文章编号:1671-4229(2022)01-0034-07

几类笛卡尔乘积图的邻点全和可区别全染色

叶宏波[1],杨 超[1*],殷志祥[1],姚 兵[2]
(1.上海工程技术大学 数理与统计学院/智能计算与应用统计研究中心,上海 201620;
2.西北师范大学 数学与统计学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 设$f:V(G)\cup E(G)\to[k]$是图G的一个非正常的k-全染色,令权重$\phi(x)=f(x)+\sum_{x\in e}f(e)+\sum_{y\in \mathbf{N}(x)}f(y)$,其中,$N(x)=\{y\in V(G)\mid xy\in E(G)\}$对任意的边$uv\in E(G)$,如果有$\phi(u)\neq\phi(v)$成立,则称$f$为图$G$的一个邻点全和可区别非正常$k$-全染色。图$G$的邻点全和可区别非正常全染色中最少的颜色数$k$叫做$G$的邻点全和可区别全色数,记为$fgndi_{\Sigma}(G)$。文章研究了几类笛卡尔乘积图$G\times H$的邻点全和可区别非正常全染色,得到$fgndi_{\Sigma}(P_m\times P_n)=fgndi_{\Sigma}(P_m\times C_n)=fgndi_{\Sigma}(C_m\times C_n)=fgndi_{\Sigma}(P_m\times K_n)=fgndi_{\Sigma}(C_m\times K_n)=2$。结果表明,邻点全和可区别全染色猜想对上述几类笛卡尔乘积图均成立。

关键词: 邻点全和可区别非正常全染色;邻点全和可区别全染色数;笛卡尔乘积图

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Neighbor full sum distinguishing total coloring of several types of Cartesian Product graphs

YE Hong-bo[1], *YANG Chao*[1*], *YIN Zhi-xiang*[1], *YAO Bing*[2]
(1. School of Mathematics Physics and Statistics/Center of Intelligent Computing and Applied Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China;
2. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let $f:V(G)\cup E(G)\to[k]$ be an improper total k-coloring of G. Set $\phi(x)=f(x)+\sum_{x\in e}f(e)+\sum_{y\in \mathbf{N}(x)}f(y)$, where $N(x)=\{y\in V(G)\mid xy\in E(G)\}$. If $\phi(u)\neq\phi(v)$ for any edge $uv\in E(G)$, then f is called a neighbor full sum distinguishing total non-proper k-coloring of G. The smallest value k for which G has such an improper coloring is called the neighbor full sum distinguishing total chromatic number of G and denoted by $fgndi_{\Sigma}(G)$. In this paper, we investigate the neighbor full sum distinguishing non-proper total coloring of several types of Cartesian Product graphs and obtain $fgndi_{\Sigma}(P_m\times P_n)=fgndi_{\Sigma}(P_m\times C_n)=fgndi_{\Sigma}(C_m\times C_n)=fgndi_{\Sigma}(P_m\times K_n)=fgndi_{\Sigma}(C_m\times K_n)=2$. The results show that the conjecture is valid for the above Cartesian Product graphs.

Key words: neighbor full sum distinguishing non-proper total coloring; neighbor full sum distinguishing total chromatic number; Cartesian Product graphs

---

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61672001,61662066,62072296)

作者简介: 叶宏波(1998—),男,硕士研究生. E-mail: yehongbo724@163.com
* 通信作者. E-mail: yangchaomath0524@163.com

引文格式:叶宏波,杨超,殷志祥,等. 几类笛卡尔乘积图的邻点全和可区别全染色[J].广州大学学报(自然科学版),2022,21(1):34-40.

0 引　言

图的染色问题是图论中的重要问题之一,在数学、化学和计算机科学等领域有广泛的应用,具体涉及排课问题、交通问题、电路设计问题和无线电通讯频道分配问题等。从最初的点染色[1]、边染色[2]和全染色[3-5],再到后来的(邻)点可区别边染色[6]、(邻)点可区别全染色[7-8]、邻和可区别边染色[9-10]和邻和可区别全染色[11-13]等,染色问题一直都是学者们关注和研究的热点。2017 年,Flandrin 等[14]定义了图的邻点全和可区别全染色,目前此类染色还有待进一步研究。本文将对几类笛卡尔积图的邻点全和可区别全染色问题进行深入探讨。

文中 $V(G)$、$E(G)$和 $\Delta(G)$分别表示图 G 的顶点集、边集和顶点的最大度,集合$[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b\}$ $(a<b)$,特别地,$[k]=\{1,2,\cdots,k\}$。下面介绍一些与本文相关的概念。

定义 1[14]　设$f:V(G)\cup E(G)\to[k]$是图 G 的一个非正常的 k-全染色,令权重 $\phi(x)=f(x)+\sum\limits_{x\in e}f(e)+\sum\limits_{y\in \mathbf{N}(x)}f(y)$,其中,$N(x)=\{y\in V(G)\mid xy\in E(G)\}$对任意的边 $uv\in E(G)$,如果有 $\phi(u)\neq\phi(v)$成立,则称 f 为图 G 的一个邻点全和可区别非正常 k-全染色。图 G 的邻点全和可区别非正常全染色中最少的颜色数 k 叫做 G 的邻点全和可区别全色数,记为$fgndi_{\Sigma}(G)$。

2021 年,Chang 等①研究了路、圈、三正则图、星、完全图、超立方图、二部图、完全 r-部图的邻点全和可区别全染色,并提出下述猜想:

猜想[15]:对于任意一个阶数至少为 3 的简单连通图 G,都有$fgndi_{\Sigma}(G)\leqslant 3$。

定义 2　设 $G_1=(V_1,E_1)$与 $G_2=(V_2,E_2)$是 2 个简单连通图,G_1 与 G_2 的笛卡尔乘积图定义为 $G_1\times G_2=(V,E)$,其中,$V=V_1\times V_2=\{(u_i,v_j)\mid u_i\in V_1,\ v_j\in V_2\}$,

$$E=\{((u_1,v_1),(u_2,v_2))\mid v_1=v_2\text{ 且}(u_1,u_2)\in E_1,\text{或 }u_1=u_2\text{ 且}(v_1,v_2)\in E_2\}。$$

本文研究了几类笛卡尔乘积图的邻点全和可区别非正常全染色,所得结论证实了上述猜想。

1 路、圈之间的笛卡尔乘积图

本文中路、圈之间的笛卡尔乘积图分为:①路与路笛卡尔乘积图;②路与圈笛卡尔乘积图;③圈与圈笛卡尔乘积图。本文定义 $G_m\times H_n$ 表示有 m 行和 n 列,其中,$v_{i,j}$表示第 i 行第 j 列的点。

定理 1　$fgndi_{\Sigma}(P_m\times P_n)=2$。

证明　易得$fgndi_{\Sigma}(P_2\times P_2)=2$。由于 m 为奇数,n 为偶数,与 m 为偶数,n 为奇数时 $P_m\times P_n$ 结构相同,所以下面分 3 种情况讨论。

情形 1. $m\equiv1(\bmod 2),n\equiv1(\bmod 2)$。

首先令$f(v_{i,j})=2(i\equiv0(\bmod 2),\ j\equiv0(\bmod 2))$,其余点和边均染 1。

此时各点的权重为:$\phi(v_{1,1})=\phi(v_{1,n})=\phi(v_{m,1})=\phi(v_{m,n})=5$;

$\phi(v_{i,j})=8(i=1,m,\ j\equiv0(\bmod 2);i\equiv0(\bmod 2),\ j=1,n)$;

$\phi(v_{i,j})=7(i=1,m,\ j\equiv1(\bmod 2),\ j\neq1,n;i\equiv1(\bmod 2),i\neq1,m,\ j=1,n)$;

$\phi(v_{i,j})=9(i\equiv1(\bmod 2),i\neq1,m,\ j\equiv1(\bmod 2),\ j\neq1,n)$;

$\phi(v_{i,j})=10(i\equiv0(\bmod 2),\ j\equiv0(\bmod 2))$;

$\phi(v_{i,j})=11(i\equiv0(\bmod 2),\ j\equiv1(\bmod 2),\ j\neq1,n;i\equiv1(\bmod 2),i\neq1,m,\ j\equiv0(\bmod 2))$。

情形 2. $m\equiv0(\bmod 2),n\equiv0(\bmod 2)$。

令$f(v_{i,j})=2(i\equiv0(\bmod 2),i\neq m,\ j\equiv0(\bmod 2),\ j\neq n)$,$f(v_{m-1,j}v_{m,j})=f(v_{i,n-1}v_{i,n})=2$ $(i\equiv0(\bmod 2),i\neq m,\ j\equiv0(\bmod 2),\ j\neq n)$,其余点和边均染 1。

此时各点权重为:$\phi(v_{1,1})=\phi(v_{1,n})=\phi(v_{m,1})=\phi(v_{m,n})=5$;

$\phi(v_{i,j})=7(i=1,m,\ j\equiv1(\bmod 2),\ j\neq1;i\equiv1(\bmod 2),i\neq1,\ j=1,n)$;

$\phi(v_{i,j})=8(i=1,m,\ j\equiv0(\bmod 2),\ j\neq n;i\equiv0$

---

① Chang J Z, Yang C, Yin Z X, et al. Neighbor full sum distinguishing non-proper total coloring of graphs[J]. Submitted to Journal, 2021.

$(\bmod 2), i \neq m, j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=9(i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1)$;

$\phi(v_{i,j})=10(i \equiv 0(\bmod 2), i \neq m, j \equiv 0(\bmod 2), j \neq n)$;

$\phi(v_{i,j})=11(i \equiv 0(\bmod 2), i \neq m, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1; i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, j \equiv 0(\bmod 2), j \neq n)$。

情形3. $m \equiv 0(\bmod 2), n \equiv 1(\bmod 2)$。

此时令 $f(v_{i,j})=2(i \equiv 0(\bmod 2), i \neq m, j \equiv 0(\bmod 2)), f(v_{m-1,j} v_{m,j})=2(j \equiv 0(\bmod 2))$,其余点和边均染1。

则各点的权重为:$\phi(v_{1,1})=\phi(v_{m,1})=\phi(v_{1,n})=\phi(v_{m,n})=5$;

$\phi(v_{i,j})=8(i=1, m, j \equiv 0(\bmod 2); i \equiv 0(\bmod 2), i \neq m, j \equiv 0(\bmod 2))$;

$\phi(v_{i,j})=7(i=1, m, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1, n; i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=9(i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=10(i \equiv 0(\bmod 2), i \neq m, j \equiv 0(\bmod 2))$;

$\phi(v_{i,j})=11(i \equiv 0(\bmod 2), i \neq n, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1; i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, m, j \equiv 0(\bmod 2))$。

综上3种情形可得任意相邻两点的权重各不相等,即 $fgndi_{\Sigma}(P_m \times P_n) \leqslant 2$,又 $fgndi_{\Sigma}(P_m \times P_n) \geqslant 2$,所以 $fgndi_{\Sigma}(P_m \times P_n)=2$。

定理2 $fgndi_{\Sigma}(P_m \times C_n)=2$。

证明 以下分4种情形进行讨论。

情形1. $m \equiv 0(\bmod 2), n \equiv 1(\bmod 2)$。

此时令 $f(v_{i,j})=2(i \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 0(\bmod 2))$,其余点和边均染1。

则各点的权重为:$\phi(v_{i,j})=7(i \equiv 1(\bmod 2), j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=8(i \equiv 0(\bmod 2), j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=9(i \equiv 1(\bmod 2), j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=10(i \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 0(\bmod 2))$;

$\phi(v_{i,j})=11(i \equiv 1(\bmod 2), j \equiv 0(\bmod 2); i \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1, n)$。

情形2. $m \equiv 1(\bmod 2), n \equiv 1(\bmod 2)$。

由于 $m-3 \equiv 0(\bmod 2)$,所以可令 $f(v_{i,j})=2(i \equiv 1(\bmod 2), i>3, j \equiv 0(\bmod 2))$,

$f(e_0)=f(v_0)=1(e_0 \in E(G_1), v_0 \in V(G_1) \backslash \{v_{i,j}\})$,其中$(G_1=P_k \times P_n, k \in[4, m])$;

$f(v_{1,j} v_{m,j})=1$。$f(v_{1,j} v_{1,j+1})=2(j \neq n)$;$f(v_{1,j} v_{2,j})=2$;$f(v_{3,j})=2(j \equiv 0(\bmod 2))$;

$f(v_{2,j} v_{3,j})=f(v_{3,j} v_{4,j})=2(j \equiv 0(\bmod 2))$;$f(v_{3,j} v_{3,j+1})=2(j \equiv 0(\bmod 2), j \neq 2)$;

$f(v_{3,1} v_{3,2})=2$;$f(e_1)=f(v_1)=1(e_1 \in E(G) \backslash E_0, v_1 \in V(G) \backslash V_0)$($E_0$ 表示上述已染色的边集,V_0 表示上述已染色的点集)。

此时,各点的权重为:$\phi(u)(u \in V(G_1) \backslash \{v_{4,j}\})$同情形1,其余点的权重如下:

$\phi(v_{4,1})=\phi(v_{4,n})=7$;$\phi(v_{2,1})=\phi(v_{2,n})=8$;$\phi(v_{i,j})=9(i=1,3, j=1, n)$;

$\phi(v_{4,j})=9(j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1, n)$;$\phi(v_{2,j})=10(j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1, n)$;

$\phi(v_{2,3})=11$;$\phi(v_{i,j})=13(i=1,3, j \equiv 0(\bmod 2))$;

$\phi(v_{i,j})=12(i=1, j \equiv 1(\bmod 1), j \neq 1, n; i=2,4, j \equiv 0(\bmod 2); i=3, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1,3, n)$

情形3. $m \equiv 0(\bmod 2), n \equiv 0(\bmod 2)$。

$f(v_{i,j})=2(i \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 0(\bmod 2), j \neq n)$;$f(v_{i,n-1} v_{i,n})=2(i \equiv 0(\bmod 2))$;

$f(e_2)=f(v_2)=1(e_2 \in E(G) \backslash E_1, v_2 \in V(G) \backslash V_1)$($E_1$ 表示上述已染色的边集,V_1 表示上述已染色的点集)。此时各点的权重如下:

$\phi(v_{i,j})=7(i \equiv 1(\bmod 2), j=1, n)$;$\phi(v_{i,j})=8(i \equiv 0(\bmod 2), j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=9(i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1)$;

$\phi(v_{i,j})=10(i \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 0(\bmod 2), j \neq n)$;

$\phi(v_{i,j})=11(i \equiv 1(\bmod 2), j \equiv 0(\bmod 2), j \neq n; i \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 1(\bmod 2), j \neq 1)$。

情形4. $m \equiv 1(\bmod 2), n \equiv 0(\bmod 2)$。

$f(v_{i,j})=2(i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1, j \equiv 0(\bmod 2), j \neq n)$;$f(v_{i,n-1} v_{i,n})=2(i \equiv 1(\bmod 2), i \neq 1)$;

$f(v_{1,1})=f(v_{1,n})=f(v_{1,j} v_{1,j+1})=2(j \neq n)$;$f(v_{1,j} v_{2,j})=2$。其余点和边均染色1。

则各点的权重为:$\phi(v_{i,j})=7(i \equiv 0(\bmod 2), i \neq 2, j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=8(i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq1, m, j=1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=9(i=2, m-1, j=1, n; i\equiv0(\mathrm{mod}2), i\neq2, j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1)$;

$\phi(v_{i,j})=10(i=1, j=1, n; i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq1, j\equiv0(\mathrm{mod}2), j\neq n; i=2, j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1)$;

$\phi(v_{i,j})=11(i\equiv0(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2), j\neq n; i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq1, j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1)$;

$\phi(v_{i,j})=12(i=1, j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1, n-1)$;

$\phi(v_{i,j})=13(i=1, j\equiv0(\mathrm{mod}2), j\neq2, n)$;

$\phi(v_{i,j})=14(i=1, j=2, n-1)$。

由上述4种情形可得任意相邻两点的权重各不相等,即$fgndi_{\Sigma}(P_m\times C_n)\leqslant2$,

又$fgndi_{\Sigma}(P_m\times C_n)\leqslant2$,因此,$fgndi_{\Sigma}(P_m\times C_n)=2$。

定理3　$fgndi_{\Sigma}(C_m\times C_n)=2(m,n>6)$。

证明　由于$C_m\times C_n$在m、n分别为奇数和偶数的结构与m、n分别为偶数和奇数时相同,故以下考虑3种情况即可。

情形1. $m\equiv0(\mathrm{mod}2), n\equiv0(\mathrm{mod}2)$。

令$f(v_{i,j})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2))$,其余点和边均染1。

则各点的权重为:$\phi(v_{i,j})=9(i\equiv0(\mathrm{mod}2), j\equiv1(\mathrm{mod}2))$;

$\phi(v_{i,j})=10(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2))$;

$\phi(v_{i,j})=11(i\equiv1(\mathrm{mod}1), j\equiv1(\mathrm{mod}2); i\equiv0(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2))$。

情形2. $m\equiv0(\mathrm{mod}2), n\equiv1(\mathrm{mod}2)$。

令$f(v_{i,j})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j\equiv1(\mathrm{mod}2))$; $f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2))$;

$f(v_{i,1}v_{i,2})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2))$; $f(v_{i,1}v_{i+1,1})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2))$;其它均为1。

则各点的权重为:$\phi(v_{i,j})=9(i\equiv0(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2))$;

$\phi(v_{i,j})=10(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1, n)$;

$\phi(v_{i,j})=11(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2), j\neq2; i\equiv0(\mathrm{mod}2), j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1)$;

$\phi(v_{i,j})=12(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j=2, n; i\equiv0(\mathrm{mod}2), j=1)$;

$\phi(v_{i,j})=14(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j=1)$。

情形3. $m\equiv1(\mathrm{mod}2), n\equiv1(\mathrm{mod}2)(m>6, n>6)$。

令$f(v_{i,j})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2), j\equiv1(\mathrm{mod}2), (i\neq m, j\neq1))$;

$f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq m)$; $f(v_{i,1}v_{i,2})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2))$;

$f(v_{i,1}v_{i+1,1})=2(i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq m)$; $f(v_{m,j}v_{1,j})=2(j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq n)$;

$f(v_{m-1,j}v_{m,j})=2(j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq n)$;

$f(v_{m,j}v_{m,j+1})=2(j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq n; j=4, m-1)$; $f(v_{1,3}v_{1,4})=2$;

$f(v_{1,5}v_{2,5})=2$;其余点和边均为1。

则各点的权重为:$\phi(v_{i,j})=9(i\equiv0(\mathrm{mod}2), j\equiv0(\mathrm{mod}2))$;

$\phi(v_{i,j})=10(i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq1, m, j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1, n)$;

$$\phi(v_{i,j})=11\begin{cases}i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq1, j\equiv0(\mathrm{mod}2),\\ \quad j\neq2; i=m, j=2\\ i=1, j\equiv0(\mathrm{mod}2), j\geqslant6; i=2,\\ \quad j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1,5\\ i\equiv0(\mathrm{mod}2), i\neq2, m-1,\\ \quad j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq1\end{cases};$$

$$\phi(v_{i,j})=12\begin{cases}i\equiv0(\mathrm{mod}2), j=1; i\equiv1(\mathrm{mod}2),\\ \quad i\neq m, j=2)\\ i=m, j\equiv0(\mathrm{mod}2), 6\leqslant j\leqslant n-2;\\ \quad i=m, j=n-1\end{cases};$$

$\phi(v_{i,j})=13(i=1, j=3,5,n; i=m, j=4, n-2)$;

$\phi(v_{i,j})=14(i=m, j\equiv1(\mathrm{mod}2), j\neq n, i\equiv1(\mathrm{mod}2), i\neq1, j=1)$; $\phi(v_{1,1})=15$。

因此,$fgndi_{\Sigma}(C_m\times C_n)\leqslant2$又$fgndi_{\Sigma}(C_m\times C_n)\geqslant2$,即证$fgndi_{\Sigma}(C_m\times C_n)=2$。

2　路、圈分别与完全图的笛卡尔乘积图

定理4　$fgndi_{\Sigma}(K_m)=3$。

证明　由完全图K_m的定义知,K_m的一个邻点全和可区别全染色实则为一个邻和可区别边染色。若K_m只用2种颜色处理,不妨将点都染1,一个点对剩下$(m-1)$个点有$(m-1)$条连边,则每个点的关联边染2的个数范围只可能为$[0, m-1]$,

若存在$(m-1)$条关联边都染2的点u,一定存在$(m-1)$条关联边全染1的点v,由于u,v相邻,故不存在上述情形,即K_m无法用2种颜色来区分。$\phi(K_m)$表示完全图K_m中各点权重的集合。若K_m只用2种颜色染色,同时达到权重相同的点只有2个,染色情况如下:

情形1. $m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$。

令$f(v_a v_i)=2(a\in[1,\frac{m}{2}-1],i\in[a+1,m-a])$,其它所有点和边均染1。

此时$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}-1,m-2]$。

情形2. $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$。

$f(v_a v_i)=2(a\in[1,\frac{m-1}{2}],i\in[a+1,m-a])$,其它所有点和边均染1。

此时$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m-1}{2},m-2]$。

若用3种颜色,则对于上述2种情形做出如下调整:

情形2.1. $m\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$。

令$f(v_i v_{i+1})=3(i\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),i\leqslant\frac{m}{2})$,其它染色为上述情形1。

此时$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,m-1]$。

情形2.2. $m\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$。

令$f(v_i v_{i+1})=3(i\in[1,\frac{m}{2}-1]),f(v_1 v_{\frac{m}{2}})=3$,其它染色为上述情形1。

此时$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+1,m]$。

情形2.3. $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$。

令$f(v_i v_{i+1})=3(i\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),i<\frac{m-1}{2})$,其它染色为上述情形2。

此时$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,m-1]$。

情形2.4. $m\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$。

令$f(v_i v_{i+1})=3(i\in[1,\frac{m-1}{2}-1])$,$f(v_1 v_{\frac{(m-1)}{2}-1})=3$,其它染色为上述情形2。

此时$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+1}{2}+1,m]$。

由上述情形可知:$fgndi_\Sigma(K_m)\leqslant 3$,又$fgndi_\Sigma(K_m)\geqslant 3$,即证$fgndi_\Sigma(K_m)=3$。

定理5 $fgndi_\Sigma(P_n\times K_m)=2(m>5,n\geqslant 2)$。

证明 由定理4证明可知,用2种颜色来染色K_m,每个点的染色此时均为1,当$m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$时,$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}-1,m-2]$,当$m\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$时,$\phi(K_m)-(2m-1)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m-1}{2},m-2]$。由于$P_n\times K_m$每列均为完全图$K_m$,此时$K_m$均为上述染色,并且每一列染色均相同,不改变每一列中的边染色,此时更改部分染色有以下4种情况:

情形1. $m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$。

令$f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),j\neq n)$,$f(v_{i,n-1}v_{i,n})=2(i\in[1,\frac{m}{2}])$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,n-1}v_{i,n})=2(i\in[1,\frac{m}{2}])$,其它剩余的边均染1。由于只改变部分点和增加边的染色,此时,每列中点的权重依次增加,故在每列中点的权重与m和n无关,且每一列单独观察都为完全图K_m,即为方便书写每一列权重的集合记为$\phi(K_m)$。此时,第$j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)(j\neq n)$列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m}{2}+3)\in[0,m-1]$;第$j\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)(j\neq 1)$列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+2,m+1]$;对于第$j=1,n$列中,$\phi(K_m)-(2m+1)\in[0,m-1]$;第$n$列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m}{2}+1)\in[0,m-1]$。

情形2. $m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$。

令$f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$,其它剩余的边染色均为1。第$j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$列中,$\phi$

$(K_m)-(2m+\frac{m}{2}+3)\in[0,m-1]$;第 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)(j\neq1,n)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+2,m+1]$;第 n 列中,$\phi(K_m)-(2m+1)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup([\frac{m}{2}+1,m]$;第 1 列中,$\phi(K_m)-(2m+1)\in[0,m-1]$。

情形 3. $m\equiv1(\mathrm{mod}\,2),n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$。

令 $f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2),j\neq n)$,$f(v_{i,n-1}v_{i,n})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}])$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,其它边和点染色均为 1。第 $j\equiv0(\mathrm{mod}\,2)(j\neq n)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m+5}{2})\in[0,m-1]$;第 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)(j\neq1)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+5}{2},m+1]$;对于第 $j=1,n$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+1)\in[0,m-1]$。

情形 4. $m\equiv1(\mathrm{mod}\,2),n\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$。

令 $f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,其它边和点染色均为 1。此时,第 $j\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m+5}{2})\in[0,m-1]$;第 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)(j\neq1,n)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+5}{2},m+1]$;第 n 列中,$\phi(K_m)-(2m+1)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup([\frac{m+3}{2},m]$;第 1 列中,$\phi(K_m)-(2m+1)\in[0,m-1]$。

由上述情况可得 $fgndi_\Sigma(P_n\times K_m)\leqslant2(m>5,n\geqslant3)$,又 $fgndi_\Sigma(P_n\times K_m)\geqslant2$。即证 $fgndi_\Sigma(P_n\times K_m)=2(m>5,n\geqslant3)$。

定理 6　$fgndi_\Sigma(C_n\times K_m)=2(m>5,n\geqslant3)$。

证明　分析同定理 5。下面分 3 种情况进行讨论。

情形 1. $n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$。

对于 $m\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$,令 $f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\in[1,\frac{m}{2}])$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2),j\neq n)$,其它剩余的边和点染色均为 1。此时,第 $j\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m}{2}+3)\in[0,m-1]$;第 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+2,m+1]$。对于 $m\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$,令 $f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}])$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2),j\neq n)$,其它剩余的边和点染色均为 1。第 $j\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m+5}{2})\in[0,m-1]$;第 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+5}{2},m+1]$。

情形 2. $n\equiv1(\mathrm{mod}\,2),m\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$。

令 $f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,$f(v_{i,n})=2(i\in[2])$,$f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\in[1,\frac{m}{2}])$,其它剩余的边和点染色均为 1。第 $j\equiv0(\mathrm{mod}\,2)(j\neq n-1)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m}{2}+3)\in[0,m-1]$;第 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)(j\neq1,n)$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+2,m+1]$;第 1 列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+1,m-2]\cup[m,m+1]$;第 n 列中,$\phi(K_m)-(2m+5)\in[0,\frac{m}{2}-1]\cup[\frac{m}{2}+2,m+1]$;第 $n-1$ 列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m}{2}+3)\in[0,m-3]\cup[m-1,m]$,其中 $m\neq6$。当 $m=6$ 时,此时,改变 $f(v_{i,n})=2(i\in[3])$ 即可区分。

情形 3. $n\equiv1(\mathrm{mod}\,2),m\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$。

令 $f(v_{i,j})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv0(\mathrm{mod}\,2))$,

$f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}])$,$f(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}],j\equiv 0(\bmod 2))$,$f(v_{i,n}v_{i,1})=2(i\in[1,\frac{m-1}{2}])$,$f(v_{i,n})=2(i\in[2])$,其它剩余的边和点染色均为1。第$j\equiv 1(\bmod 2)(j\neq 1,n)$列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+5}{2},m+1]$;第$j\equiv 0(\bmod 2)(j\neq n-1)$列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m+5}{2})\in[0,m-1]$;第$n$列中,$\phi(K_m)-(2m+5)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+5}{2},m+1]$;第1列中,$\phi(K_m)-(2m+3)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+3}{2},m-2]\cup[m,m+1]$;第$n-1$列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m+5}{2})\in[0,m-3]\cup[m-1,m]$,其中,$m\neq 7$。若$m=7$,此时改变$f(v_{i,n})=2(i\in[3])$,此时,第$n$列中,$\phi(K_m)-(2m+6)\in[0,\frac{m-1}{2}]\cup[\frac{m+5}{2},m+1]$;第$n-1$列中,$\phi(K_m)-(2m+\frac{m+5}{2})\in[0,m-4]\cup[m-2,m]$。

由上述3种情况可得,$fgndi_{\Sigma}(C_n\times K_m)\leqslant 2(m>5,n\geqslant 3)$。又$fgndi_{\Sigma}(C_n\times K_m)\geqslant 2$,即证$fgndi_{\Sigma}(C_n\times K_m)=2(m>5,n\geqslant 3)$。

参考文献:

[1] 王晔. 1-平面图正常点染色问题的研究[D]. 济南:山东师范大学, 2017.

[2] 张欣, 刘桂真, 吴建良. 不含3-圈的1-平面图的边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2010, 45(6):15-17.

[3] 王兵. 平面图的全染色、列表染色和无圈全染色[D]. 济南:山东大学, 2014.

[4] 吴建良,杨东雷,杨帆. 平面图的各种染色综述[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2019, 18(5): 7-20.

[5] 朱恩强. 图的全着色研究综述[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2019, 18(4): 9-27.

[6] 王维凡, 王琰雯, 黄丹君. 外平面图的距离2-点可区别边色数[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(1):1-5.

[7] 林育青. 一类图的邻点可区别全染色[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(20): 263-271.

[8] 夏文静. 图的邻点可区别边色数和全色数[D]. 杭州:浙江师范大学, 2020.

[9] 田双亮, 杨环, 索郎王青, 等. 路的字典积的邻和可区别边染色[J]. 运筹学学报, 2020, 24(1): 140-146.

[10] Yu X W, Wang G H, Wu J L, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of subcubic graphs[J]. Acta Mathematica Sinica, 2017, 33(2): 252-262.

[11] Song W S, Duan Y Y, Miao L Y. Neighbor sum distinguishing total coloring of IC-planar graphs[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(8): 1-9.

[12] Yu X W, Gao Y P, Ding L H. Neighbor sum distinguishing chromatic index of sparse graphs via the combinatorial nullstellensatz[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2018, 34(1): 135-144.

[13] 姚丽, 强会英, 杨笑蕊. 两类笛卡尔积图的邻和可区别全染色[J]. 兰州交通大学学报, 2020, 39(3):125-129.

[14] Flandrin E, Li H, Marczyk A, et al. A note on neighbor expanded sum distinguishing index[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37(1): 29-37.

【责任编辑: 周 全】