3},\cdot)$是一个交换结合代数,$(\tilde{A}_{3,3},[\,,])$是一个李代数。

因为$e_1\cdot e_i=e_i(1\leqslant i\leqslant 4)$, $e_2^2=e_3$, $e_2\cdot e_3=e_4$,所以有

(i)$P_{e_1}(e_k,e_l)=2e_1\cdot P_{e_1}(e_k,e_l)=2P_{e_1}(e_k,e_l)$ $\Leftrightarrow P_{e_1}(e_k,e_l)=0$。

(ii)由(i)可知,

$$\begin{cases}P_{e_2}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)+e_2\cdot P_{e_1}(e_k,e_l),\\ P_{e_3}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)+e_3\cdot P_{e_1}(e_k,e_l),\\ P_{e_4}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)+e_4\cdot P_{e_1}(e_k,e_l)。\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P_{e_2}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ P_{e_3}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_3}(e_k,e_l),\\ P_{e_4}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)。\end{cases}\tag{2}$$

由于$e_1\cdot e_i=e_i(1\leqslant i\leqslant 4)$,故等式(2)恒成立。

(iii)将$P_{e_3}(e_k,e_l)=2e_2\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)$代入下列等式

$$\begin{cases}P_{e_4}(e_k,e_l)=e_2\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)+e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)+e_4\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=0。\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P_{e_4}(e_k,e_l)=3e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=0。\end{cases}$$

将$P_{e_4}(e_k,e_l)=3e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)$代入下列等式

$$e_2\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)+e_4\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0\Leftrightarrow e_4\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0。$$

由(i)、(ii)、(iii),可以得到

等式(1)$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}P_{e_1}(e_k,e_l)=0,P_{e_3}(e_k,e_l)=2e_2\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\ P_{e_4}(e_k,e_l)=3e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),e_4\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0,\\ e_3\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_4\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=0。\end{cases}$$

证毕。

此引理的证明把$(\tilde{A}_{3,3},\cdot)$的特征矩阵转化为满足 Hertling-Manin 关系的等式。这一引理对讨论 F-流形代数的分类问题起了至关重要的作用。由引理 1,可以证明下面的结果。

引理 2　$(\tilde{A}_{3,3},\cdot,[\,,])$是一个 F-流形代数当且仅当

$$\begin{cases} e_4\cdot[e_1,e_2]=e_3\cdot[e_1,e_3]=e_4\cdot[e_1,e_3]=0,\\ e_2\cdot[e_1,e_4]=e_3\cdot[e_1,e_4]=e_4\cdot[e_1,e_4]=0,\\ e_4\cdot[e_2,e_3]=e_4\cdot[e_2,e_4]=e_3\cdot[e_3,e_4]=\\ \quad e_4\cdot[e_3,e_4]=0,\\ [e_1,e_3]=2e_2\cdot[e_1,e_2],[e_1,e_4]=3e_3\cdot[e_1,e_2],\\ [e_3,e_4]+3e_3\cdot[e_2,e_3]=2e_2\cdot[e_2,e_4],\\ e_2\cdot[e_3,e_4]=2e_3\cdot[e_2,e_4],e_2\cdot[e_1,e_3]=\\ \quad 2e_3\cdot[e_1,e_2]。\end{cases}$$

其中,$(\tilde{A}_{3,3},\cdot)$是一个交换结合代数,$(\tilde{A}_{3,3},[\,,])$是一个李代数。

证明　根据$P_{e_i}(e_k,e_l)=[e_i,e_k\cdot e_l]-e_k\cdot[e_i,e_l]-e_l\cdot[e_i,e_k]$可知,对任意的$1\leqslant k,l\leqslant 4$有

$$P_{e_i}(e_k,e_l)=\begin{cases} [e_i,e_1]-2e_1\cdot[e_i,e_1],k=1,l=1,\\ [e_i,e_2]-e_1\cdot[e_i,e_2]-e_2\cdot[e_i,e_1],k=1,l=2,\\ [e_i,e_3]-e_1\cdot[e_i,e_3]-e_3\cdot[e_i,e_1],k=1,l=3,\\ [e_i,e_4]-e_1\cdot[e_i,e_4]-e_4\cdot[e_i,e_1],k=1,l=4,\\ [e_i,e_3]-2e_2\cdot[e_i,e_2],k=2,l=2,\\ [e_i,e_4]-e_2\cdot[e_i,e_3]-e_3\cdot[e_i,e_2],k=2,l=3,\\ -e_2\cdot[e_i,e_4]-e_4\cdot[e_i,e_2],k=2,l=4,\\ -2e_3\cdot[e_i,e_3],k=3,l=3,\\ -e_3\cdot[e_i,e_4]-e_4\cdot[e_i,e_3],k=3,l=4,\\ -2e_4\cdot[e_i,e_4],k=4,l=4。\end{cases} \tag{3}$$

由引理 1 的充要条件和等式(3),经过计算,整理得到

$$\begin{cases} e_4\cdot[e_1,e_2]=e_3\cdot[e_1,e_3]=e_4\cdot[e_1,e_3]=0,\\ e_2\cdot[e_1,e_4]=e_3\cdot[e_1,e_4]=e_4\cdot[e_1,e_4]=0,\\ e_4\cdot[e_2,e_3]=e_4\cdot[e_2,e_4]=e_3\cdot[e_3,e_4]=\\ \quad e_4\cdot[e_3,e_4]=0,\\ [e_1,e_3]=2e_2\cdot[e_1,e_2],[e_1,e_4]=3e_3\cdot[e_1,e_2],\\ [e_3,e_4]+3e_3\cdot[e_2,e_3]=2e_2\cdot[e_2,e_4],\\ e_2\cdot[e_3,e_4]=2e_3\cdot[e_2,e_4],e_2\cdot[e_1,e_3]=\\ \quad 2e_3\cdot[e_1,e_2]。\end{cases}$$

证毕。

此引理的证明进一步把 F-流形代数与李括号联系起来。通过定义$e_i(1\leqslant i\leqslant 4)$的李括号,经过计算得到 F-流形代数满足李括号的结构常数,这样就可以对满足李括号的结构常数进行分类讨论。设李括号为

$$[e_1,e_2]=\sum_{i=1}^4 a_ie_i,[e_1,e_3]=\sum_{i=1}^4 b_ie_i,[e_1,e_4]=\sum_{i=1}^4 c_ie_i,[e_2,e_3]=\sum_{i=1}^4 d_ie_i,[e_2,e_4]=\sum_{i=1}^4 f_ie_i,[e_3,e_4]=\sum_{i=1}^4 h_ie_i,$$

其中,$a_i,b_i,c_i,d_i,f_i,h_i\in\mathbb{C}(i=1,2,3,4)$。

由引理 2 并结合上面的李括号,可以证明下面的结论。

定理 1　$(\tilde{A}_{3,3},\cdot,[\,,])$是一个 F-流形代数当且仅当其李括号的结构常数满足

$$\begin{cases} a_2d_2+a_3f_2=0,a_3d_2-2a_3f_3-a_2d_3+2a_4f_2=0,\\ a_3d_3-a_3f_4+a_4f_3-a_4d_2=0,2f_2f_3-d_2f_2=0,\\ 2f_3^2-4d_2f_3+d_3f_2-2f_2f_4=0,\\ 3d_4f_2-d_2f_4-2d_3f_3+3d_2d_3=0,\\ a_2f_2=0,-2a_2f_3+3a_2d_2+2a_3f_2=0,\\ a_3f_2+2a_2f_3=0,-a_2f_4+3a_3d_2+a_4f_2=0。\end{cases}$$

证明　由引理 2 可以得到

$$\begin{cases} a_1=b_1=b_2=0,b_3=2a_2,b_4=2a_3,\\ c_1=c_2=c_3=0,c_4=3a_2,d_1=f_1=0,\\ h_1=h_2=0,h_3=2f_2,h_4=2f_3-3d_2。\end{cases} \tag{4}$$

将等式(4)代入所定义的李括号可得

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4,[e_1,e_3]=\\ \quad 2a_2e_3+2a_3e_4,\\ [e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\ [e_2,e_4]=f_2e_2+f_3e_3+f_4e_4,[e_3,e_4]=\\ \quad 2f_2e_3+(2f_3-3d_2)e_4。\end{cases} \tag{5}$$

将等式(5)代入 Jacobi 等式,整理得到

$$\begin{cases} a_2d_2+a_3f_2=0,a_3d_2-2a_3f_3-a_2d_3+2a_4f_2=0,\\ a_3d_3-a_3f_4+a_4f_3-a_4d_2=0,2f_2f_3-d_2f_2=0,\\ 2f_3^2-4d_2f_3+d_3f_2-2f_2f_4=0,\\ 3d_4f_2-d_2f_4-2d_3f_3+3d_2d_3=0,\\ a_2f_2=0,-2a_2f_3+3a_2d_2+2a_3f_2=0,\\ a_3f_2+2a_2f_3=0,-a_2f_4+3a_3d_2+a_4f_2=0。\end{cases}$$

证毕。

下面讨论 F-流形代数中的李代数导代数维数,为此,需要对定理1中李代数的结构常数进行讨论。设导代数维数为 m。

(1)当 $a_3=0,f_2=0$ 时,有

$$\begin{cases}a_2d_2=0,a_2d_3=0,a_4f_3-a_4d_2=0,f_3^2-2d_2f_3=0,\\-d_2f_4-2d_3f_3+3d_2d_3=0,-2a_2f_3+3a_2d_2=0,\\a_2f_3=0,a_2f_4=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_4e_4,[e_1,e_3]=2a_2e_3,\\[e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\[e_2,e_4]=f_3e_3+f_4e_4,[e_3,e_4]=(2f_3-3d_2)e_4。\end{cases}$$

(i)当 $a_2=0,f_3=0$ 时,有 $a_4d_2=0,-d_2f_4+3d_2d_3=0$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_4e_4,[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_4]=\\f_4e_4,\\[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,[e_3,e_4]=-3d_2e_4。\end{cases}$$

(a)当 $d_2=0$ 时,有

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_4e_4,[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,\\[e_2,e_3]=d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=f_4e_4,[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$$([e_1,e_2],[e_2,e_3],[e_2,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&d_3&0\\a_4&d_4&f_4\end{pmatrix},$$

所以,$0\leqslant m\leqslant 2$。

(b)当 $d_2\neq 0$ 时,有 $a_4=0,f_4=3d_3$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_4]=3d_3e_4,\\[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,[e_3,e_4]=-3d_2e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\d_2&0&0\\d_3&0&0\\d_4&3d_3&-3d_2\end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\d_2&0&0\\d_3&0&0\\d_4&3d_3&-3d_2\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{d_4}{d_2}\cdot(2)+(4)]{-\frac{d_3}{d_2}\cdot(2)+(3)}\begin{pmatrix}0&0&0\\d_2&0&0\\0&0&0\\0&3d_3&-3d_2\end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(ii)当 $a_2\neq 0,f_3=0$ 时,有 $d_2=d_3=f_4=0$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_4e_4,[e_1,e_3]=2a_2e_3,\\[e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_4e_4,[e_2,e_4]=\\\quad[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a_2&0&0&0\\0&2a_2&0&0\\a_4&0&3a_2&d_4\end{pmatrix},$$

所以,$m=3$。

(iii)当 $a_2=0,f_3\neq 0$ 时,有 $a_4=0,d_2=\frac{f_3}{2},f_4=-d_3$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=\\\quad\frac{f_3}{2}e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\[e_2,e_4]=f_3e_3-d_3e_4,[e_3,e_4]=\frac{f_3}{2}e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\\frac{1}{2}f_3&0&0\\d_3&f_3&0\\d_4&-d_3&\frac{1}{2}f_3\end{pmatrix},$$

所以,$m=3$。

(iv)当 $a_2\neq 0,f_3\neq 0$ 时,但 $a_2f_3=0$,矛盾。

(2)当 $a_3\neq 0,f_2=0$ 时,有

$$\begin{cases}a_2d_2=0,a_3d_2-2a_3f_3-a_2d_3=0,a_3d_3-a_3f_4+\\\quad a_4f_3-a_4d_2=0,\\f_3^2-2d_2f_3=0,-d_2f_4-2d_3f_3+3d_2d_3=0,\\-2a_2f_3+3a_2d_2=0,a_2f_3=0,-a_2f_4+3a_3d_2=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4,[e_1,e_3]=\\ \quad 2a_2e_3+2a_3e_4,[e_1,e_4]=3a_2e_4,\\ [e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=\\ \quad f_3e_3+f_4e_4,[e_3,e_4]=(2f_3-3d_2)e_4。\end{cases}$$

(i)当 $d_2=0,f_3=0$ 时,有 $a_2d_3=0,f_4=d_3$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4,[e_1,e_3]=\\ \quad 2a_2e_3+2a_3e_4,\\ [e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=\\ \quad f_4e_4,[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

(a)当 $d_3=0$ 时,有 $f_4=0$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4,[e_1,e_3]=\\ \quad 2a_2e_3+2a_3e_4,\\ [e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_4e_4,[e_2,e_4]=\\ \quad [e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ a_2&0&0&0\\ a_3&2a_2&0&0\\ a_4&3a_3&3a_2&d_4\end{pmatrix},$$

所以,$2\leqslant m\leqslant 3$。

(b)当 $d_3\neq 0$ 时,有 $a_2=0,f_4=d_3$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_3e_3+a_4e_4,[e_1,e_3]=2a_3e_4,\\ \quad [e_1,e_4]=0,\\ [e_2,e_3]=d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=d_3e_4,\\ \quad [e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_2,e_3],[e_2,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ a_3&0&d_3&0\\ a_4&2a_3&d_4&d_3\end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(ii)当 $d_2\neq 0,f_3=0$ 时,但

$$\begin{cases}a_2d_2=0,\\ a_3d_2-2a_3f_3-a_2d_3=0。\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=0,\\ a_3d_2-a_2d_3=0。\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3d_2=0\Rightarrow a_3=0,$$

与 $a_3\neq 0$ 矛盾。

(iii)当 $d_2=0,f_3\neq 0$ 时,但 $f_3^2-2d_2f_3=0\Rightarrow f_3^2=0\Rightarrow f_3=0$,矛盾。

(iv)当 $d_2\neq 0,f_3\neq 0$ 时,但

$$\begin{cases}a_2f_3=0,\\ -a_2f_4+3a_3d_2=0。\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=0,\\ -a_2f_4+3a_3d_2=0。\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3d_2=0\Rightarrow a_3=0,$$

与 $a_3\neq 0$ 矛盾。

(3)当 $a_3=0,f_2\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases}d_2=2f_3,\ -6f_3^2+d_3f_2-2f_2f_4=0,\\ 3d_4f_2-2f_3f_4+4d_3f_3=0,a_2=a_4=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_4e_4,[e_1,e_3]=2a_2e_3,\\ [e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\ [e_2,e_4]=f_2e_2+f_3e_3+f_4e_4,[e_3,e_4]=2f_2e_3+\\ \quad (2f_3-3d_2)e_4。\end{cases}$$

(i)当 $f_3=0,f_4=0$ 时,有 $a_2=a_4=d_2=d_3=d_4=0$。故

$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=[e_2,e_3]=0$,$[e_2,e_4]=f_2e_2,[e_3,e_4]=2f_2e_3$。

所以,$m=2$。

(ii)当 $f_3\neq 0,f_4=0$ 时,有

$$\begin{cases}d_2=2f_3,\ -6f_3^2+d_3f_2=0,\\ 3d_4f_2+4d_3f_3=0,a_2=a_4=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2+a_4e_4,[e_1,e_3]=2a_2e_3,\\ [e_1,e_4]=3a_2e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\ [e_2,e_4]=f_2e_2+f_3e_3,[e_3,e_4]=2f_2e_3+(2f_3-3d_2)e_4。\end{cases}$$

(a)当 $d_3=0$ 时,但 $-6f_3^2+d_3f_2=0\Rightarrow f_3^2=0$,与 $f_3\neq 0$ 矛盾。

(b)当 $d_3\neq 0$ 时,有 $a_2=a_4=0,d_2=2f_3,d_4=-\dfrac{2d_3^2}{9f_3},f_2=\dfrac{6f_3^2}{d_3}$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=\\ \quad 2f_3e_2+d_3e_3-\dfrac{2d_3^2}{9f_3}e_4,\\ [e_2,e_4]=\dfrac{6f_3^2}{d_3}e_2+f_3e_3,[e_3,e_4]=\dfrac{12f_3^2}{d_3}e_3-4f_3e_4。\end{cases}$$

因为

$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4]) =$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & \frac{6f_3^2}{d_3} & 0 \\ d_3 & f_3 & \frac{12f_3^2}{d_3} \\ -\frac{2d_3^2}{9f_3} & 0 & -4f_3 \end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & \frac{6f_3^2}{d_3} & 0 \\ d_3 & f_3 & \frac{12f_3^2}{d_3} \\ -\frac{2d_3^2}{9f_3} & 0 & -4f_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{d_3}{6f_3}\cdot(2)+(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & \frac{6f_3^2}{d_3} & 0 \\ \frac{2d_3}{3} & 0 & \frac{12f_3^2}{d_3} \\ -\frac{2d_3^2}{9f_3} & 0 & -4f_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{d_3}{4f_3}\cdot(3)+(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & \frac{6f_3^2}{d_3} & 0 \\ \frac{2d_3}{3} & 0 & \frac{12f_3^2}{d_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(iii)当 $f_3=0, f_4\neq 0$ 时,有 $a_2=a_4=d_2=d_4=0, d_3=2f_4$。故

$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0, [e_2,e_3]=2f_4e_3, [e_2,e_4]=f_2e_2+f_4e_4, [e_3,e_4]=2f_2e_3$。

因为

$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4]) =$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 2f_4 & 0 & 2f_2 \\ 0 & f_4 & 0 \end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 2f_4 & 0 & 2f_2 \\ 0 & f_4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{f_4}{f_2}\cdot(2)+(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 2f_4 & 0 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(iv)当 $f_3\neq 0, f_4\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases} d_2=2f_3,\ -6f_3^2+d_3f_2-2f_2f_4=0, \\ 3d_4f_2-2f_3f_4+4d_3f_3=0, a_2=a_4=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=a_2e_2+a_4e_4, [e_1,e_3]=2a_2e_3, \\ [e_1,e_4]=3a_2e_4, [e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4, \\ [e_2,e_4]=f_2e_2+f_3e_3+f_4e_4, [e_3,e_4]=2f_2e_3+ \\ \quad (2f_3-3d_2)e_4。\end{cases}$$

(a)当 $d_3=0$ 时,有 $a_2=a_4=0, d_2=2f_3, d_4=-\frac{2f_3^3}{f_2^2}, f_4=-\frac{3f_3^2}{f_2}$。

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0, [e_2,e_3]= \\ \quad 2f_3e_2-\frac{2f_3^3}{f_2^2}e_4, \\ [e_2,e_4]=f_2e_2+f_3e_3-\frac{3f_3^2}{f_2}e_4, [e_3,e_4]= \\ \quad 2f_2e_3-4f_3e_4。\end{cases}$$

因为

$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4]) =$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & f_2 & 0 \\ 0 & f_3 & 2f_2 \\ -\frac{2f_3^3}{f_2^2} & -\frac{3f_3^2}{f_2} & -4f_3 \end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & f_2 & 0 \\ 0 & f_3 & 2f_2 \\ -\frac{2f_3^3}{f_2^2} & -\frac{3f_3^2}{f_2} & -4f_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{2f_3}{f_2}\cdot(3)+(4)]{\frac{f_3^2}{f_2^2}\cdot(2)+(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2f_3 & f_2 & 0 \\ 0 & f_3 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(b)当 $d_3\neq 0$ 时,有 $a_2=a_4=0, d_2=2f_3, d_3=\frac{6f_3^2+2f_2f_4}{f_2}, d_4=-\frac{8f_3^3+2f_2f_3f_4}{f_2^2}$。

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0, \\ [e_2,e_3]=2f_3e_2+\frac{6f_3^2+2f_2f_4}{f_2}e_3-\frac{8f_3^3+2f_2f_3f_4}{f_2^2}e_4, \\ [e_2,e_4]=f_2e_2+f_3e_3+f_4e_4, [e_3,e_4]=2f_2e_3-4f_3e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\2f_3&f_2&0\\\dfrac{6f_3^2+2f_2f_4}{f_2}&f_3&2f_2\\-\dfrac{8f_3^3+2f_2f_3f_4}{f_2^2}&f_4&-4f_3\end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2f_3&f_2&0\\\dfrac{6f_3^2+2f_2f_4}{f_2}&f_3&2f_2\\-\dfrac{8f_3^3+2f_2f_3f_4}{f_2^2}&f_4&-4f_3\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{f_3}{f_2}\cdot(2)+(3)}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2f_3&f_2&0\\\dfrac{4f_3^2+2f_2f_4}{f_2}&0&2f_2\\-\dfrac{8f_3^3+2f_2f_3f_4}{f_2^2}&f_4&-4f_3\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{2f_3}{f_2}\cdot(3)+(4)}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2f_3&f_2&0\\\dfrac{4f_3^2+2f_2f_4}{f_2}&0&2f_2\\\dfrac{2f_3f_4}{f_2}&f_4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{f_4}{f_2}\cdot(2)+(4)}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2f_3&f_2&0\\\dfrac{4f_3^2+2f_2f_4}{f_2}&0&2f_2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(4)当 $a_3\neq0,f_2\neq0$ 时,但

$$\begin{cases}a_2f_2=0,\\-2a_2f_3+3a_2d_2+2a_3f_2=0。\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=0,\\a_3f_2=0。\end{cases},矛盾。$$

2.2 其他 4 类交换结合代数

设$[e_1,e_2]=\sum\limits_{i=1}^4a_ie_i,[e_1,e_3]=\sum\limits_{i=1}^4b_ie_i,[e_1,e_4]=\sum\limits_{i=1}^4c_ie_i,[e_2,e_3]=\sum\limits_{i=1}^4d_ie_i,[e_2,e_4]=\sum\limits_{i=1}^4f_ie_i,[e_3,e_4]=\sum\limits_{i=1}^4h_ie_i$,其中 $a_i,b_i,c_i,d_i,f_i,h_i\in\mathbb{C}(i=1,2,3,4)$。

下面列出$(A,\cdot,[\,,\,])$是一个 F-流形代数的充要条件,其中,$(A,\cdot)$(除了$(\tilde{A}_{3,3},\cdot)$)是表 1 中列出的交换结合代数,$[\,,\,]$是 A 上的李括号。在接下来讨论李代数的结构常数中,设导代数维数为 m。

(1)$(\tilde{A}_1+A_{2,2},\cdot,[\,,\,])$是一个 F-流形代数当且仅当对任意的 $1\leqslant k,l\leqslant4$ 有

$$\begin{cases}P_{e_1}(e_k,e_l)=0,P_{e_2}(e_k,e_l)=e_1\cdot P_{e_2}(e_k,e_l),\\P_{e_4}(e_k,e_l)=2e_3\cdot P_{e_3}(e_k,e_l),e_1\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=0,\\e_2\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0,e_2\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)+e_3\cdot P_{e_2}(e_k,e_l)=0,\\e_1\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_2\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=0。\end{cases}$$

其中,$(\tilde{A}_1+A_{2,2},\cdot)$是一个交换结合代数,$(\tilde{A}_1+A_{2,2},[\,,\,])$是一个李代数。这等价于下面的一组等式

$$\begin{cases}b_3d_2+b_4f_2=0,a_2d_3=0,\\b_3d_4-b_4d_3-a_2d_4=0,d_2h_3+f_2h_4=0,\\d_3f_2-2d_3h_3=0,d_4h_3+d_4f_2-2d_2d_3-d_3h_4=0,\\b_3h_3=0,-b_3h_4+b_4h_3=0,b_3f_2=0。\end{cases}$$

为了得到 F-流形代数中的李代数导代数维数,需要对李代数的结构常数进行讨论。

(Ⅰ)当 $h_3=0,h_4=0$ 时,有

$$\begin{cases}b_3d_2+b_4f_2=0,a_2d_3=0,b_3d_4-b_4d_3-a_2d_4=0,\\d_3f_2=0,d_4f_2-2d_2d_3=0,b_3f_2=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,\\\quad[e_1,e_4]=2b_3e_4,\\[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=\\\quad f_2e_2+2d_3e_4,[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

(i)当 $f_2=0,d_3=0$ 时,有 $b_3d_2=0,b_3d_4-a_2d_4=0$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,\\\quad[e_1,e_4]=2b_3e_4,\\[e_2,e_3]=d_2e_2+d_4e_4,[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

(a)当 $b_3=0,d_4=0$ 时,有

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_4e_4,[e_1,e_4]=0,\\[e_2,e_3]=d_2e_2,[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_2,e_3])=$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\a_2&0&d_2\\0&0&0\\0&b_4&0\end{pmatrix},$$

所以,$0\leqslant m\leqslant 2$。

(b)当 $b_3\neq 0,d_4=0$ 时,有 $d_2=0$。

故$[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,[e_1,e_4]=2b_3e_4,[e_2,e_3]=[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0$。

因为

$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_1,e_4])=$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\a_2&0&0\\0&b_3&0\\0&b_4&2b_3\end{pmatrix},$$

所以,$2\leqslant m\leqslant 3$。

(c)当 $b_3=0,d_4\neq 0$ 时,有 $a_2=0$。

故$[e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_4e_4,[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_4e_4,[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0$。
所以,$1\leqslant m\leqslant 2$。

(d)当 $b_3\neq 0,d_4\neq 0$ 时,有 $a_2=b_3,d_2=0$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=b_3e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,\\ \quad [e_1,e_4]=2b_3e_4,\\ [e_2,e_3]=d_4e_4,[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3])=$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\b_3&0&0&0\\0&b_3&0&0\\0&b_4&2b_3&d_4\end{pmatrix},$$

所以,$m=3$。

(ii)当 $f_2\neq 0,d_3=0$ 时,有 $b_3=b_4=d_4=0$。

故$[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_2e_2,[e_2,e_4]=f_2e_2,[e_3,e_4]=0$。
所以,$m=1$。

(iii)当 $f_2=0,d_3\neq 0$ 时,有 $a_2=0,b_4=\dfrac{b_3d_4}{d_3},d_2=0$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_3e_3+\dfrac{b_3d_4}{d_3}e_4,\\ \quad [e_1,e_4]=2b_3e_4,\\ [e_2,e_3]=d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=2d_3e_4,\\ \quad [e_3,e_4]=0。\end{cases}$$

因为

$([e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3],[e_2,e_4])=$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\b_3&0&d_3&0\\\dfrac{b_3d_4}{d_3}&2b_3&d_4&2d_3\end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(iv)当 $f_2\neq 0,d_3\neq 0$ 时,但 $d_3f_2=0$,矛盾。

(II)当 $h_3\neq 0,h_4=0$ 时,有

$$\begin{cases}a_2d_3=0,a_2d_4=0,d_2=b_3=b_4=0,\\ d_3f_2-2d_3h_3=0,d_4h_3+d_4f_2=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,\\ [e_1,e_4]=2b_3e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\ [e_2,e_4]=f_2e_2+2d_3e_4,[e_3,e_4]=h_3e_3。\end{cases}$$

(i)当 $d_3=0,d_4=0$ 时,有 $b_3=b_4=d_2=0$。

故$[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=[e_2,e_3]=0,[e_2,e_4]=f_2e_2,[e_3,e_4]=h_3e_3$。

因为

$([e_1,e_2],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\a_2&f_2&0\\0&0&h_3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以,$1\leqslant m\leqslant 2$。

(ii)当 $d_3\neq 0,d_4=0$ 时,有 $a_2=b_3=b_4=d_2=0,f_2=2h_3$。

故$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_3e_3,[e_2,e_4]=2h_3e_2+2d_3e_4,[e_3,e_4]=h_3e_3$。

因为

$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2h_3&0\\d_3&0&h_3\\0&2d_3&0\end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h_3 & 0 \\ d_3 & 0 & h_3 \\ 0 & 2d_3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{h_3}{d_3}\cdot(4)+(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & h_3 \\ 0 & 2d_3 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(iii)当 $d_3=0,d_4\neq0$ 时,有 $a_2=b_3=b_4=d_2=0,f_2=-h_3$。

故$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_4e_4,[e_2,e_4]=-h_3e_2,[e_3,e_4]=h_3e_3$。

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \\ d_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,$m=3$。

(iv)当 $d_3\neq0,d_4\neq0$ 时,但

$$\begin{cases} d_3f_2-2d_3h_3=0, \\ d_4h_3+d_4f_2=0。\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_2-2h_3=0, \\ h_3+f_2=0。\end{cases} \Rightarrow h_3=0,$$

与 $h_3\neq0$ 矛盾。

(III)当 $h_3=0,h_4\neq0$ 时,有

$$\begin{cases} a_2d_3=0,b_4d_3+a_2d_4=0, \\ 2d_2d_3+d_3h_4=0,b_3=f_2=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4, \\ [e_1,e_4]=2b_3e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4, \\ [e_2,e_4]=f_2e_2+2d_3e_4,[e_3,e_4]=h_4e_4。\end{cases}$$

(i)当 $d_3=0,d_4=0$ 时,有 $b_3=f_2=0$。

故$[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_4e_4,[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_2e_2,[e_2,e_4]=0,[e_3,e_4]=h_4e_4$。

因为

$$([e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_2,e_3],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & h_4 \end{pmatrix},$$

所以,$1\leqslant m\leqslant2$。

(ii)当 $d_3\neq0,d_4=0$ 时,有 $a_2=b_3=b_4=0,d_2=-\frac{h_4}{2},f_2=0$。

故$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=-\frac{h_4}{2}e_2+d_3e_3,[e_2,e_4]=2d_3e_4,[e_3,e_4]=h_4e_4$。

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}h_4 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}h_4 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_3 & h_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{h_4}{2d_3}\cdot(3)+(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(iii)当 $d_3=0,d_4\neq0$ 时,有 $a_2=b_3=f_2=0$。

故$[e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_4e_4,[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_4e_4,[e_2,e_4]=0,[e_3,e_4]=h_4e_4$。

因为

$$([e_1,e_3],[e_2,e_3],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_4 & d_4 & h_4 \end{pmatrix},$$

所以,$1\leqslant m\leqslant2$。

(iv)当 $d_3\neq0,d_4\neq0$ 时,有 $a_2=b_3=b_4=f_2=0,h_4=-2d_2\neq0$。

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0, \\ [e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4, \\ [e_2,e_4]=2d_3e_4,[e_3,e_4]=-2d_2e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \\ d_4 & 2d_3 & -2d_2 \end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\d_2&0&0\\d_3&0&0\\d_4&2d_3&-2d_2\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{d_4}{d_3}\cdot(3)+(4)]{-\frac{d_2}{d_3}\cdot(3)+(2)}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\d_3&0&0\\0&2d_3&-2d_2\end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(Ⅳ)当 $h_3\neq0,h_4\neq0$ 时,有

$$\begin{cases}a_2d_3=0,a_2d_4=0,d_2h_3+f_2h_4=0,\\d_3f_2-2d_3h_3=0,b_3=b_4=0,\\d_4h_3+d_4f_2-2d_2d_3-d_3h_4=0。\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,\\[e_1,e_4]=2b_3e_4,[e_2,e_3]=d_2e_2+d_3e_3+d_4e_4,\\[e_2,e_4]=f_2e_2+2d_3e_4,[e_3,e_4]=h_3e_3+h_4e_4。\end{cases}$$

(i)当 $d_3=0,d_4=0$ 时,有 $b_3=b_4=0,f_2=-\frac{d_2h_3}{h_4}$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=a_2e_2,[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,\\\quad[e_2,e_3]=d_2e_2,\\[e_2,e_4]=-\frac{d_2h_3}{h_4}e_2,[e_3,e_4]=h_3e_3+h_4e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_1,e_2],[e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a_2&d_2&-\frac{d_2h_3}{h_4}&0\\0&0&0&h_3\\0&0&0&h_4\end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a_2&d_2&-\frac{d_2h_3}{h_4}&0\\0&0&0&h_3\\0&0&0&h_4\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{h_4}{h_3}\cdot(3)+(4)}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a_2&d_2&-\frac{d_2h_3}{h_4}&0\\0&0&0&h_3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以,$1\leqslant m\leqslant2$。

(ii)当 $d_3\neq0,d_4=0$ 时,但

$$\begin{cases}d_2h_3+f_2h_4=0,d_3f_2-2d_3h_3=0,\\d_4h_3+d_4f_2-2d_2d_3-d_3h_4=0。\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_2=-\frac{h_4}{2},f_2=2h_3,\\d_2h_3+f_2h_4=0。\end{cases}\Rightarrow h_3h_4=0,$$

与 $h_3h_4\neq0$ 矛盾。

(iii)当 $d_3=0,d_4\neq0$ 时,有 $a_2=b_3=b_4=0,d_2=h_4,f_2=-h_3$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=\\\quad h_4e_2+d_4e_4,\\[e_2,e_4]=-h_3e_2,[e_3,e_4]=h_3e_3+h_4e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\h_4&-h_3&0\\0&0&h_3\\d_4&0&h_4\end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\h_4&-h_3&0\\0&0&h_3\\d_4&0&h_4\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{h_4}{h_3}\cdot(3)+(4)}\begin{pmatrix}0&0&0\\h_4&-h_3&0\\0&0&h_3\\d_4&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{h_4}{d_4}\cdot(4)+(2)}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-h_3&0\\0&0&h_3\\d_4&0&0\end{pmatrix},$$

所以,$m=3$。

(iv)当 $d_3\neq0,d_4\neq0$ 时,有 $a_2=b_3=b_4=0,d_2=-2h_4,d_4=-\frac{d_3h_4}{h_3},f_2=2h_3$。

故

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,\\[e_2,e_3]=-2h_4e_2+d_3e_3-\frac{d_3h_4}{h_3}e_4,\\[e_2,e_4]=2h_3e_2+2d_3e_4,[e_3,e_4]=h_3e_3+h_4e_4。\end{cases}$$

因为

$$([e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0\\-2h_4&2h_3&0\\d_3&0&h_3\\-\frac{d_3h_4}{h_3}&2d_3&h_4\end{pmatrix},$$

并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2h_4 & 2h_3 & 0 \\ d_3 & 0 & h_3 \\ -\frac{d_3h_4}{h_3} & 2d_3 & h_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{d_3}{h_3}\cdot(2)+(4)]{-\frac{h_4}{h_3}\cdot(3)+(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2h_4 & 2h_3 & 0 \\ d_3 & 0 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(2)$(2\tilde{A}_0+A_{2,2},\cdot,[,])$是一个 F-流形代数当且仅当对任意的$1\leqslant k,l\leqslant 4$有

$$\begin{cases} P_{e_1}(e_k,e_l)=P_{e_2}(e_k,e_l)=0, P_{e_4}(e_k,e_l)= \\ \quad 2e_3\cdot P_{e_3}(e_k,e_l), \\ e_1\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=e_2\cdot P_{e_3}(e_k,e_l)=0, \\ e_1\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_2\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)= \\ \quad e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=0。 \end{cases}$$

其中,$(2\tilde{A}_0+A_{2,2},\cdot)$是一个交换结合代数,$(2\tilde{A}_0+A_{2,2},[,])$是一个李代数。这等价于下面的一组等式

$$\begin{cases} b_3d_4-b_4d_3=0, d_3h_3=0, b_3h_3=0, \\ d_4h_3-d_3h_4=0, b_4h_3-b_3h_4=0。 \end{cases}$$

为了得到 F-流形代数中的李代数导代数维数,需要对李代数的结构常数进行讨论。

(Ⅰ)当$h_3=0,h_4=0$时,有$b_3d_4-b_4d_3=0$。

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4,[e_1,e_4]= \\ \quad 2b_3e_4, \\ [e_2,e_3]=d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=2d_3e_4, \\ \quad [e_3,e_4]=0。 \end{cases}$$

(i)当$b_3=0,b_4=0$时,有

$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_3e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=2d_3e_4,[e_3,e_4]=0$。

所以,$0\leqslant m\leqslant 2$。

(ii)当$b_3\neq 0,b_4=0$时,有$d_4=0$。

故$[e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_3e_3,[e_1,e_4]=2b_3e_4,[e_2,e_3]=d_3e_3,[e_2,e_4]=2d_3e_4,[e_3,e_4]=0$。

因为

$$([e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3],[e_2,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 2b_3 & 0 & 2d_3 \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(iii)当$b_3=0,b_4\neq 0$时,有$d_3=0$。

故$[e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_4e_4,[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_4e_4,[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0$。

所以,$m=1$。

(iv)当$b_3\neq 0,b_4\neq 0$时,有$d_3=\frac{b_3d_4}{b_4}$。

故

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_3e_3+b_4e_4, \\ \quad [e_1,e_4]=2b_3e_4, \\ [e_2,e_3]=\frac{b_3d_4}{b_4}e_3+d_4e_4,[e_2,e_4]=\frac{2b_3d_4}{b_4}e_4, \\ \quad [e_3,e_4]=0。 \end{cases}$$

因为

$$([e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3],[e_2,e_4])=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & \frac{b_3d_4}{b_4} & 0 \\ b_4 & 2b_3 & d_4 & \frac{2b_3d_4}{b_4} \end{pmatrix},$$

所以,$m=2$。

(Ⅱ)当$h_3\neq 0,h_4=0$时,有$b_3=b_4=d_3=d_4=0$。

故$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=[e_2,e_3]=[e_2,e_4]=0,[e_3,e_4]=h_3e_3$。

所以,$m=1$。

(Ⅲ)当$h_3=0,h_4\neq 0$时,有$b_3=d_3=0$。

故$[e_1,e_2]=0,[e_1,e_3]=b_4e_4,[e_1,e_4]=0,[e_2,e_3]=d_4e_4,[e_2,e_4]=0,[e_3,e_4]=h_4e_4$。

所以,$m=1$。

(Ⅳ)当$h_3\neq 0,h_4\neq 0$时,有$b_3=b_4=d_3=d_4=0$。

故$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=[e_2,e_3]=[e_2,e_4]=0,[e_3,e_4]=h_3e_3+h_4e_4$。

所以$m=1$。

(3)$(2\tilde{A}_0+A_1,\cdot,[,])$是一个 F-流形代数当且仅当对任意的$1\leqslant k,l\leqslant 4$有

$$\begin{cases} P_{e_1}(e_k,e_l)=P_{e_2}(e_k,e_l)=P_{e_3}(e_k,e_l)=0, \\ \quad P_{e_4}(e_k,e_l)=e_3\cdot P_{e_4}(e_k,e_l), \\ e_1\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_2\cdot P_{e_4}(e_k,e_l)=e_4\cdot \\ \quad P_{e_4}(e_k,e_l)=0。 \end{cases}$$

其中,$(2\tilde{A}_0+A_1,\cdot)$是一个交换结合代数,$(2\tilde{A}_0+A_1,[,])$是一个李代数。

因为$(2\tilde{A}_0+A_1,\cdot,[,])$的李代数结构常数恒成立,并且

$$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=0,[e_1,e_4]=c_4e_4,[e_2,e_3]=0,[e_2,e_4]=f_4e_4,[e_3,e_4]=h_4e_4,$$

所以,$0\leqslant m\leqslant 1$。

(4)$(4\tilde{A}_0,\cdot,[,])$是一个F-流形代数当且仅当对任意的$1\leqslant k,l\leqslant 4$有

$$P_{e_1}(e_k,e_l)=P_{e_2}(e_k,e_l)=P_{e_3}(e_k,e_l)=P_{e_4}(e_k,e_l)=0。$$

其中,$(4\tilde{A}_0,\cdot)$是一个交换结合代数,$(4\tilde{A}_0,[,])$是一个李代数。

因为$(4\tilde{A}_0,\cdot,[,])$的李代数结构常数恒成立,并且

$$[e_1,e_2]=[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=[e_2,e_3]=[e_2,e_4]=[e_3,e_4]=0,$$

所以,$m=0$。

参考文献:

[1] Dubrovin B. Geometry of 2d topological field theories[M]//Francaviglia M, Greco S. Integrable Systems and Quantum Groups. Heidelberg: Springer, 1996: 120-348.

[2] Hertling C. Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[3] Lorenzoni P, Pedroni M, Raimondo A. F-manifolds and integrable systems of hydrodynamic type[J]. Archivum Mathematicum, 2009, 47(3): 163-180.

[4] David L, Strachan I A B. Compatible metrics on a manifold and nonlocal bi-Hamiltonian structures[J]. International Mathematics Research Notices, 2004(66): 3533-3557.

[5] David L, Strachan I A B. Dubrovin's duality for F-manifolds with eventual identities[J]. Advances in Mathematics, 2011, 226(5): 4031-4060.

[6] Bertola M. Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi groups. I[J]. Differential Geometry and its Applications, 2000, 13(1): 19-41.

[7] Bertola M. Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi groups. II[J]. Differential Geometry and its Applications, 2000, 13(3): 213-233.

[8] Fedorov R M. Frobenius manifold structures on the spaces of abelian integrals[J]. Journal of Geometry & Physics, 2011, 61(2): 485-497.

[9] Wu C Z, Zuo D. Infinite-dimensional Frobenius manifolds underlying the Toda lattice hierarchy[J]. Advances in Mathematics, 2014,255: 487-524.

[10] Hertling C, Manin Y. Weak Frobenius manifolds[J]. International Mathematics Research Notices, 1999(6): 277-286.

[11] Manin Y I. F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality[J]. Advances in Mathematics, 2005, 198: 5-26.

[12] Dotsenko V. Algebraic structures of F-manifolds via pre-Lie algebras[J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2017(2): 517-527.

[13] Liu J, Sheng Y, Bai C. F-manifold algebras and deformation quantization via pre-Lie algebras[J]. Journal of Algebra, 2020,559: 467-495.

[14] Yang X, Sun S, Her H, et al. A double Poisson algebra structure on Fukaya categories [J]. Journal of Geometry and Physics, 2015,98: 57-76.

[15] Bazhanov V V, Kotousov G A, Lukyanov S L. On the Yang-Baxter Poisson algebra in non-ultralocal integrable systems [J]. Nuclear Physics B, 2018,934: 529-556.

[16] Arnlind J, Al-Shujary. Ahmed Kähler-Poisson algebras[J]. Journal of Geometry and Physics, 2019,136: 156-172.

[17] Kontsevich M. Deformation quantization of poisson manifolds[J]. Letters in Mathematical Physics, 2003, 66(3): 157-216.

[18] Laurent-Gengoux C, Pichereau A, Vanhaecke P. Poisson structures[M]. Heidelberg: Springer, 2013.

[19] Burde D, Graaf W D. Classification of Novikov algebras[J]. Applicable Algebra in Engineering, Communication & Computing, 2013, 24(1): 1-15.

[20] 万先哲. 李代数[M]. 北京:高等教育出版社,2013.

【责任编辑:周 全】