文章编号:1671-4229(2023)01-0017-08

三类不含拉普拉斯特征值 1 的树

王丽萍，李沐春*
(兰州交通大学 应用数学研究所，甘肃 兰州　730070)

摘　要：设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ 为图 G 的邻接矩阵，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})$ 为图 G 的度对角矩阵，称 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵，则特征多项式 $\phi_G(\mu)=\det(\mu I-L(G))$ 的所有根称为图 G 的拉普拉斯特征值。一个端点的度不小于 3，另一个端点的度等于 1 的路，被称为外部路。对于任意图 G，如果 G 的外部路上包含 P_3 子图，则删除 P_3 不影响图 G 中拉普拉斯特征值 1 的重数。通过递归删除外部路上的 P_3，刻画了不含拉普拉斯特征值 1 的星型树、双星树和三星树。

关键词：树；拉普拉斯矩阵；特征值；重数；零度
中图分类号：O 157.5　　**文献标志码**：A

Three classes of trees without Laplacian eigenvalue 1

WANG Li-ping, *LI Mu-chun**
(Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ be the adjacent matrix of G, and $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})$ be the diagonal matrix, the matrix $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ is called the Laplacian matrix. Then all roots of the characteristic polynomial $\phi_G(\mu)=\det(\mu I-L(G))$ are called Laplacian eigenvalues of G. A path with a vertex of degree not less than 3 and the other vertex of degree equal to 1 is called the external path of a graph. For any graph G, if the external path of G contains a P_3 subgraph, then pruning off P_3's does not change the multiplicity of Laplacian eigenvalue 1 in graph G. In this paper, the starlike trees, the double-starlike trees and the three-starlike trees without a Laplacian eigenvalue 1 are completely characterized by deleting P_3 recursively from external paths of those graphs.

Key words: tree; Laplacian matrix; eigenvalues; multiplicity; nullity

0　引　言

本文所考虑的图为简单无向连通图，一些未说明的记号和术语见文献[1-2]。设图 $G=(V,E)$ 为 n 阶连通图，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 表示图 G 的顶点集，$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为图 G 的边集。设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ 为图 G 的邻接矩阵，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})=diag(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$ 为度对角矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ 称为图 G 的拉普拉斯矩阵，其中 $d(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度。由于 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 为半正定的实对称矩阵，所以其特征值都为非负实数。定义 $\phi_G(\mu)=\det(\mu I-L(G))$ 为图 G 的拉普拉斯特征多项式，其所有的根称为图 G 的拉普拉

收稿日期：2022-05-23；**修回日期**：2022-06-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11961041)；甘肃省自然科学基金资助项目(21JR11RA065)
作者简介：王丽萍(1987—)，女，硕士研究生. E-mail:3412160672@qq.com
* 通信作者. E-mail:limuchunmath@163.com
引文格式：王丽萍，李沐春. 三类不含拉普拉斯特征值 1 的树[J]. 广州大学学报(自然科学版)，2023，22(1)：17-24.

斯特征值，不妨设$\mu_1(G)\geqslant\mu_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}(G)\geqslant\mu_n(G)=0$为图$G$按照不增序排列的拉普拉斯特征值，将$\mu_1(G)$称为图$G$的拉普拉斯谱半径，图$G$的所有拉普拉斯特征值及其重数所构成的多重集称为图$G$的拉普拉斯谱。一般地，用$m_G(1)$表示拉普拉斯特征值1的重数，图$G$中度数为1的顶点称为悬挂点，$p(G)$表示图$G$中悬挂点的数目，与悬挂点相邻的点称为次悬挂点，并用$q(G)$表示次悬挂点的数目。$G\cup H$表示图G和H的不交并，$G-u$表示图G删去u点及其关联的边所得到的图。另外，用K_n和P_n分别表示n阶的完全图和路。一个端点的度不小于3，另一个端点的度等于1的路，被称为外部路。一棵恰有1个点的度大于2的树称为星型树[3]，简记作$T_1=S(l_1,l_2,\cdots,l_k)$，设唯一的最大度点为$u$且$d(u)=k$，则$S(l_1,l_2,\cdots,l_k)-u=P_{l_1}\cup P_{l_2}\cup\cdots\cup P_{l_k}$，其中$P_{l_i}$为$l_i(i=1,2,\cdots,k)$个点的路，具体如图1所示。

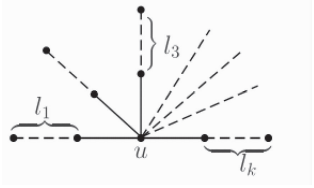

图1 星型树T_1示意图

Fig. 1 Starlike graph T_1

类似地，一棵恰有2个相余顶点的度大于2的树称为双星型树，简记为$T_2=S'(l_1,l_2,\cdots,l_k,l'_1,l'_2,\cdots,l'_s)$。设$u$和$v$为双星型树$T_2$的两个最大度点，且$d(u)=k+1,d(v)=s+1$，于是$S'(l_1,\cdots,l_k,l'_1,\cdots,l'_s)-u-v=P_{l_1}\cup\cdots\cup P_{l_k}\cup P_{l'_1}\cup\cdots\cup P_{l'_s}$，其中$P_{l_i}$表示$l_i$个顶点的路$(i=1,2,\cdots,k)$，$P_{l'_j}$表示$l'_j$个顶点的路$(j=1,2,\cdots,s)$，如图2所示。

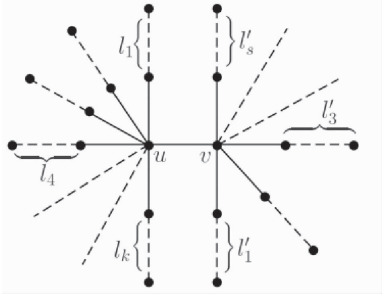

图2 双星树T_2示意图

Fig. 2 Double-starlike graph T_2

一棵恰有3个顶点的度大于2且有其中两个点都与第三个点相邻的树称为三星树，简记为$T_3=S^*(l_{11},\cdots,l_{1j_1},l_{21},\cdots,l_{2j_2},l_{31},\cdots,l_{3j_3})$，其中$v_1$，$v_2,v_3$为$T_3$中的3个最大度点，$d(v_1)=j_1+1$，$d(v_2)=j_2+2,d(v_3)=j_3+1,j_i\geqslant2$。用$P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{ij_i}$表示最大度点$v_i$上关联的$l_{j_i}$条外部路$(i=1,2,3)$，具体如图3所示。

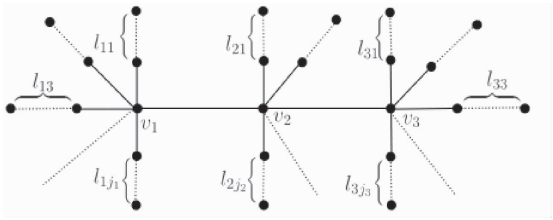

图3 三星树T_3示意图

Fig. 3 Three-starlike graph T_3

不同拉普拉斯特征值较少的图是一类具有很好的组合性质的图。在阶数一定的情况下，图的特征值越少意味着其重数越高。因此，考虑图的拉普拉斯特征值的重数对研究不同特征值较少的图至关重要。文献[3-5]研究了星型树的拉普拉斯谱，文献[6-7]分析了双星树的拉普拉斯谱，Gronef等[8]证明了对于n阶树T，若$\mu(>1)$是树T的拉普拉斯整特征值，则$m_T(\mu)=1$且$\mu|n$。此外，他们还考虑了任意图的拉普拉斯特征值1的重数，在文献[9]中，Barik等完全刻画了第三小的拉普拉斯特征值为1的树。随后，Guo等[10]证明了若T是n阶树，则$m_T(1)\in S=\{0,1,\cdots,n-5,n-4,n-2\}$，即对任意整数$n$和$S$中的每一个数$k$，都存在一棵$n$阶树$T$使得$m_T(1)=k$。紧接着张友等[11]给出了星型树和双星树的谱半径的界。

文献[10]在研究树图的拉普拉斯特征值1的重数时提出：刻画不含拉普拉斯特征值1的树。本文以此为动机，通过递归删除外部路中的P_3，刻画了不含拉普拉斯特征值1的星型树、双星树和三星树。

1 引理及主要结论

在连通图G中，除去悬挂点与次悬挂点后剩余的点称为图G的内点，用r表示图G中内点的

数目，即 $r=n-p(G)-q(G)$。设 $\boldsymbol{L_R}(\boldsymbol{G})$ 为 $L(G)-I_n$ 中对应于图 G 的内点的主子阵，其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位阵。用 $\nu(L_R(G))$ 表示矩阵 $\boldsymbol{L_R}(\boldsymbol{G})$ 的零度，即 $\boldsymbol{L_R}(\boldsymbol{G})$ 零空间的维数。

引理 1[8]　设 G 是一个连通图，则

$$m_G(1)=p(G)-q(G)+\nu(L_R(G)) \quad (1)$$

根据引理 1，可以得到如下推论：

推论 1　设 G 是有 p 个悬挂点和 q 个次悬挂点的连通图，

(a)若 1 不是图 G 的拉普拉斯特征值，则 $q=p$；

(b)若 $p>q$，则 1 是图 G 的拉普拉斯特征值。

证明　对于(a)，若 1 不是图 G 的拉普拉斯特征值，则 $m_G(1)=0$。

根据引理 1 有，$q-p=\nu(L_R(G))\geqslant 0$，即 $p\leqslant q$。另一方面，根据定义可得 $p\geqslant q$，因此，$p=q$。

对于(b)，根据引理 1 有 $m_G(1)=p-q+\nu(L_R(G))\geqslant p-q>0$，所以结论成立。

引理 2[8]　设 G 是由图 H 的一个点连接 P_3 的一个悬挂点所得到的图，则 $m_G(1)=m_H(1)$。

注 1　从引理 2 可以看出，对于任意图 G，如果 G 的外部路上包含 P_3 子图，则删除 P_3 不影响图 G 中拉普拉斯特征值 1 的重数。

引理 3[8]　设 $T=P_n$，则

$$m_T(1)=\begin{cases}1,\text{如果 } 3\mid n\\0,\text{否则}\end{cases}。$$

设 $T_n^*(g,h)(g\geqslant h)$ 是由 $g+1$ 阶的星图 $K_{1,g}$ 在 h 个悬挂点上每个再连接 1 个新的孤立点所得到的 n 阶树，其中 $n=g+h+1$，如图 4 所示。

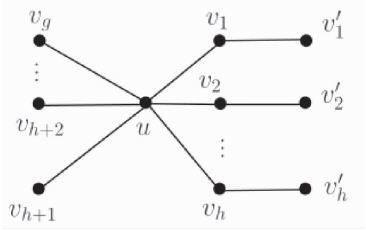

图 4　$T_n^*(g,h)$ 示意图

Fig. 4　Graph $T_n^*(g,h)$

引理 4[8]　对于 n 阶树 $T_n^*(g,h)$，$g\geqslant h\geqslant 1$ 且 $n\neq 3$，则有

$$m_{T_n^*(g,h)}(1)=\begin{cases}g-h-1,g\geqslant h+1\\0,g=h\end{cases}。$$

定理 1　设 $T_1=S(l_1,l_2\cdots,l_k)$ 是一棵星型树，u 为唯一的最大度点且 $d(u)=k(k\geqslant 3)$，则 T_1 不含拉普拉斯特征值 1 当且仅当 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 中至多有一个 l_i 满足 $l_i\equiv 1(\bmod 3)$，其中 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$。

证明　先证充分性。对于星型树 T_1，根据 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 分以下 4 种情形考虑：

情形 1　若 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 全模 3 余 0 时。

根据引理 2 可知，在 T_1 的每条外部路上逐步去掉 P_3 不改变其拉普拉斯特征值 1 的重数。注意到 $l_1,l_2,\cdots,l_k\equiv 0(\bmod 3)$，所以在 T_1 的每条外部路 $P_{l_j}(j=1,2,\cdots,k)$ 上逐步去掉 P_3 后所得到的图为 K_1，而 $m_{K_1}(1)=0$，因此，$m_{T_1}(1)=m_{K_1}(1)=0$，此时星型树 T_1 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 2　若 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 全模 3 余 2 时。

根据引理 2 可知，在 T_1 的每条外部路上去掉 P_3 不改变拉普拉斯特征值 1 的重数。由于 $l_1,l_2,\cdots,l_k\equiv 2(\bmod 3)$，因此，在 T_1 的每条外部路 P_{l_j} 上逐步去掉 P_3 后所得到的图 $H=S(\overbrace{2,2,\cdots,2}^{k})$，显然 $p(H)=k$，$q(H)=k$ 且除去图 H 中悬挂点和次悬挂点外只有一个内点 u，即 $r(H)=1$。又因为 $d(u)=k(\geqslant 3)$，所以 $L_R(H)=d(u)-1>0$，从而 $\nu(L_R(H))=0$，由引理 1 得：$m_H(1)=p(H)-q(H)+\nu(L_R(H))=0$，进一步，由引理 2 可知，$m_{T_1}(1)=m_H(1)=0$，此时星型树 T_1 亦不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3　若 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 一部分模 3 余 2，另一部分模 3 余 0，不妨设 $l_1,l_2,\cdots,l_t\equiv 2(\bmod 3)$，同时 $l_{t+1},l_{t+2},\cdots,l_k\equiv 0(\bmod 3)$，其中 $t<k$。

根据引理 2，在 T_1 的每条外部路 P_{l_j} 上逐步去掉 P_3 后所得到的图为 $H'=S(\overbrace{2,2,\cdots,2}^{t})$，类似于情形 2 可知，星型树 T_1 无拉普拉斯特征值 1。

情形 4　若 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 至少有一个参数模 3 余 1 时，不妨设 $l_1,l_2,\cdots,l_s$ 全模 3 余 1，$l_{s+1},\cdots,l_t$ 全模 3 余 2，$l_{t+1},\cdots,l_k$ 全模 3 余 0。

根据引理 2，在 T_1 的每条外部路 P_{l_j} 上逐步去掉 P_3 后所得到的图为 $T^*(t,t-s)$，其中 s 表示 1 长外部路的数目，$t-s$ 表示 2 长外部路的数目。当 $t-s=0$ 时，$p(T^*(t,t-s))>q(T^*(t,t-s))$，

由引理2可知,星型树 T_1 有拉普拉斯特征值1;当 $t-s\geqslant 1$ 时,由引理4可知,

$$m_{T^*(t,t-s)}(1)=\begin{cases}s-1, s\geqslant 1\\ 0, s=0\end{cases} \quad (2)$$

由式(2)可知,当 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 中至多有一个 l_i 满足 $l_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 其中 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$,则星型树 T_1 无拉普拉斯特征值1,其中 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$。

反过来,假设星型树 $T_1=S(l_1,l_2\cdots,l_k)$ 至少有两条外部路的参数模3余1,按照上述类似的方法,通过递归删除 k 条外部路上的 P_3 后得到 T^* 型树,则在 T^* 树中至少有2条1长外部路,由式(2)可知,星型树 T_1 至少含有一个拉普拉斯特征值1,矛盾。

根据引理2可知,在双星树 T_2 的外部路 $P_{l_i}(i=1,2,\cdots,k)$ 和 $P_{l'_j}(j=1,2,\cdots,s)$ 上逐步递归去掉 P_3 不改变其拉普拉斯特征值1的重数,为方便起见,记 T_2 的所有外部路逐步去掉 P_3 后所得到的图形为 $\tilde{T}_2$,如图5所示。

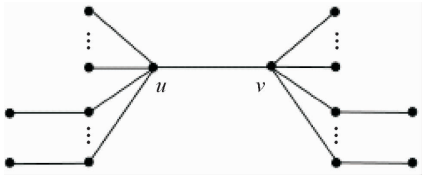

图5 $\tilde{T}_2$ 示意图

Fig. 5 Graph $\tilde{T}_2$

定理2 设 $T_2=S'(l_1,l_2,\cdots,l_k,l'_1,l'_2,\cdots,l'_s)$ 是一棵双星型树,有且仅有2个最大度点 u 和 v,其中 $d(u)=k+1(k\geqslant 2)$,$d(v)=s+1(s\geqslant 2)$,则双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值1当且仅当 $\tilde{T}_2=P_2$ 或 $\tilde{T}_2$ 满足 $p(\tilde{T}_2)=q(\tilde{T}_2)$。

证明 先证充分性。根据参数 $l_1,l_2,\cdots,l_k$,$l'_1,\cdots,l'_s$ 分类讨论。

情形1 若 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 与 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s$ 中有一组全模3余0。不妨设 $l_1,l_2,\cdots,l_k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$。

情形1.1 若 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$。

根据引理2,在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l'_j}$ 上逐步去掉 P_3,所得图记为 $\tilde{T}_2^{(1)}=P_2$,根据引理3可知,$m_{P_2}(1)=0$,此时图 $\tilde{T}_2^{(1)}$ 不含拉普拉斯特征值1,再根据引理2,双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值1。

情形1.2 若 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$。

根据引理2,在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l'_j}$ 上逐步去掉 P_3,所得图记为 $\tilde{T}_2$,显然在图 $\tilde{T}_2$ 中有 $p(\tilde{T}_2)>q(\tilde{T}_2)$,由推论1可知,图 $\tilde{T}_2$ 含有拉普拉斯特征值1,再根据引理2可得,此时双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值1。

情形1.3 若 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$。

根据引理2,在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l'_j}$ 上逐步去掉 P_3,所得图记为 $\tilde{T}_2^{(2)}$,显然 u,v 分别为 $\tilde{T}_2^{(2)}$ 的悬挂点和次悬挂点,且图 $\tilde{T}_2^{(2)}$ 中除去悬挂点和次悬挂点外没有内点,即 $r(\tilde{T}_2^{(2)})=0$。从而 $\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(2)}))=0$,由于 $p(\tilde{T}_2^{(2)})=s+1$,$q(\tilde{T}_2^{(2)})=s+1$,再根据引理1得,$m_{\tilde{T}_2^{(2)}}(1)=p(\tilde{T}_2^{(2)})-q(\tilde{T}_2^{(2)})+\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(2)}))=0$。此时,图 $\tilde{T}_2^{(2)}$ 不含拉普拉斯特征值1,再由引理2知,$m_{T_2}(1)=m_{\tilde{T}_2^{(2)}}(1)=0$,即双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值1。

情形1.4 若 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s$ 模3余数不唯一。不妨设有 s_1 个 l'_j 全模3余1,s_2 个 l'_j 全模3余2,s_3 个 l'_j 全模3余0。

根据引理2,在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l'_j}$ 上逐步去掉 P_3,所得图记为 $\tilde{T}_2^{(3)}$,显然 u 为其悬挂点。

情形1.4.1 当 $s_1=0$ 时,类似情形1.3可知,此时 $\tilde{T}_2^{(3)}$ 不含拉普拉斯特征值1,再根据引理2可得,此时双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值1。

情形1.4.2 当 $s_1\geqslant 1$ 时,显然在图 $\tilde{T}_2^{(3)}$ 中有 $p(\tilde{T}_2^{(3)})>q(\tilde{T}_2^{(3)})$,进一步由推论1可知,图 $\tilde{T}_2^{(3)}$ 含有拉普拉斯特征值1,再根据引理2可得,此时双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值1。

情形2 若 $l_1,l_2\cdots,l_k$ 与 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s$ 中有一组全模3余1,另一组不全模3余0。

类似情形1.2可知,此时双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值1。

情形3 若 $l_1,l_2\cdots,l_k$ 与 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s$ 中有一组全模3余2,另一组不全模3余1且不全模3余0。不妨设 $l_1,l_2,\cdots,l_k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$。

情形3.1 若 $l'_1,l'_2,\cdots,l'_s\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$。

根据引理2,在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l'_j}$ 上逐步去掉 P_3,所得图记为 $\tilde{T}_2^{(4)}$,显然 $p(\tilde{T}_2^{(4)})=k+s$,$q(\tilde{T}_2^{(4)})=k+s$,且图 $\tilde{T}_2^{(4)}$ 中除去悬挂点和次悬

挂点外只有 2 个内点 u 和 v, 即

$$r(\tilde{T}_2^{(4)})=2,\quad L_R(\tilde{T}_2^{(4)})=\begin{pmatrix} k & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix},$$

$\det(L_R(\tilde{T}_2^{(4)}))=ks-1$, 由于 $k\geqslant 2, s\geqslant 2$, 所以 $\det(L_R(\tilde{T}_2^{(4)}))\neq 0$, 从而 $\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(4)}))=0$。根据引理 1, $m_{\tilde{T}_2^{(4)}}(1)=p(\tilde{T}_2^{(4)})-q(\tilde{T}_2^{(4)})+\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(4)}))=0$, 此时, 图 $\tilde{T}_2^{(4)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。进一步由引理 2 知, $m_{T_2}(1)=m_{\tilde{T}_2^{(4)}}(1)=0$, 即双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3.2　若 $l_1', l_2', \cdots, l_s'$ 模 3 余数不唯一。不妨设 s_4 个 l_j' 全模 3 余 1, s_5 个 l_j' 全模 3 余 2, s_6 个 l_j' 全模 3 余 0。

根据引理 2, 在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l_j'}$ 上逐步去掉 P_3, 所得图记为 $\tilde{T}_2^{(5)}$。

情形 3.2.1　当 $s_4=0$ 时, 根据情形 3.1 可知, 此时 $\tilde{T}_2^{(5)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3.2.2　当 $s_4=1$ 时, v 是 $\tilde{T}_2^{(5)}$ 的次悬挂点, 且图 $\tilde{T}_2^{(5)}$ 中除去悬挂点和次悬挂点外只有一个内点, 即 $r(\tilde{T}_2^{(5)})=1$。又因为 $d(u)=k+1$, 所以 $L_R(\tilde{T}_2^{(5)})=d(u)-1>0$, 从而 $\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(5)}))=0$, 由于 $p(\tilde{T}_2^{(5)})=k+1+s_5$, $q(\tilde{T}_2^{(5)})=k+1+s_5$, 再根据引理 1 知, $m_{\tilde{T}_2^{(5)}}(1)=p(\tilde{T}_2^{(5)})-q(\tilde{T}_2^{(5)})+\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(5)}))=0$, 此时图 $\tilde{T}_2^{(5)}$ 不含拉普拉斯特征值 1, 由引理 2 可知, $m_{T_2}(1)=m_{\tilde{T}_2^{(5)}}(1)=0$, 即双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3.2.3　当 $s_4\geqslant 2$ 时, 在 $\tilde{T}_2^{(5)}$ 中显然有 $p(\tilde{T}_2^{(5)})>q(\tilde{T}_2^{(5)})$, 由推论 1 可知, $\tilde{T}_2^{(5)}$ 含有拉普拉斯特征值 1, 再根据引理 2 得, 此时双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值 1。

情形 4　若 $l_1, l_2\cdots, l_k$ 与 $l_1', l_2', \cdots, l_s'$ 这两组参数均模 3 余数不唯一。

不妨设 k_1 个 l_i 全模 3 余 1, k_2 个 l_i 全模 3 余 2, k_3 个 l_i 全模 3 余 0, s_7 个 l_j' 全模 3 余 1, s_8 个 l_j' 全模 3 余 2, s_9 个 l_j' 全模 3 余 0。

根据引理 2, 在 T_2 的每条外部路 P_{l_i} 和 $P_{l_j'}$ 上逐步去掉 P_3, 所得图记为 $\tilde{T}_2^{(6)}$。

情形 4.1　当 $k_1=s_7=0$ 时, 类似情形 3.1 可知, 此时 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。再根据引理 2, 双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 4.2　当 k_1, s_7 中有且仅有一个为 0 时, 不妨设 $k_1=0$, 当 $s_7=1$ 时, v 点为次悬挂点。

当 $k_2=0$ 时, 在 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 中有 $p(\tilde{T}_2^{(6)})>q(\tilde{T}_2^{(6)})$, 故 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。再根据引理 2, 即双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值 1。

当 $k_2\geqslant 1$ 时, 由于 u 是 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 唯一的内点, 根据情形 3.2.2 可知, 此时图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。再根据引理 2, 即双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值 1。

当 $s_7\geqslant 2$ 时, 显然有 $p(\tilde{T}_2^{(6)})>q(\tilde{T}_2^{(6)})$, 故图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。再根据引理 2, 双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值 1。

情形 4.3　当 k_1, s_7 均不为零时。

当 $k_1=s_7=1$ 时, u, v 均是 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 的次悬挂点, 且图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 中除去悬挂点和次悬挂点外没有内点, 即 $r(\tilde{T}_2^{(6)})=0$。故 $\nu(L_R(\tilde{T}_2^{(6)}))=0$, 由于 $p(\tilde{T}_2^{(6)})=2+k_2+s_8$, $q(\tilde{T}_2^{(6)})=2+k_2+s_8$, 再根据引理 1 得: $m_{\tilde{T}_2^{(6)}}(1)=p(\tilde{T}_2^{(6)})-q(\tilde{T}_2^{(6)})+\nu(L_R(G))=0$, 此时图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 不含拉普拉斯特征值 1, 进一步由引理 2 可知, $m_{T_2}(1)=m_{\tilde{T}_2^{(6)}}(1)=0$, 即双星树 T_2 不含拉普拉斯特征值 1。

当 k_1, s_7 有且仅有一个为 1 时, 则有 $s_7\geqslant 2$, 在图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 中显然有 $p(\tilde{T}_2^{(6)})>q(\tilde{T}_2^{(6)})$。由推论 1 可知, 图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 含有拉普拉斯特征值 1, 再根据引理 2, 双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值 1。

当 k_1, s_7 均大于 1 时, 即 $k_1\geqslant 2$ 且 $s_7\geqslant 2$, 在图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 中显然有 $p(\tilde{T}_2^{(6)})>q(\tilde{T}_2^{(6)})$。由推论 1 可知, 图 $\tilde{T}_2^{(6)}$ 含有拉普拉斯特征值 1, 再根据引理 2, 即双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值 1。

反过来, 设双星树 $T_2=S'(l_1, l_2\cdots, l_k, l_1', l_2', \cdots, l_s')$, 按照上述类似的方法, 通过递归删除 k 条外部路上的 P_3 以及 s 条外部路上的 P_3 后得到的图为 $\tilde{T}_2$, 当 $\tilde{T}_2\cong P_2$ 时, 根据引理 3 可知, $\tilde{T}_2$ 不含拉普拉斯特征值 1。若 $p(\tilde{T}_2)>q(\tilde{T}_2)$, 由推论 1 可知, 图 $\tilde{T}_2$ 含有拉普拉斯特征值 1, 再根据引理 2, 即双星树 T_2 含有拉普拉斯特征值 1, 矛盾。

类似于双星树, 在三星树 T_3 的每条外部路 $P_{l_{ij}}$ 上逐步去掉 P_3 后所得到的图形记为 $\hat{T}_3$, 其中 a_i 表示 1 长外部路, b_i 表示 2 长外部路 ($i=1,2$,

3),(其中 a_i,b_i 均为非负整数),$\hat{T}_3$ 如图6所示。

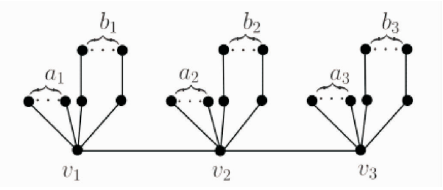

图6 $\hat{T}_3$ 示意图

Fig. 6 Graph $\hat{T}_3$

定理3 设 $T_3=S^*(l_{11},\cdots,l_{1j_1},l_{21},\cdots,l_{2j_2},l_{31},\cdots,l_{3j_3})$,其中 v_1,v_2,v_3 为 T_3 中的3个最大度点,$d(v_1)=j_1+1,d(v_2)=j_2+2,d(v_3)=j_3+1,j_i\geqslant 2$,用 $P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{ij_i}$ 表示最大度点 v_i 上关联的 l_{j_i} 条外部路($i=1,2,3$),则三星树 T_3 不含拉普拉斯特征值1当且仅当 $\hat{T}_3$ 满足 $p(\hat{T}_3)=q(\hat{T}_3)$ 且 $\hat{T}_3$ 不同构于 $\hat{T}_3^{(1,1)}$、$\hat{T}_3^{(1,2)}$、$\hat{T}_3^{(2,1)}$ 和 $\hat{T}_3^{(2,2)}$。图 $\hat{T}_3^{(1,1)}$、$\hat{T}_3^{(1,2)}$、$\hat{T}_3^{(2,1)}$ 和 $\hat{T}_3^{(2,2)}$ 分别如图7~图10所示。

证明 先证充分性。

根据引理2可知,在三星树 T_3 中逐步去掉外部路上的 P_3,不影响 T_3 中拉普拉斯特征值1的重数,因此,直接对 $\hat{T}_3$ 进行讨论。

当 $p(\hat{T}_3)>q(\hat{T}_3)$ 时,根据推论1可知,$\hat{T}_3$ 含有拉普拉斯特征值1。

当 $p(\hat{T}_3)=q(\hat{T}_3)$ 时,对每个 $i=1,2,3$ 都有 $a_i=0$ 或者 $a_i=1$。

情形1 若 $a_1=a_2=a_3=0$,记 $\hat{T}_3=\hat{T}_3^{(1)}$。

若 $b_1=b_3=0$,在图 $\hat{T}_3^{(1)}$ 中显然有 $p(\hat{T}_3^{(1)})>q(\hat{T}_3^{(1)})$,根据推论1可知,图 $\hat{T}_3^{(1)}$ 含有拉普拉斯特征值1。

若 b_1 与 b_3 有且仅有一个为0,显然有 $p(\hat{T}_3^{(1)})=q(\hat{T}_3^{(1)})$,且图 $\hat{T}_3^{(1)}$ 中仅有一个内点 v_1 或 v_3,因为 $d(v_i)\geqslant 2$,所以有 $L_R(\hat{T}_3^{(1)})=d(v_i)-1>0$,其中($i=1,3$)。从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(1)}))=0$,由引理1知,$m_{\hat{T}_3^{(1)}}(1)=0$,故 $\hat{T}_3^{(1)}$ 不含拉普拉斯特征值1。

若 $b_1\geqslant 1$ 且 $b_3\geqslant 1$,在图 $\hat{T}_3^{(1)}$ 中显然有 $p(\hat{T}_3^{(1)})=q(\hat{T}_3^{(1)})$,且 v_1,v_2,v_3 均为内点,则

$$\det(L_R(\hat{T}_3^{(1)}))=\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0\\ -1 & b_2+1 & -1\\ 0 & -1 & b_3\end{vmatrix}。$$

$\det(L_R(\hat{T}_3^{(1)}))=b_1(b_2b_3-1)+b_3(b_1-1)$,因为 $b_1\geqslant 1,b_2\geqslant 0,b_3\geqslant 1$ 且 b_1,b_2,b_3 均为整数,从而 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(1)}))=0$ 当且仅当 $b_1=b_2=b_3=1$ 或 $b_1=b_3=2,b_2=0$。

当 $a_1=a_2=a_3=0$ 且 $b_1=b_2=b_3=1$ 时,记 $\hat{T}_3^{(1)}=\hat{T}_3^{(1,1)}$,如图7所示。

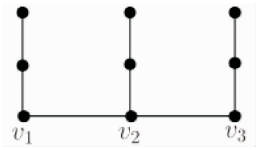

图7 $\hat{T}_3^{(1,1)}$ 示意图

Fig. 7 Graph $\hat{T}_3^{(1,1)}$

由于 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(1,1)}))=0$,从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(1)}))\neq 0$,再根据引理1知,$m_{\hat{T}_3^{(1,1)}}(1)\neq 0$,即 $\hat{T}_3^{(1,1)}$ 含有拉普拉斯特征值1。

当 $a_1=a_2=a_3=0$ 且 $b_1=b_3=2,b_2=0$ 时,记 $\hat{T}_3^{(1)}=\hat{T}_3^{(1,2)}$,如图8所示。

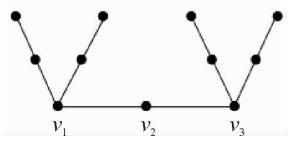

图8 $\hat{T}_3^{(1,2)}$ 示意图

Fig. 8 Graph $\hat{T}_3^{(1,2)}$

同理可证:$\hat{T}_3^{(1,2)}$ 含有拉普拉斯特征值1。

当 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(1,1)}))\neq 0$ 从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(1)}))=0$,再根据引理1知,$m_{\hat{T}_3^{(1)}}(1)=0$,即 $\hat{T}_3^{(1)}$ 不含拉普拉斯特征值1。

情形2 若 a_1、a_2 和 a_3 中恰有2个为零,记 $\hat{T}_3=\hat{T}_3^{(2)}$。

情形2.1 若 $a_1=1,a_2=a_3=0$。

当 $b_3=0$,图 $\hat{T}_3^{(2)}$ 中 v_3 为悬挂点,则 v_2 为次悬挂点,又由于 $a_1=1$,从而 v_1 也为次悬挂点,即 $\hat{T}_3^{(2)}$ 没有内点,显然有 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=0$。又因为 $p(\hat{T}_3^{(2)})=q(\hat{T}_3^{(2)})$,根据引理1知,$m_{\hat{T}_3^{(2)}}(1)=0$,即 $\hat{T}_3^{(2)}$ 不含拉普拉斯特征值1。

当 $b_3\geqslant 1$,在图 $\hat{T}_3^{(2)}$ 中有 $p(\hat{T}_3^{(2)})=q(\hat{T}_3^{(2)})$,且 v_2,v_3 均为内点,则

$$\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=\begin{vmatrix} b_2+1 & -1\\ -1 & b_3\end{vmatrix}。$$

$\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=b_3(b_2+1)-1$,由于 $b_3\geqslant 1$

为整数, b_2 为非负整数, 故 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=0$ 当且仅当 $b_2=0, b_3=1$。

当 $a_1=1, a_2=a_3=0$ 且 $b_2=0, b_3=1$ 时, 记 $\hat{T}_3^{(2)}=\hat{T}_3^{(2,1)}$, 如图 9 所示。

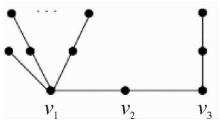

图 9　$\hat{T}_3^{(2,1)}$ 示意图

Fig. 9　Graph $\hat{T}_3^{(2,1)}$

由于 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2,1)}))=0$, 从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(2,1)}))\neq 0$, 再根据引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(2,1)}}(1)\neq 0$, 即 $\hat{T}_3^{(2,1)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。

当 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))\neq 0$ 则 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=0$, 再根据引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(2)}}(1)=0$, 即 $\hat{T}_3^{(2)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 2.2　若 $a_3=1, a_1=a_2=0$。

当 $b_1=0$ 时, 易证图 $\hat{T}_3^{(2)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

当 $b_1\geqslant 1$, 图 $\hat{T}_3^{(2)}$ 中显然有 $p(\hat{T}_3^{(2)})=q(\hat{T}_3^{(2)})$, 且 v_1, v_2 均为内点, 则

$$\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=\begin{vmatrix} b_1 & -1 \\ -1 & b_2+1 \end{vmatrix}。$$

$\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=b_1(b_2+1)-1$, 由于 $b_1\geqslant 1$ 为整数, b_2 为非负整数, 故 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=0$ 当且仅当 $b_1=1, b_2=0$。

当 $a_3=1, a_1=a_2=0$ 且 $b_1=1, b_2=0$ 时, 记 $\hat{T}_3^{(2)}=\hat{T}_3^{(2,2)}$, 如图 10 所示。

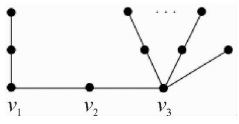

图 10　$\hat{T}_3^{(2,2)}$ 示意图

Fig. 10　Graph $\hat{T}_3^{(2,2)}$

由于 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2,2)}))=0$, 故 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(2,2)}))\neq 0$, 再根据引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(2,2)}}(1)\neq 0$, 即 $\hat{T}_3^{(2,2)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。

当 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))\neq 0$ 则 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=0$, 再根据引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(2)}}(1)=0$, 即 $\hat{T}_3^{(2)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 2.3　若 $a_2=1, a_1=a_3=0$。

若 b_1, b_3 至少有一个为 0 时, 在图 $\hat{T}_3^{(2)}$ 中显然有 $p(\hat{T}_3^{(2)})>q(\hat{T}_3^{(2)})$, 根据推论 1 可知, $\hat{T}_3^{(2)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。

若 $b_1\geqslant 1$ 且 $b_3\geqslant 1$, 在图 $\hat{T}_3^{(2)}$ 中有 $p(\hat{T}_3^{(2)})=q(\hat{T}_3^{(2)})$, 且 v_1, v_3 均为内点, 则

$$\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_3 \end{vmatrix}=b_1b_3。$$

因为 b_1, b_3 均为正整数, 故 $\det(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))\neq 0$, 从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(2)}))=0$, 根据引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(2)}}(1)=0$, 即 $\hat{T}_3^{(2)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3　若 a_1, a_2, a_3 中仅有 1 个为零, 记 $\hat{T}_3=\hat{T}_3^{(3)}$。

情形 3.1　若 $a_1=0, a_2=a_3=1$。

当 $b_1=0$, 在图 $\hat{T}_3^{(3)}$ 中有 $p(\hat{T}_3^{(3)})>q(\hat{T}_3^{(3)})$, 根据推论 1 可知, 图 $\hat{T}_3^{(3)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。

当 $b_1\geqslant 1$, 在图 $\hat{T}_3^{(3)}$ 中显然有 $p(\hat{T}_3^{(3)})=q(\hat{T}_3^{(3)})$, 因为 $d(v_1)\geqslant 2$, 所以 $L_R(\hat{T}_3^{(3)})=d(v_1)-1>0$, 从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(3)}))=0$, 由引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(3)}}(1)=0$, 故 $\hat{T}_3^{(3)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3.2　若 $a_3=0, a_1=a_2=1$。

同理可证: 当 $b_3=0$, 图 $\hat{T}_3^{(3)}$ 含有拉普拉斯特征值 1。当 $b_3\geqslant 1$, 图 $\hat{T}_3^{(3)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 3.3　若 $a_2=0, a_1=a_3=1$。

在图 $\hat{T}_3^{(3)}$ 中 v_2 为内点, 有 $p(\hat{T}_3^{(3)})=q(\hat{T}_3^{(3)})$, 由于 $d(v_2)\geqslant 2$, 从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(3)}))=0$, 由引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(3)}}(1)=0$, 故 $\hat{T}_3^{(3)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

情形 4　若 a_1、a_2 和 a_3 均不为零, 即 $a_1=a_2=a_3=1$, 记 $\hat{T}_3=\hat{T}_3^{(4)}$。

在图 $\hat{T}_3^{(4)}$ 中显然有 $p(\hat{T}_3^{(4)})=q(\hat{T}_3^{(4)})$, 且 v_1, v_2, v_3 均为次悬挂点, 即图 $\hat{T}_3^{(4)}$ 没有内点, 从而 $\nu(L_R(\hat{T}_3^{(4)}))=0$, 由引理 1 知, $m_{\hat{T}_3^{(4)}}(1)=0$, 故 $\hat{T}_3^{(4)}$ 不含拉普拉斯特征值 1。

综上可知, 当在图 $\hat{T}_3$ 中有 $p(\hat{T}_3)=q(\hat{T}_3)$ 且当 $\hat{T}_3$ 不同构于 $\hat{T}_3^{(1,1)}$、$\hat{T}_3^{(1,2)}$、$\hat{T}_3^{(2,1)}$ 和 $\hat{T}_3^{(2,2)}$ 时, $\hat{T}_3$ 不含拉普拉斯特征值 1, 再根据引理 2 可得, 三星树 T_3 不含拉普拉斯特征值 1。

反过来, 设三星树 T_3 通过递归删除每条外部

路 $P_{l_{ij}}$ 上的 P_3 后得到的图为 $\hat{T}_3$，若在图 $\hat{T}_3$ 中有 $p(\hat{T}_3)>q(\hat{T}_3)$，或 $\hat{T}_3\cong\hat{T}_3^{(1,1)}$，$\hat{T}_3^{(1,2)}$，$\hat{T}_3^{(2,1)}$，$\hat{T}_3^{(2,2)}$ 时，图 $\hat{T}_3$ 含有拉普拉斯特征值1，再根据引理2可知，三星树 T_3 含有拉普拉斯特征值1，矛盾。

2 小 结

一个端点度不小于3，另一个端点度等于1的路，被称为外部路。通过递归删除外部路上 P_3，刻画了不含拉普拉斯特征值1的星型树、双星树和三星树。星型树、双星树和三星树都是广义星型树，本文为研究不含拉普拉斯特征值1的广义星型树奠定了基础。一棵树删去叶子点之后只剩一条路的树称为毛毛虫树，去掉叶子点之后只剩一棵毛毛虫树的树称为龙虾树。通过递归删除广义星型树外部路上的 P_3，得到悬挂点和次悬挂点相等的龙虾树，本文的后续工作将研究悬挂点和次悬挂点相等的龙虾树不含拉普拉斯特征值1的情形。

参考文献：

[1] Cvetkovic D M, Rowlinson P, Simic S. An introduction to the theory of graph spectra[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Springer,1976.

[3] Watanabe M, Schwenk A J. Integral starlike trees[J]. Australian Mathematical Society, Series A, 1979, 28: 120-128.

[4] Lepovic M, Gutman I. No starlike trees are cospectral[J]. Discrete Mathematics, 2002, 242: 291-295.

[5] Omidi G R, Tajbakhsh K. Starlike trees are determined by their Laplacian spectrum[J]. Linear Algebra and its Application, 2007, 422: 654-658.

[6] Liu X G, Zhang Y P, Lu P L. One special doubles starlike graph is determined by its Laplacian spectrum[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(4): 435-438.

[7] 卢鹏丽, 刘小刚. 似双星树 $H(p,n,q)$ 由 Laplacian 谱刻画[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 37(2): 242-247.

[8] Gronef R, Merris R, Sunder V S. The Laplacian spectrum of a graph[J]. Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, 1990, 11(2): 218-238.

[9] Barik S, Lai A F, Pati S. On trees with Laplacian eigenvalue one[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2008, 56(6): 597-610.

[10] Guo J M, Feng L H, Zhang J M. On the multiplicity of Laplacian eigenvalues of graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2010, 60(3): 689-698.

[11] 张友, 李沐春. 星型树和双星树的谱半径的界[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(6): 84-89.

【责任编辑：周 全】