文章编号:1671-4229(2022)03-0048-07

布尔环及其谱的一些性质

郭俊辉

(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州　510006)

摘　要: 布尔环的来源背景是布尔代数, 是英国数学家 Boole 提出的数学模型, 由于缺乏物理背景,它后来的进展一度缓慢, 直到 Stone 提出著名的斯通定理才得以继续发展。文章主要以一个简单的阐述语言去推演斯通定理, 得益于在推演过程中对布尔环及其谱空间的了解,然后在布尔环上推广一个交换环的性质, 并发现了布尔环谱空间的一些特殊的拓扑性质。

关键词: 布尔环; 布尔代数; 斯通定理; 环的素谱; 可构造拓扑

中图分类号: O 187.2　　　**文献标志码:** A

Some properties of Boolean rings and their sprctrum

GUO Jun-hui

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The origin background of Boolean ring is Boolean algebra, a mathematical model proposed by British mathematician Boole. Due to the lack of physical background, its progress was slow until Stone put forward the famous Stone theorem to promote its development. In this paper, we try mainly to deduce Stone's theorem by simple language, benefiting from the understanding of Boolean ring and its spectral space in the derivation process, the second part of this paper extends a property of commutative ring onto Boolean ring, and finds some special topological properties of the spectral space of Boolean ring.

Key words: Boolean ring; Boolean algebra; Stone theorem; spectrum; constructible topology

布尔环的出现是由布尔代数作为背景衍生出来的,布尔代数在代数学(代数结构)、逻辑演算、集合论、拓扑空间理论、测度论、概率论和泛函分析等数学分支中均有应用,1967 年后, 在数理逻辑的分支之一的公理化集合论以及模型论的理论研究中, 也起着一定的作用。近几十年来, 布尔代数在自动化技术、电子计算机的逻辑设计等工程技术领域中有重要的应用。布尔代数一词源于英国数学家 Boole,他把逻辑简化成极为容易和简单的一种代数。在这种代数中, 适当材料上的“推理”, 成了公式初等运算的事情。例如矛盾律, 即 A 不能既是 B 又是非 B, 它可表示为 $x(1-x)=0$; 排中律可被说成 $x+(1-x)=1$。“且”对“或”的分配律可以表示为 $x(u+v)=xu+xv$。这样, 就使逻辑本身受到数学的支配[1]。为了使自己的研究工作趋于完善, 布尔在此后的漫长时间里, 又付出了不同寻常的努力。1854 年,他发表了《思维规律》这部杰作,布尔代数问世了。后来, Ernst 较为系统地给出布尔代数和分配格的定义[2]。在离散数学中, 布尔代数(有时叫布尔格)是有补分配格。首先提出布尔环与布尔格之间的紧密联系的是 Stone。在数学中, 斯通氏布尔代数表示定理声称所有布尔代数都同构于集合域。这个定理是深入理解在 20 世纪上半叶所拓展的布尔代数的基础,该定理首先由斯通 1936 年证明, 并以他的姓氏命名。斯通通过对希尔伯特空间上算子谱理论的研究而得出了它。这个定理

作者简介: 郭俊辉(1996—),男,硕士研究生. E-mail:2111915055@e.gzhu.edu.cn

引文格式: 郭俊辉. 布尔环及其谱的一些性质[J]. 广州大学学报(自然科学版),2022,21(3):48-54.

有多种阐述语言,例如任意一个布尔代数一定同构于某个集上的一个集合域,又或者说任意一个布尔代数也一定同构于某个拓扑空间的闭开代数等,也可以用拓扑学和范畴论的语言来重述如下:斯通表示定理断言在布尔代数范畴和斯通氏空间,也就是完全不连通紧致 Hausdorff 拓扑空间(也叫做布尔空间)范畴之间的对偶。在本文中,作者试图要将斯通定理叙述为更为简单浅显的一个版本,即:任意一个布尔格都与某个紧致的 Hausdorff 空间中的全体既开又闭的子集合所组成的格同构。在本文的第一部分通过对这个定理的推理,发现了布尔环及其素谱空间的特殊性,它有着其他一般交换环及对应素谱不一定有的性质。本文在第二部分正是利用了布尔环的特殊性质推广了一个在一般交换环上成立的命题:有限个素理若想可以覆盖一个理想,则必有其中一个素理想覆盖住该理想。在布尔环中,借助谱的知识,该命题中的条件"有限个"在某种条件下可以去掉。在文章的末尾,则单独探究布尔环谱空间的拓扑性质,除了发现这种空间是"散碎的"、完全不连通的,还发现当将谱空间的经典拓扑(Zariski 拓扑)划分得更细,划成可构造拓扑时,两种情况实际上是一回事,即根本没有变得"更细"。

1　斯通定理

斯通表示定理在数学史上影响深远,正如上文所说,斯通定理在不同的场合下表达出来的语言也是不一样的,又例如这样的表达:任一布尔代数同构于其全体极大滤子构成的紧致零维 Hausdorff 空间中的开闭集代数。受斯通定理的思维火花影响,不少学者继而不断揭示偏序集与拓扑空间之间的关系[3-5]。随着研究的加深,近年来多值逻辑也有较快的发展[6-7],而一些具有蕴含性质的格,例如 R_0-代数、BL-代数、MTL-代数等也相继被提出。自然地,一些斯通定理的推广工作也相继进行着,如在 R_0-代数上推广了布尔代数的斯通定理[8-9]。也有一些学者,例如刘应明等[5]对某类完全分配格给出了斯通定理的格值形式,用范畴的语言说,即分配格范畴对偶同构于凝聚 L-locale 范畴,(前提是)若格 L 是一个 frame 且 $0 \in L$ 是素元或 $1 \in L$ 是余素元。更进一步,假若 L 还是完全分配的,则分配格范畴对偶同构于凝聚满层 L-拓扑空间范畴。由以上叙述可感知斯通定理至今还不断焕发着它的活力,归根结底是因为斯通表示定理揭示了格论与拓扑空间理论之间的深刻联系,而王国俊[10]更是有创意地将斯通表示定理与广义空间理论以及拓扑分子格理论这些新学科联系起来研究。同样让人印象深刻的是郭铁信等[11]于 2011 年在复完备随机内积模上的随机酉算子群上面建立了斯通表示定理。在国外的一些研究中,有不少学者把注意力投向了布尔超代数,先是 Procesi 等在文献[12]中证明了布尔超代数上的斯通表示定理,后来 Procesi 在文献[13]中用拓扑的角度看待问题,并用拓扑语言阐述了布尔超代数上的斯通表示定理。

本文中提到的布尔环是所有元素都满足 $x^2 = x$ 的含幺交换环。以下首先介绍有关格的概念。格是一种特殊的偏序集,经过特殊化以后得到分配格,再特殊化以后可以得到布尔代数,是序结构的主体部分。在许多数学对象中,所考虑的元素之间具有某种顺序。例如一组实数间的大小顺序,一组命题间的蕴涵顺序等。这种顺序一般不是全序,即不是任意 2 个元素之间都能排列顺序,而是在部分元素之间的一种顺序,称为偏序。偏序集和格就是研究顺序的性质及作用而产生的概念和理论。格是其非空有限子集都有一个上确界和一个下确界的偏序集合。在 19 世纪的后几十年,德国数学家戴德金和施履德分别从数论和逻辑代数两个方向得出格的概念。但是其他数学家并未认识到它的重要性。直至 20 世纪 30 年代,在美国数学家伯克霍夫和挪威数学家奥尔的共同努力下,格论才焕发生机,发展成为一门独立的数学学科,在抽象代数、射影几何、点集论、拓扑学、泛函分析、逻辑和概率论等诸多领域产生广泛应用。例如在代数学中对于一个群与其子群格之间关系的研究,在数理逻辑中关于不可解度的研究。在图论中关于图分解的研究也大量用到格论。在密码学领域,关于公钥密码分析学的应用研究也常用到格理论及格基约减算法。

首先需要谈及格的定义,它有 2 种定义,一种是代数定义,另一种是偏序定义,2 种定义相互等价且在谈论格的时候永远不要将 2 种定义割裂来看。

定义 1[14](格的代数定义)　设 L 为一个集合,在 L 上定义 2 种在 L 中封闭的运算 $\vee$ 和 $\wedge$,使得对任意 $a,b \in L$ 满足以下性质:

(1) 交换律 $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;

(2) 结合律 $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;

(3) 幂等律 $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$;

(4) 吸收律 $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$。

则称$(L,\vee,\wedge)$是一个格。

定义2[14](格的偏序定义) 设L是一个偏序集,且使得任意2个元素构成的子集$\{a,b\}$一定有上确界(最小上界)和下确界(最大上界),则称$(L,\leqslant)$是一个格。

以上2种定义是相互等价的,有了定义1,可定义偏序关系为$a\leqslant b$当且仅当$a\wedge b=a$,或者等价地说$a\vee b=b$(容易验证这样定义的关系确实为偏序关系),则有

$$inf\{a,b\}=a\wedge b,\ sup\{a,b\}=a\vee b。$$

反之,由定义2出发,可分别定义2种运算为

$$a\vee b=sup\{a,b\}\text{和}a\wedge b=inf\{a,b\}。$$

容易验证这样定义的运算$\vee$和$\wedge$满足以上定义1中公理化要求的4个律[14]。自然地,关于格同构也有2种相对应的等价叙述[14]:格L_1与L_2同构是指能够建立L_1到L_2的一一映射φ使得映射φ可以保持2个运算$\vee$和$\wedge$,或者等价地说,φ和φ^{-1}都是保序的,其中,φ^{-1}是保序的这一条件是不可省略的。

布尔格是一种特殊的格,就好比布尔环是一种特殊的环。布尔格的定义则要在格的定义上再加多几个公理化要求。

定义3[15] 设$(L,\vee,\wedge,\leqslant)$是一个格,如果再有以下的性质被满足:

(1)L中有最大元和最小元(分别记作1和0);

(2)2个运算"$\vee$"和"$\wedge$"都对另一个满足分配律,即

$$(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c),$$
$$(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c);$$

(3)任意一个元$a\in L$,存在唯一的补元$a'\in L$使得

$$a\vee a'=1,\ a\wedge a'=0,$$

则称这种格是布尔格。

下面将指出布尔环和布尔格其实本质上是一回事,两者互相诱导,一一对应,从而为后面阐明斯通定理做出铺垫准备。

引理1[15-16] 布尔环和布尔格相互诱导,一一对应。

现在介绍一些布尔环的性质,以及交换环的素谱概念和布尔环的谱上性质。

引理2 交换环中若任意一个元素$x\in A$都有某个$n\in\mathbb{N}$且$n>1$,使得$x^n=x$,(n依赖于x),则A中所有素理想都是极大理想。

证明 设P是一个素理想,首先已有A/P是一个整环,再证A/P是域即可,即任意取$x\notin P$,$\bar{x}\neq\bar{0}$,则只需要证明$\bar{x}$有逆元即可。设$x^n=x$,则有

$$x(1-x^{n-1})=0,$$
$$x(\bar{1}-(\bar{x})^{n-1})=\bar{0}。$$

于是$(\bar{x})^{n-1}=\bar{1}$,因为无零因子。若$n=2$,则$\bar{x}=\bar{1}$,证毕。

若$n>2$,则

$$(\bar{x})^{n-1}=\bar{x}(\bar{x})^{n-2}=\bar{1},$$

找到了逆元,证毕。

命题1 在布尔环中有

(1)对一切$x\in A$,有$2x=0$;

(2)任意的素理想P都极大,且A/P是只有0与1的域;

(3)有限生成的理想是主理想。

证明

(1)这是较显然的;

(2)由引理2,即可得;

(3)只需证明由2个元素生成的理想是主理想即可。现证明以下断言即可,即

$$(x,y)=(x+y+xy)。$$

$(x+y+xy)\subseteq(x,y)$是显然的;反过来,由(1)的结论,有

$$x(x+y+xy)=x,\ y(x+y+xy)=y,$$

故$(x,y)\subseteq(x+y+xy)$,断言成立。同理对3个元素的情况也有

$$(x,y,z)=(x+y+z+xy+xz+yz+xyz),$$

以此类推,证毕。

以下简单提及交换环的素谱概念[15]。这是一个在代数几何中很基本的概念,有的时候谈及环的局部化都会必不可少地谈及素谱。环的素谱和谱空间理论起源于仿射代数簇(又称代数流形)的研究。现已广泛应用于许多数学分支中,如代数几何、层论、C^*-代数、拓扑学、环论、模论、格论和群论等。几何性质和代数性质之间会相互反馈信息。每一个几何性质都会返回一个代数性质,例如层(Sheaf),那么反过来代数性质也能返回一个几何性质,例如素谱,合在一起就成了概型(Schemes)。素谱的概念在交换代数以及代数几何中扮演了一个很基础的角色,就好比小学课本中的加减运算。素谱的可研究价值极大,例如从范畴论的角度去看,素谱还具备函子性:素谱可以视作反变函子。更多性质细节可参考文献[15]。设A是一个交换环,X是它所有素理想的集合,设E是A中的子集,α是E所生成的理想,记

$$V(E)=\{P\in X\mid P\supseteq E\},$$

则有以下性质:

(1) $V(E)=V(\alpha)=V(\sqrt{\alpha})$；

(2) $V(0)=X, V(1)=\varnothing$；

(3) 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是 A 中的一个子集簇，那么 $V(\cup_{i\in I}E_i)=\cap_{i\in I}V(E_i)$；

(4) 设 α,β 是 A 中任意 2 个理想，则 $V(\alpha)\cup V(\beta)=V(\alpha\cap\beta)=V(\alpha\beta)$。

从以上性质可以看出形如 $V(E)$ 的全体所构成的集族满足闭集的拓扑公理，于是 X 可以构成一个拓扑空间，定义 X 中的闭集：子集 F 为闭集当且仅当 F 可表成上述 $V(E)$ 的形式。该拓扑空间 (X,τ) 叫环 A 的素谱（记为 $Spec(A)$），这个拓扑 τ 称为 Zariski 拓扑。

注记 1　Zariski 拓扑并不是人们在 X 上研究的唯一拓扑，只是研究的最多的拓扑，如无特别声明，都是认为素谱上的拓扑是 Zariski 拓扑。另外比较多见的拓扑是可构造拓扑（记为 τ_c），在文章后面会提及关于布尔环在可构造拓扑下的素谱的相关性质特点。任意交换环在 Zariski 拓扑或者可构造拓扑下的素谱空间都是紧致的[15]。

注记 2　对任意交换环 A 中的任意元素 f，定义

$$X_f=X\backslash[V((f))]=\{P\in X|f\notin P\},$$

则 X_f 显然是 (X,τ) 中的开集，并且全体形如 X_f 的集族能构成 (X,τ) 的一组拓扑基[14]。且有以下性质：

(1) $X_f\cap X_g=X_{fg}$；

(2) $X_f=\varnothing\Leftrightarrow f$ 是幂零元；

(3) $X_f=X\Leftrightarrow f$ 是可逆元。

更详细的性质可参考文献[14]。

命题 2[15-16]　设 A 是布尔环，(X,τ) 是带有 Zariski 拓扑的 A 的素谱空间，则

(1) 每一个 X_f 在 (X,τ) 中既开又闭；

(2) 对有限个 $f_1,\cdots,f_n\in A$，存在 $f_0\in A$，使得 $X_{f_1}\cup\cdots\cup X_{f_n}=X_{f_0}$；

(3) 形如 X_f 的集合是 (X,τ) 中仅有的既开又闭的子集；

(4) (X,τ) 是紧致的 Hausdorff 空间。

证明　(1)～(4) 在文献[15－16]中都有涉及。这里简单提及 (2)，要解决有限个的情形只要解决 2 个的情形即可，结合命题 1 中的 (3)，有

$$\begin{aligned}X_f\cup X_g&=[V((f))\cap V((g))]^c=\\&[V(\{f,g\})]^c=\\&[V((f+g+fg))]^c=X_{f+g+fg}。\end{aligned}$$

在本文的下一个部分由 (4) 会推出深刻的结论。

结合以上的铺垫得到最后的斯通定理：

定理 1[3,15]（斯通定理）　任意一个布尔格都与某个紧致的 Hausdorff 空间中的全体既开又闭的子集合所组成的格同构。

证明　给出任意的一个布尔格 $(L,\vee,\wedge,\leqslant)$，根据引理 1，设 A 是与之对应的布尔环，(X,τ) 是环的谱，$\sum=\{X_f|f\in A\}$，则 $\sum$ 是紧致的 Hausdorff 空间 (X,τ) 中全体既开又闭的子集集合，定义偏序关系为集合的包含关系，即

$$X_f\leqslant X_g\Leftrightarrow X_f\subseteq X_g,$$

这种情况下对应的运算"$\vee$"和"$\wedge$"实际上就是集合的并和交，则容易验证 $(\sum,\vee,\wedge,\leqslant)$ 构成一个格。下面验证格同构 $(L,\vee,\wedge,\leqslant)\cong(\sum,\vee,\wedge,\leqslant)$，定义映射：

$$\varphi:L\to\sum \text{ 为 } \varphi(f)=X_f,$$

则根据引理 1 以及命题 2 可得：

$$\begin{aligned}\varphi(f\vee g)&=\varphi(f+g+fg)=X_{f+g+fg}=\\&X_f\vee X_g=\varphi(f)\vee\varphi(g)。\end{aligned}$$

根据注记 2 中的性质 $(X_f\cap X_g=X_{fg})$，有

$$\varphi(f\wedge g)=\varphi(fg)=X_{fg}=X_f\wedge X_g=\varphi(f)\wedge\varphi(g)。$$

通过验证，φ 确实保持运算"$\vee$"和"$\wedge$"，因而是格同构，从而完成了证明。

2　布尔环的素谱的一些性质

以上通过推理出斯通定理的一个简单形式，发现了布尔环的独特性，并且这种独特性会转嫁到它的素谱中，使得它的素谱也是一个很特别的拓扑空间。在这个部分，将特别研究布尔环的素谱的一些性质。

布尔环所具备的特殊性，首先可以用来拓展一个在普通的交换环上很重要且经常使用但是又难以拓展的性质：若存在有限个素理想可以覆盖一个普通的理想，则必有其中一个素理想覆盖住该理想。为了阐明这项工作，先做一些铺垫准备，介绍一些相关知识。

命题 3　任意的交换环的素谱 (X,τ) 中，X_g 是紧致的子集（对任意的 $g\in A$）。

证明　只需证明假若一簇拓扑基中的成员 $\{X_{f_i}\}_{i\in I}$ 能够覆盖住 X_g，则有有限的子覆盖即可。设 $X_g\subseteq\cup_{i\in I}X_{f_i}$，即有蕴含关系：$P$ 为 A 中的素理想，$g\notin P\Rightarrow\exists f_0$ 使得 $f_0\notin P$，

等价于

$$f_i\in P,\forall i\Rightarrow g\in P,$$

则有等式：

$$V(\{f_i \mid i\in I\})=V(\{g,f_i \mid i\in I\})。$$

于是有

$$\sqrt{(\{f_i \mid i\in I\})}=\sqrt{(\{g,f_i \mid i\in I\})},$$

得

$$g\in\sqrt{(\{f_i \mid i\in I\})},$$

这就存在有限个$f_{i_1},\cdots f_{i_k}$以及某$n\in\mathbb{N}$使得

$$g^n=c_1f_{i_1}+\cdots+c_nf_{i_k},$$

则素理想P如果同时包含$f_{i_1},\cdots f_{i_k}$，则会包含g^n，从而包含g，因而有

$$X_g\subseteq\cup_{j=1}^{k}X_{f_{i_j}},$$

证毕。

定义4[17] 拓扑空间中的子集族$\mathcal{A}$称为有核的，如果$\mathcal{A}$中任意有限个成员之交非空。

命题4[17] 拓扑空间(X,τ)紧致当且仅当X的任意有核闭集族之交$\cap_{A\in\mathcal{A}}A\neq\varnothing$。

回忆关于素理想的一个常用性质(文献[15]中第10页的命题1.11(i))：对任意有限个A中素理想$P_1,\cdots,P_n$，如果A中的某个理想α被它们覆盖住，即$\alpha\subseteq\cup_{i=1}^{n}P_i$，则存在某$i_0$使得$\alpha\subseteq P_{i_0}$。在这里发现，条件“有限个”是重要且不可以随便去除的，因为在证明过程中(参考文献[15]的第10页)用到了数学归纳法，只能对有限的n次步骤成立。因而自然地会有问题：在什么特殊的环境中可以不再提及“有限”的条件而又有类似的结论呢?

借助布尔环的特殊性,可对上面的问题做出其中一种回答，具体的表述如下：

命题5 在布尔环A中，设X是它的素谱，设理想$\alpha\subseteq\cup_{P\in X_f}P$，则必存在某$P_0\in X_f$使得$\alpha\subseteq P_0$。

证明 集族$\{V((a))\cap X_f \mid a\in\alpha\}$是紧致的子空间$X_f$上的闭集族，并且是有核的，事实上，

$$[V((a_1))\cap X_f]\cap\cdots\cap[V((a_n))\cap X_f]=$$
$$V((a_1,\cdots,a_n))\cap X_f=V((a_0))\cap X_f,$$

其中，$(a_1,\cdots,a_n)=(a_0)$是由命题1(3)得来，且$a_0\in\alpha$，由$\alpha\subseteq\cup_{P\in X_f}P$可知会存在某个$P'\in X_f$使得$a_0\in P'$，则

$$P'\in V((a_0))\cap X_f,$$

即集族$\{V((a))\cap X_f \mid a\in\alpha\}$是有核闭集族，根据命题4，集族$\{V((a))\cap X_f \mid a\in\alpha\}$全员之交非空，则会存在一个$P_0\in X_f$使得

$$P_0\ni a,\ \forall a\in\alpha,$$

即

$$\alpha\subseteq P_0,$$

证毕。

注记3 以上命题条件中的X_f当然也可以换成某个$V(E)$，因为$V(E)$是紧致空间中的闭集，从而也是紧致的[17]，然后用同样的方法去证明。

关于布尔环的素谱空间有一个很特别的拓扑性质，就是完全不连通，即任意一个至少含2点的子集都是不连通的，也就是说连通的子集只能是单点集。由于布尔代数的影响很大且性质独特，故和布尔代数相挂钩的研究对象也变得“特别”了，例如现在讨论的布尔环的素谱空间。所以，完全不连通的紧致的Hausdorff空间就被人们特别地称为“布尔空间”[3,14-15]。根据文献[18]的引理3.1,至少可以知道非平凡含幺布尔环的素谱空间一定是不连通的,但是仅仅得出这个结论还远远不够,所以有下面的命题6：

命题6 布尔环的素谱空间是布尔空间。

证明 根据命题2(4)，只需证明(X,τ)中任意一个至少含2点的子集F都是不连通的即可。设

$$P_1,P_2\in F\subseteq X\text{ 且 }P_1\neq P_2,$$

则存在某个X_f使得$P_1\in X_f$且$P_2\notin X_f$，无疑X_f是开集，但是它也是闭集，根据命题3，X_f是紧致的子集，在紧致的Hausdorff空间中紧致子集等价于闭集[17]，所以X_f既开又闭。故$X_f\cap F$是F中既开又闭的真子集(含P_1却不含P_2)，所以F不连通。

注记1中提到的可构造拓扑τ_c，一方面提及这种拓扑的一个原因是可构造拓扑本身也是交换环的素谱上的重要研究对象，另一方面，针对本文着重研究的布尔环，它的素谱上的可构造拓扑有着一个有趣的事实：布尔环的素谱带上Zariski拓扑和带上可构造拓扑其实是一回事。

先介绍什么是可构造拓扑。

定义5[15] 对任意的交换环A，记X为A的全体素理想的集合，记

$$\tau_c=\{U\subseteq X \mid \text{存在交换环}B\text{以及环同态}f:A\to B,\text{使得}X\backslash U=f^*(Spec(B))\},$$

其中，$f^*:Spec(B)\to Spec(A)$定义为：对任意的$q\in Spec(B)$，有

$$f^*(q)=f^{-1}(q)\in Spec(A),$$

τ_c能够构成一个拓扑从而使(X,τ_c)成为一个拓扑空间，称τ_c为X上的可构造拓扑。

注记4 对以上τ_c的拓扑公理的验证，只需验证闭集的拓扑公理即可[15]：

(1)设有一族交换环B_i以及相配的环同态$f_i:A\to$

$B_i, i\in I$, 指标集 I 可以是无穷集, 则有

$$f^*(Spec(\underset{i\in I}{\otimes}B_i))=\cap_{i\in I}f_i^*(Spec(B_i))。$$

在这里要特别解释一下, $\underset{i\in I}{\otimes}B_i$ 是无穷个 A 代数做张量积。无穷个 A 代数做张量积的定义如下[14]: 设 $(B_i)_{i\in I}$ 是一族 A 代数, 对 I 中任意有限子集 J, 记

$$B_J=\underset{i\in I}{\otimes}B_j\text{(这是定义明确的)。}$$

记指标集

$$\Sigma=\{J|J\subset I,\text{是 } I \text{ 中的有限集}\},$$

定义 Σ 中的序关系:

$$J\leqslant K\Leftrightarrow J\subseteq K,$$

则 Σ 是一个正向集(即特殊的偏序集, 满足对任意的2个指标 i,j 都会存在某个指标 k 使得 $i\leqslant k$ 以及 $j\leqslant k$), 因为对任意的 $J,K\in\Sigma$ 有

$$J\cup K\in\Sigma, J\subseteq J\cup K, K\subseteq J\cup K,$$

对任意的指标 $J\leqslant K$, 有典范的 A 代数同态

$$\mu_{JK}:B_J\to B_K,$$

则 (B_J,μ_{JK}) 构成一个正向系统[15]。最后定义无穷个 A 代数 B_i 的张量积为该正向系统的正向极限, 即

$$\underset{i\in I}{\otimes}B_i=\varinjlim B_J。$$

为了再进一步说明 $f^*(Spec(\underset{i\in I}{\otimes}B_i))=\cap_{i\in I}f_i^*(Spec(B_i))$ 的成立, 需要再借助2个事实:

(i)设 (B_i,g_{ij}) 是一个环的正向系统, B 是正向极限, 对每个 i 都有环同态 $f_i:A\to B_i$, 且对任意的 $i\leqslant j$ 都有 $g_{ij}\circ f_i=f_j$(即 (B_i,g_{ij}) 构成 A 代数的正向系统)。f_i 自然诱导出 $f:A\to B$, 则有结论

$$f^*(Spec(B))=\cap_i f_i^*(Spec(B_i))。$$

(ii)设有环同态 $f:A\to B$ 以及 $g:A\to C$, 定义同态 $h:A\to B\otimes_A C$ 为

$$h(a)=f(a)\otimes 1,$$

则有结论:

$$h^*(Spec(B\otimes_A C))=f^*(Spec(B))\cap g^*(Spec(C))。$$

至此, 结合(i)与(ii)的结果就自然得到

$$f^*(Spec(\underset{i\in I}{\otimes}B_i))=\cap_{i\in I}f_i^*(Spec(B_i))。$$

(2)设有环同态: $f_1:A\to B_1$ 以及 $f_2:A\to B_2$, 定义环同态: $f:A\to B_1\times B_2$ 为

$$f(a)=(f_1(a),f_2(a)),$$

则有

$$f^*(Spec(B_1\times B_2))=f_1(Spec(B_1))\cup f_2(Spec(B_2))。$$

(3)对于零同态: $f:A\to 0$, 有 $f^*(Spec(0))=\varnothing$。

(4)对于恒同映射 $id:A\to A$, 有 $(id)^*(Spec(A))=X$。

命题7 可构造拓扑比 Zariski 拓扑更大(或者说更细), 即 $\tau\subseteq\tau_c$。

证明 只需证明 Zariski 拓扑中的闭集一定是可构造拓扑中的闭集即可。任取 Zariski 拓扑中的一个闭集 $V(\alpha)$, 其中 α 是任意一个 A 中的理想。有典范同态

$$\pi:A\to A/\alpha,$$

则有 $V(\alpha)=\pi^*(Spec(A/\alpha))$, 证毕。

命题8 可构造拓扑是使得交换环的素谱中 X_f 既开又闭的最小拓扑(任意的 $f\in A$)。

证明 (1)首先证明 X_f 在可构造拓扑中既开又闭, 是开的已经显然了。记 A_f 是 A 的分式环, 即其中的乘法封闭子集是 f 的所有次幂(含 $1=f^0$)所构成的集合, 则有典范同态

$$\varphi:A\to A_f,$$

则 $X_f=\varphi^*(Spec(A_f))$。从而 X_f 也是闭集。

(2)设 τ_Ω 是定义在 X 上的使得任意 X_f 既开又闭的拓扑, 需要证明

$$\tau_c\subseteq\tau_\Omega,$$

即需要证明对任意的 $\psi:A\to B, \psi^*(Spec(B))$ 是 (X,τ_Ω) 中的闭集。

设

$$P_1\notin\psi^*(Spec(B)),$$

则 $P_1\subsetneq P_1^{ec}$, 因为有 P 是 B 中的一个素理想的局限当且仅当 $P=P^{ec}$ 这一等价条件[15]。取 $f\notin P_1$ 且 $f\in P_1^{ec}$, 则设

$$\psi(f)=\sum_{i=1}^n\psi(g_i)b_i\in P_1^e,$$

其中, $g_i\in P_1, b_i\in B$。则

$$P_1\in X_f\cap\bigcap_{i=1}^n V((g_i))\in\tau_\Omega,$$

且 $X_f\cap\bigcap_{i=1}^n V((g_i))$ 不交 $\psi^*(Spec(B))$, 若不然可设

$$P_2\in\psi^*(Spec(B))\cap X_f\cap\bigcap_{i=1}^n V((g_i)),$$

则存在 $q_2\in Spec(B)$, 使得 $q_2^c=p_2$, 等价于 $p_2^{ec}=p_2$, 由 $g_i\in p_2$ 以及 $\psi(f)=\sum_{i=1}^n\psi(g_i)b_i$, 可得

$$\psi(f)\in p_2^e,$$

因此

$$f\in p_2^{ec}=p_2,$$

这与 $P_2\in X_f$ 相矛盾。综上可得 $\psi^*(Spec(B))$ 是 (X,τ_Ω) 中的闭集。

有了以上的铺垫工作, 现在可以说在布尔环上的 Zariski 拓扑和可构造拓扑是一回事。由命题2知道布尔环上的 Zariski 拓扑是使得每一个 X_f 既开又闭的拓扑, 所以由命题8可知 $\tau_c\subseteq\tau$, 又由命题7得 $\tau\subseteq\tau_c$, 综上可得这2种拓扑实际上是一回事。

参考文献:

[1] Morris K. 古今数学思想(第三册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[2] Ernst S. Vorlesungen uber die algebra der logikj[M]. Leipzig: B. G. Teubners Verlag, 1966.

[3] Stone M H. The theory of representation for Boolean algebras[J]. Transactions of American Mathematical Society, 1936, 40(1): 37-111.

[4] Sikorski R. Boolean algebras[M]. Berlin: Springer Verlag, 1964.

[5] 刘应明, 张德学. 不分明拓扑中的 Stone 表示定理[J]. 中国科学, A 辑, 2003, 33(3): 236-247.

[6] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006.

[7] Gottwald S. A treatise on many valued logics[M]. London: Research Studies Press, 2001.

[8] 周红军. R_0-代数的 Stone 拓扑表示定理[J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(5): 14-23.

[9] 王国俊. 蕴涵格与 Stone 表现定理的推广[J]. 科学通报, 1998(10): 1033-1036.

[10] 王国俊. Stone 表现定理与广义空间理论[J]. 江汉石油学院学报, 1996, 18(3): 122-128.

[11] 郭铁信,张霞.复完备随机内积模上的随机酉算子群的 Stone 表示定理[J].中国科学:数学,2012,42(3):181-202.

[12] Procesi C R, Rota R. In algebraic hyperstructures and applications[J]. World Science, 1991(4): 161-165.

[13] Procesi C R. Stone's representation theorem for Boolean hyperalgebras: Topological version[J]. Combinatorics Discrete Math, 1992, 155(3): 211-214.

[14] 章炯民, 陶增乐. 离散数学[M]. 3 版. 上海: 华东师范大学出版社, 2009.

[15] Atiyah M F, Macdonald I G. 交换代数导引[M]. 冯绪宁等译. 北京: 科学出版社, 1982.

[16] 曲伟. 布尔环及其素谱[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2012, 25(4): 14-17.

[17] 尤承业. 基础拓扑学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.

[18] 谢国根. 交换环的素谱与极大谱的连通性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2014, 30(2): 216-220.

【责任编辑: 周 全】

(上接第 36 页)

[14] Helleseth T, Love T K. The number of cross-join pairs in maximum length linear sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1991, 37(6): 1731-1733.

[15] Mykkeltveit J, Szmidt J. On cross joining de Bruijn sequences[J]. Contemporary Mathematics, 2015,632:333-344.

[16] Golomb S. Shift register sequences[M]. Laguna Hills:Aegean Park Press, 1982.

[17] Li C Y, Zeng X Y, Li C L, et al. A class of de Bruijn sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(12):7955-7969.

[18] Li C L, Zeng X Y, Li C L, et al. Construction of de Bruijn sequences from LFSRs with reducible characteristic polynomials[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 62(1):610-624.

[19] Hauge E R, Helleseth T. De Bruijn sequences, irreducible codes and cyclotomy[J]. Discrete Mathematis, 1996,159(1): 143-154.

【责任编辑: 周 全】