

文章编号:1671-4229(2023)02-0010-06

局部共振超材料梁的弯曲带隙及减振性能研究

熊剑荣, 黎永盛, 任凤鸣*

(广州大学 土木工程学院, 广东 广州 510006)

摘要:为提高结构抵御振动的能力,文章基于局部共振机理设计了一种具有周期性布置局部共振单元的超材料梁,它能够在低频范围内产生减振带隙。通过欧拉-伯努利梁的振动理论和用于计算超材料带隙的平面波展开法,获得了超材料梁的弯曲振动带隙,并与有限元软件计算结果进行对比,数值模拟结果与理论计算得到的结果十分吻合,从而验证了有限元软件带隙计算的可靠性和有效性。而后,进一步研究了橡胶高度、橡胶弹性模量、芯柱高度和芯柱密度对超材料梁弯曲带隙的影响规律,以及超材料梁在弯曲振动下的减振性能。结果表明,文章提出的超材料梁能够形成60.7~98.3 Hz的低频带隙,在61~82 Hz范围能够衰减70%以上的弯曲振动;使用低弹性模量的橡胶和降低橡胶高度可以形成更低频率的带隙,增大芯柱的高度和材料密度可以形成更低频且频带更宽的带隙。

关键词:超材料梁;局部共振;弯曲带隙;减振性能

中图分类号: TU 318[†]1

文献标志码: A

Flexural bandgap and vibration reduction performance of locally resonant metamaterial beams

XIONG Jian-rong, LI Yong-sheng, REN Feng-ming*

(School of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In this paper, based on the local resonance mechanism, which could generate vibration reduction bandgap in the low frequency range, a metamaterial beam with periodically arranged local resonance units was designed in order to strengthen structural resistance to vibration. The flexural bandgap of a metamaterial beam was analyzed by combining the theory of Euler-Bernoulli beam and the plane wave expansion method commonly used to calculate the bandgap. And by comparing the finite element software calculation results and theoretical calculation results, it was found that the two results were very consistent, which verified the reliability and validity of the bandgap calculation by the finite element software. The effect of rubber height, rubber modulus, core column height and core column density on the flexural bandgap of the metamaterial beam and the vibration reduction performance of the metamaterial beam were further investigated. The results demonstrated that the metamaterial beam designed in this paper could generate a low frequency bandgap of 60.7 – 98.3 Hz, and could attenuate more than 70% of flexural vibration in the range of 61 – 82 Hz. By using a low modulus of elasticity rubber and reducing the height of the rubber a lower frequency bandgap could be created, increasing the height and density of the core column could form a lower frequency and wider bandgap.

Key words: metamaterial beam; local resonance; flexural bandgap; vibration reduction performance

收稿日期: 2022-12-30; 修回日期: 2023-02-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52178125); 广州市教育局高校“羊城学者”科研资助项目(202032849)

作者简介: 熊剑荣(1998—),男,硕士研究生. E-mail:2112016039@gzhu.edu.cn

*通信作者. E-mail:rfm@gzhu.edu.cn

引文格式: 熊剑荣, 黎永盛, 任凤鸣. 局部共振超材料梁的弯曲带隙及减振性能研究[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2023, 22(2): 10-15.

超材料 (metamaterials) 是一种人工复合材料结构^[1-2],能够阻隔一定频率范围内弹性波的传播,相应的频率范围称为带隙^[3]。在带隙范围内超材料能够表现出常规材料所不具有的负折射^[2]、负有效质量^[4]、负体积模量^[5]等特性,可以对波的运动进行衰减和控制,被应用于声隐身斗篷^[6]、声聚焦^[7]、减振降噪^[8-9]等领域。带隙按其形成机理可以分为 Bragg 散射带隙^[3]和局部共振带隙^[10],其中, Bragg 带隙受到结构尺寸的限制,难以在有限尺寸内形成低频的带隙,而局部共振机理打破了尺寸的限制,能够在晶格尺寸远小于波长时,利用超材料内部重芯(如铅、钢等制成的球体)和软涂层(常采用橡胶、硅胶等材料)组成的局部共振单元的自振产生低频带隙。这为土木工程结构的减振控制提供了新思路。

研究者们对局部共振超材料结构已经开展了部分研究。Xiao 等^[11-12]率先对具有周期性布置局部共振单元的超材料梁进行了带隙理论分析,分别引入了平面波展开法(PWEM,常用于分析声子晶体形成的带隙)与普元法,并基于欧拉-伯努利梁分析了超材料梁的带隙形成机理。Zhang 等^[13]通过振动试验验证了带有弹簧质量谐振器的超材料梁对低频振动的减振性能。Ma 等^[14]设计了一种具有三维各向异性的局部共振超材料杆,由在立方体环氧基体中布置涂有硅胶层的钢柱周期阵列形成,利用 COMSOL Multiphysics 软件计算了超材料杆的振动带隙,并通过振动试验验证了超材料杆能够分别在 1.2 ~ 1.6 kHz 和 1.8 ~ 2.9 kHz 范围对水平振动和竖向振动进行衰减。李锁斌等^[15]将局部共振机理引入夹芯板的设计中,3D 打印制作了一种超材料夹芯板,通过振动试验,验证了超材料夹芯板在带隙内的减振特性。

为了进一步推进局部共振超材料结构在土木工程中的应用,本文引入局部共振机理,通过在圆形混凝土管内周期性布置 6 个谐振器,设计出一种具有低频减振特性的局部共振超材料梁(后文简称超材料梁)。基于欧拉伯努利梁的弯曲振动模型,采用 PWEM 对超材料梁的弯曲振动带隙进行了理论推导,通过理论计算对数值模拟进行验证,进一步分析橡胶的弹性模量、高度以及芯柱的高度和材料密度对带隙的影响,并对超材料梁在弯曲振动下的减振性能进行了分析研究。

1 超材料梁的设计

基于局部共振机理以圆形混凝土管作为梁主体,在管内周期布置局部共振单元,设计出了一种具有低频减振特性的局部共振超材料混凝土梁,如图 1 所示。其中,图 1(a)为周期性布置局部共振单元的超材料梁三维图,图 1(b)为超材料梁的结构尺寸图,图 1(c)表示超材料梁的基本组成单元(称之为单胞)。由图 1(c)可知,局部共振单元由重质量芯柱(由铅制成)与布置在芯柱高度中央的橡胶圆环组成,并沿 x 轴(沿跨度方向)周期性地布置在梁体空心腔内,梁主体与局部共振单元通过橡胶进行连接,每个局部共振单元均位于单胞的中部,各组成材料的基本力学参数如表 1 所示。由图 1(b)可知,每个共振单元中心之间的距离为 a ,计为单胞长度,梁两端布置的共振单元与梁端面之间的距离为 $a/2$ 。其中,芯柱的半径和长度分别为 r_m 和 h_m ,橡胶圆环的外圈半径为 r_r ,高为 h_r ,本设计中超材料梁共由 6 个单胞组成,梁长为 $L = 6a$,截面半径为 r_b 。

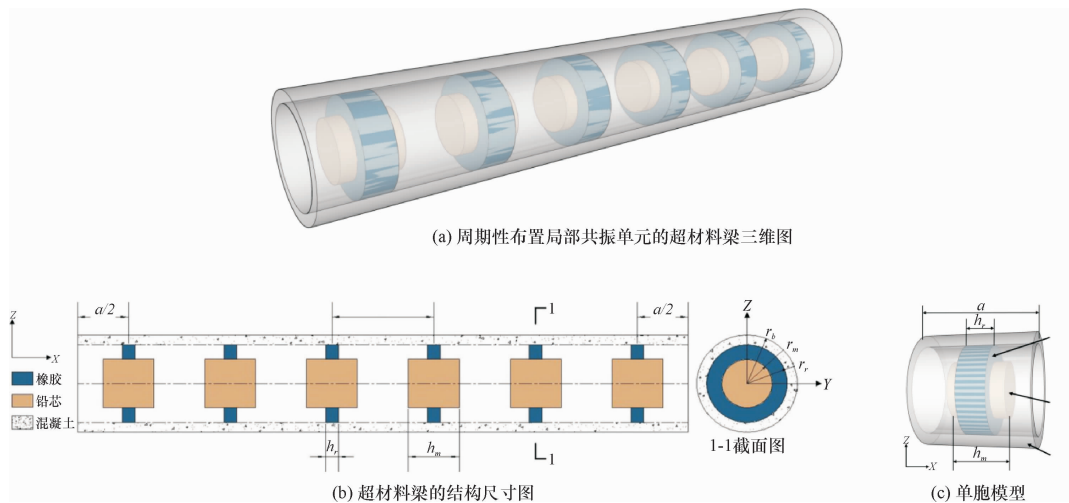


图 1 局部共振超材料梁的模型

Fig. 1 Schematic diagram of the model of a locally resonant metamaterial beam

表 1 材料力学参数

Table 1 Mechanical parameters of materials

材料	密度 ρ /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	弹性模量 E/MPa	泊松比 μ
混凝土	2 400	35 000.0	0.200
铅	11 600	17 000.0	0.440
橡胶	900	1.8	0.477

2 理论模型

超材料梁可以等效为在均匀梁体外部周期性布置弹簧质量谐振器(后面简称为谐振器)的结构,如图 2 所示,橡胶可以等效为谐振器中提供刚度 k_1 的弹簧,芯柱作为质量块 $m_1 = \rho_m \pi r_m^2 h_m$ 。橡胶等效刚度 k_1 为^[16]

$$k_1 = \frac{\pi(5 + 3.29S^2)Gh_r}{\ln(r_r/r_m)}, \quad (1)$$

其中, $S = h_r / [(r_r + r_m) \ln(r_r/r_m)]$, 橡胶的剪切刚度为 $G = E/2(1 + \mu)$, μ 为橡胶的泊松比。

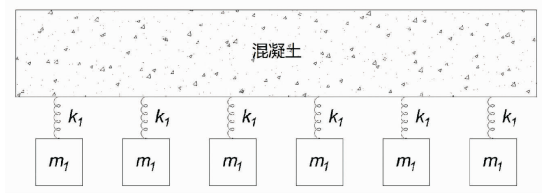


图 2 超材料梁等效模型

Fig. 2 Equivalent model of a metamaterial beam

基于欧拉-伯努利梁理论,对超材料梁模型进行弯曲振动研究。对于均匀截面的普通梁,其微段 dx 受力形式如图 3 所示,其中, M 和 Q 分别是作用在梁截面上的弯矩和剪力, $w(x, t)$ 是梁的横向位移,根据达朗贝尔原理得到梁的竖向力平衡方程为

$$Q - (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx = 0. \quad (2)$$

将 $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ 代入式(2),可得到梁弯曲振动方程:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

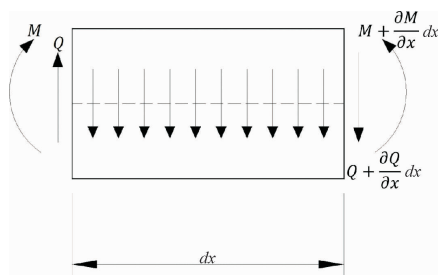


图 3 欧拉-伯努利梁微段的受力简图

Fig. 3 Force sketch of a Euler-Bernoulli beam micro-segment

对于带有无限个周期谐振器的超材料梁,还受到来自谐振器的作用力,其振动控制方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A w(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -k_1 (w(x_1 + na) - u(x_1 + na)) \delta(x - (x_1 + na)), \quad (4a)$$

$$- \omega^2 m_1 u(x_1 + na) = k_1 (w(x_1 + na) - u(x_1 + na)), \quad (4b)$$

其中, ω 是圆频率, $x_1 = \frac{a}{2}$ 和 $x_1 + na$ 分别是第 1 个和第 n 个谐振器所处的位置, $u(x_1 + na)$ 和 $w(x_1 + na)$ 分别表示谐振器和梁在 $x_1 + na$ 处的位移, $\delta(x - (x_1 + na))$ 是 Dirac 增量函数。

由于超材料梁是周期性结构,根据 Bloch 定理,对位移进行傅里叶级数展开,得到:

$$w(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W_m e^{-i(q + \frac{2m\pi}{a})x}, \quad (5)$$

其中, q 为 Bloch 波矢, x 代表梁体坐标位置。则 $x_1 + na$ 处的梁体位移和谐振器位移可以表示为

$$w(x_1 + na) = w(x_1) e^{-iqna} = w_1 e^{-iqna}, \quad (6a)$$

$$u(x_1 + na) = u(x_1) e^{-iqna} = u_1 e^{-iqna}, \quad (6b)$$

其中, w_1 和 u_1 记为 $w(x_1)$ 和 $u(x_1)$ 。根据 Dirac 增量函数, $x_1 + na$ 处谐振器对梁体的集中力可以等效为作用在单胞长度 a 上的均布荷载,并利用傅里叶级数进行展开,可得:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-iqna} \delta(x - (x_1 + na)) = e^{-iq(x-x_1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - (x_1 + na)) = \frac{1}{a} e^{-iq(x-x_1)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i(\frac{2m\pi}{a})x} e^{-i(\frac{2m\pi}{a})x}. \quad (7)$$

将式(5)~式(7)带入式(4)中可以得到:

$$EIa(q + \frac{2m\pi}{a})^4 W_m - \omega^2 \rho A a W_m = -k_1 (w_1 - u_1) e^{-i(q + \frac{2m\pi}{a})x_1}, \quad (8a)$$

$$- \omega^2 m_1 u_1 = k_1 (w_1 - u_1). \quad (8b)$$

为方便计算,定义:

$$w_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W_m e^{-i(q + \frac{2m\pi}{a})x_1}, \quad (9)$$

其中, $\bar{m} = m$ 。将式(9)代入式(8),可得:

$$EIa(q + \frac{2m\pi}{a})^4 W_m - \omega^2 \rho A a W_m - k_1 e^{-i(q + \frac{2m\pi}{a})x_1} u_1 + k_1 e^{-i(q + \frac{2m\pi}{a})x_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(q + \frac{2m\pi}{a})x_1} W_m = 0, \quad (10a)$$

$$-\omega^2 m_1 u_1 + k_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(q+\frac{2m\pi}{a})x_1} W_m^- + k_1 u_1 = 0, \quad (10b)$$

将上式写为矩阵的形式为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \{\mathbf{W}\} = 0, \quad (11)$$

其中,

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} Ela[\mathbf{Q}_m] + k_1[\mathbf{U}] & -k_1[\mathbf{P}] \\ -k_1[\mathbf{P}t] & k_1 \end{bmatrix}, \quad (12a)$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \rho Aa[\mathbf{I}] & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}, [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\overline{M} \times \overline{M}}, \quad (12b)$$

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_m \\ u_1 \end{bmatrix}, \{\mathbf{W}_m\} = \begin{bmatrix} W_{-M} \\ W_{-M+1} \\ \vdots \\ W_M \end{bmatrix}, \quad (12c)$$

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}t], [\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} e^{i(q-\frac{2M\pi}{a})x_1} \\ e^{i(q-\frac{2(M-1)\pi}{a})x_1} \\ \vdots \\ e^{i(q+\frac{2M\pi}{a})x_1} \end{bmatrix}, \quad (12d)$$

$$[\mathbf{P}t] = \begin{bmatrix} e^{-i(q-\frac{2M\pi}{a})x_1} \\ e^{-i(q-\frac{2(M-1)\pi}{a})x_1} \\ \vdots \\ e^{-i(q+\frac{2M\pi}{a})x_1} \end{bmatrix}^T. \quad (12e)$$

式(10)是个无限项矩阵,需要用有限项进行取代求解,在此对其平面波进行展开,令 $\overline{m} = m$ 取值范围为 $(-M, \dots, M)$,平面波波数为 $\overline{M} = 2M + 1$ 。通过代入不可约布里渊区 $[0, \frac{\pi}{a}]$ 内的每个 Bloch 波矢 q 即可得到式(11)的 $\overline{M} + 1$ 个 ω^2 特征值, Bloch 波矢 q 与圆频率 ω 之间的关系就是超材料梁的能带结构关系,可由此得出超材料梁产生的带隙。

3 带隙计算及分析

3.1 超材料梁的带隙计算

超材料梁组成材料的基本力学参数如表1所示,令部件尺寸为 $r_m = 0.05$ m, $h_m = 0.1$ m, $r_r = 0.08$ m, $h_r = 0.05$ m, $r_b = 0.1$ m,将其代入式(11)中进行理论求解,同时利用根据 PWEM 得出的理论计算带隙范围来验证 COMSOL Multiphysics 软件的数值计算模型的正确性和适用性。单胞模型如图1(b)所示,本文所提出的超材料梁能带结构计算结果以及数值模拟计算结果如图4所示。

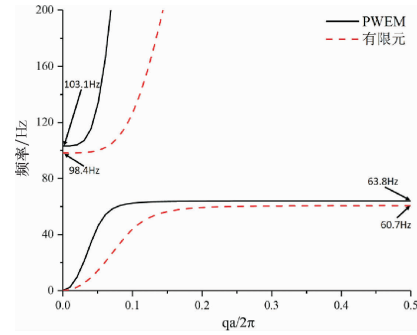


图4 理论计算与有限元分析的能带结构对比

Fig. 4 Comparison of band structure between theoretical calculation and finite element analysis

可以得出,理论模型和数值模拟计算出的超材料梁带隙范围分别为 63.8 ~ 103.1 Hz 和 60.7 ~ 98.4 Hz,带隙宽度分别为 39.3 Hz 和 37.7 Hz,两者带隙下限值和下限值之差分别为 3.1 Hz 和 4.7 Hz,误差均在 5% 左右,可见,理论计算结果与数值计算结果十分吻合。此外,理论计算出的带隙范围下限频率与谐振器的自振频率

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 63.8$ Hz 一致,而数值计算结果略小于自振频率,这可能是由于将橡胶和芯柱等效为刚度 k_1 和质量 m_1 的谐振器时导致的误差。

3.2 超材料梁的带隙分析

为了深入探讨超材料梁的带隙特征,在上述超材料梁模型的基础上,通过改变橡胶高度 h_r 、橡胶弹模 E_r 、芯柱高度 h_m 和密度 ρ_m ,研究设计参数对超材料梁带隙特征的影响。

3.2.1 橡胶高度对带隙的影响

在其它参数不变的情况下,将超材料梁单胞结构内橡胶高度分别设置为 0.025 m、0.050 m、0.075 m 和 0.100 m 进行带隙分析,计算结果如图5所示。

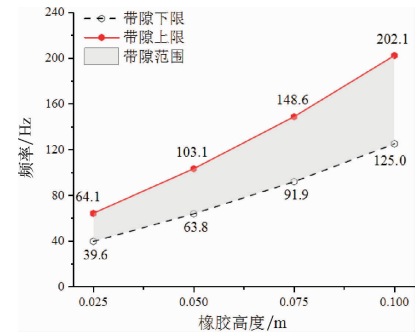


图5 橡胶高度对带隙的影响

Fig. 5 Effects of rubber height on bandgap

从图5可以看出,随着橡胶高度的增大,超材料梁所产生的带隙下限和带隙上限的频率会随之增大,其中,带隙上限增长的速率高于带隙下限,从而带隙宽度

也随之增大。根据前文所述,带隙下限取决于谐振器的自振频率,在芯柱质量不变的情况下,橡胶高度变大相当于弹簧刚度增强,因此,带隙下限的频率也越大。

3.2.2 橡胶弹性模量对带隙的影响

为探究橡胶弹模对带隙的影响,对橡胶弹性模量取 4 个不同的数值,计算不同橡胶弹模时超材料梁产生的带隙,结果如图 6 所示。可见,橡胶弹模越小,其所产生的带隙上下限值的频率越低,带隙上限降低速度更快,从而带隙范围越窄。当橡胶弹模为 3.6 MPa 时,其形成的带隙范围为 90.3 ~ 145.9 Hz,带隙宽 55.6 Hz;当橡胶的弹模减小到 1 MPa 时,带隙范围为 47.6 ~ 76.9 Hz,带隙宽度为 29.3 Hz。因此,想要形成更低频的带隙,可以选择弹模更小的材料,但带隙宽度会随之变窄。

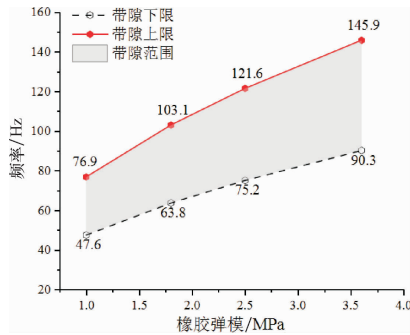


图 6 橡胶弹模对带隙的影响

Fig. 6 Effects of rubber elastic mold on bandgap

3.2.3 芯柱高度和密度对带隙的影响

由自振频率公式可知,改变谐振器的质量会影响其自振频率,而在超材料梁中芯柱的材料密度和高度都会改变等效质量 m_1 。为探讨谐振器质量块与带隙的关系,设置了 4 种芯柱高度,分别为 0.050 m、0.075 m、0.100 m 和 0.115 m。当芯柱高 $h_m = 0.100$ m 时,材料密度取为 $2\ 700\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 、 $4\ 000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 、 $6\ 000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 、 $8\ 850\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 和 $11\ 600\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

图 7 和图 8 分别为带隙与芯柱高度和密度之间的关系曲线。

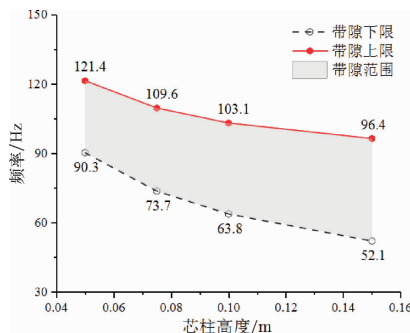


图 7 芯柱高度对带隙的影响

Fig. 7 Effects of core column height on bandgap

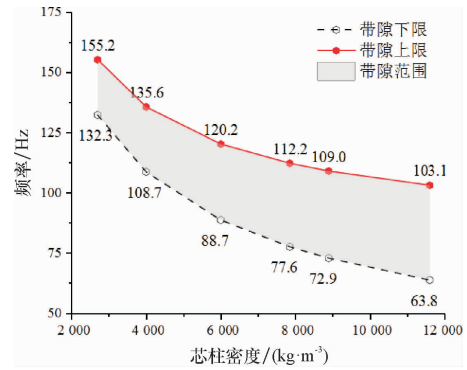


图 8 芯柱密度对带隙的影响

Fig. 8 Effects of core column density on bandgap

可以看出,随着芯柱高度和密度的增加,谐振器的质量增大,而弹簧刚度 k_1 不变,因而产生的带隙下限和带隙上限会降低,但带隙上限减小的速度较下限慢,从而大质量的谐振器形成的带隙频率会随之降低,且更宽。可见,通过增大芯柱的高度和密度可以产生频率较低的带隙,同时一定程度上带隙宽度也会随芯柱质量的增大而变宽。

4 减振性能研究

采用有限元软件对含有 6 个如图 1(c) 所示的单胞结构的超材料梁和普通混凝土空心梁(没有布置局部共振单元的空心管)进行建模,有限元模型如图 9 所示。超材料梁中的混凝土、橡胶和芯柱均基于线弹性材料模型,采用系统默认四面体单元进行网格划分,网格尺寸大小为 10 mm,不同材料之间以共用节点的形式连接并进行分析。在空心超材料梁的一侧输入正弦的横向加速度激励,加速度幅值为 $2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,通过记录梁加载端和另一端(输出端)的加速度响应,可得到弯曲振动下超材料梁的响应函数(Response function,输出加速度与输入加速度之比),图 10 为材料阻尼系数为 0、0.05、0.10 时的结构响应函数,其中,MB-X 代表具有阻尼系数为 X 时超材料梁的响应函数曲线,NB 代表普通混凝土梁的响应函数曲线。

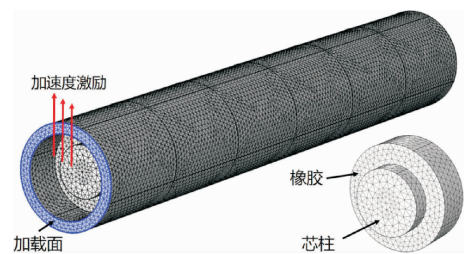


图 9 三维超材料梁有限元模型

Fig. 9 3D finite element model of a metamaterial beam

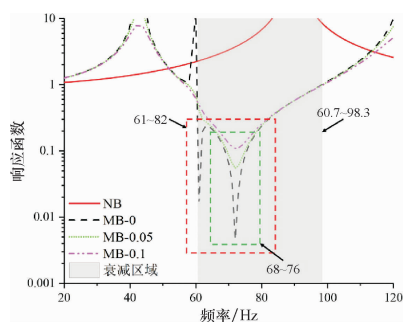


图 10 超材料梁和普通混凝土梁的频率响应函数图

Fig. 10 Response function plot of metamaterial beam and normal concrete beam

由图 10 可知,相比普通混凝土空心梁,超材料梁在 60.7 ~ 98.3 Hz 范围内梁输出端的响应明显小于输入端的响应,这与前面理论和模拟计算得到的带隙范围相吻合。无论是否考虑材料阻尼的影响,在 61 ~ 82 Hz 范围内(图 10 的红框内),超材料梁的输出端响应可以比输入端小 70% 以上,甚至在 68 ~ 76 Hz 内(如图 10 的绿框内)可以衰减掉 90% 以上的振动能量,有效地阻隔了弯曲振动在梁内的传播。另外,在考虑材料阻尼的影响

后,超材料梁的振动响应函数变得平缓,随着阻尼系数的增加,超材料梁在带隙内的减振性能会有所降低,但其减振的范围会增大。

5 结 论

基于局部共振机理,本文设计了一种具有周期性局部共振单元的超材料梁,并对其进行了带隙分析和减振性能研究,得出了以下结论:

(1) 通过使用低弹性模量的橡胶和降低橡胶高度,超材料梁能够形成更低频率的带隙上下限,而提高橡胶的弹性模量和高度,会同时增大带隙宽度以及带隙的上下限频率。

(2) 增大芯柱高度和材料密度,可以降低超材料梁的带隙上下限值,同时带隙宽度也会随之增大。

(3) 与普通混凝土空心梁相比,超材料梁具有的带隙特性能够有效衰减弯曲振动,随着材料阻尼的增大,超材料梁在带隙内对振动的衰减性能会有所降低,但减振范围得到了扩大。

参考文献:

- [1] Lu M H, Feng L, Chen Y F. Phononic crystals and acoustic metamaterials[J]. *Materials Today*, 2009, 12(12): 34-42.
- [2] Smith D R, Pendry J B, Wiltshire M C. Metamaterials and negative refractive index[J]. *Science*, 2004, 305: 788-792.
- [3] Wan G, Yu D, Wen J, et al. One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures[J]. *Physics Letters A*, 2004, 327: 512-521.
- [4] Yang Z, Mei J, Yang M, et al. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101: 204301.
- [5] Yang M, Ma G, Yang Z, et al. Coupled membranes with doubly negative mass density and bulk modulus[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(13): 134301.
- [6] Chen H, Chan C T. Acoustic cloaking and transformation acoustics[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, 43(11): 113001.
- [7] Li J, Fok L, Yin X, et al. Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens[J]. *Nature Materials*, 2009, 8: 931-934.
- [8] 朱席席, 肖勇, 温激鸿, 等. 局域共振型加筋板的弯曲波带隙与减振特性[J]. *物理学报*, 2016, 65(17): 316-330.
- [9] Song Y, Feng L, Wen J, et al. Reduction of the sound transmission of a periodic sandwich plate using the stop band concept[J]. *Composite Structures*, 2015, 128: 428-436.
- [10] Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials[J]. *Science*, 2000, 289: 1734-1736.
- [11] Xiao Y, Wen J, Wen X. Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators[J]. *Physics Letters A*, 2012, 376: 1384-1390.
- [12] Xiao Y, Wen X, Yu D, et al. Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers: Band-gap behavior and band formation mechanisms[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(4): 867-893.
- [13] Zhang Y, Fan X, Li J, et al. Low-frequency vibration insulation performance of the pyramidal lattice sandwich metamaterial beam[J]. *Composite Structures*, 2021, 278: 114719.
- [14] Ma G, Fu C, Wang G, et al. Polarization bandgaps and fluid-like elasticity in fully solid elastic metamaterials[J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 13536.
- [15] 李锁斌, 魏儒义, 周安安, 等. 超结构夹芯板及其低宽频振动带隙机理[J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(4): 77-85.
- [16] Yu D, Liu Y, Zhao H, et al. Flexural vibration band gaps in Euler-Bernoulli beams with locally resonant structures with two degrees of freedom[J]. *Physical Review B*, 2006, 73: 064301.

【责任编辑:周 全】