第 20 卷　第 1 期　　广州大学学报(自然科学版)　　Vol. 20　No. 1
2021 年　3 月　　Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)　　Mar.　2021

文章编号:1671-4229(2021)01-0069-04

q 分量三阶混料中心多项式模型 R - 最优设计

郑　婷

(兰州财经大学 统计学院, 甘肃 兰州　730030)

摘　要: 在混料试验设计中,对 $q-1$ 维正规单纯形 S_{q-1} 上的三阶中心多项式混料模型,利用 R - 最优设计准则,讨论了 q 分量三阶中心多项式混料模型参数估计的 R - 最优设计,并结合软件 mathematica 给出了 $q=3$ 时该中心多项式混料模型具体的 R 最优配置.

关键词: R - 最优设计; 中心多项式模型; mathematica

中图分类号: O 212.6　　　**文献标志码**: A

R-optimal design for a mixture central polynomial model of q-component third-degree

ZHENG Ting

(School of Statistics, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou 730030, China)

Abstract: In the mixture experiment design, for the third-degree central polynomial mixture model on a q-1 dimension normal simplex, the R-optimal design for parameter estimation of a q-component third-degree central polynomial mixture model is mainly discussed by using R-optimal design criterion, and the specific R-optimal configuration of the central polynomial mixture model is given when $q=3$ with mathematica.

Key words: R-optimal design; central polynomial model; mathematica

0　引　言

混料试验设计与工农业生产及科学实验密切相关,发展十分迅速[1]. 在 q 分量混料系统中,所度量的响应只是出现在混料中各种成份比例 $x_1, x_2, \cdots x_q$ 的函数,而与混料的总量无关,混料问题中的各成份比例,即每种成份在混料总量中所占的百分比是不能任意变化的,要受到约束条件

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,q \\ \sum_{i=1}^{q} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_q = 1 \end{cases}$$

的限制,从而构成了混料系统中的 $q-1$ 维正规单纯形

$$S_{q-1} = \{x:(x_1,x_2,\cdots,x_q) \mid \sum_{i=1}^{q} x_i = 1, x_i \geqslant 0, i = 1, 2,\cdots,q\} \tag{1}$$

在混料试验设计中,关于 D - 最优设计的研究已趋于完备. D - 最优准则的几何意义是最小化模型参数向量的置信椭球体的体积,但当模型参数的维数较大时,该置信椭球体的体积不易计算且解释也不够简洁明了,对此,Holger[2] 基于 Bonferroni-t 区间法

$$\Re = \{\theta \in R^k \parallel \vartheta_i - \hat{\vartheta}_i^{(n)} | \leqslant \hat{s}_n t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2k}} \sqrt{((\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1})_{ii}}, i=1,\cdots,k\} \tag{2}$$

其中,$\hat{s}_n^2$ 和 $\hat{\vartheta}_i^{(n)}$,$i=1,\cdots,k$ 表示 σ^2 和 ϑ_i 的最大似然估计,构造了参数联合估计的 k 维矩形置信区域. 该矩形置信区域的体积与乘积 $\{\prod_{j=1}^{k}((\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1})_{jj}\}^{1/2}$ 成比例,想要使 $\Re$ 的体积达到最小,另一类最优准则即 R - 最优准则由此产生. 称一个设计 ξ 为 R - 最优设计当且仅当使下式在设计空间中达到最小

$$\phi_R(\xi) = \prod_{i=1}^{k}(M^{-1}(\xi))_{ii} \tag{3}$$

其中,$(M^{-1}(\xi))_{ii}$ 表示信息矩阵的逆矩阵的主对角线元

作者简介: 郑婷(1996—),女,硕士研究生. E-mail:1668942387@qq.com

引文格式: 郑婷. q 分量三阶混料中心多项式模型 R - 最优设计[J]. 广州大学学报(自然科学版),2021,20(1):69-72

素,R - 最优设计的统计意义是将信息矩阵的逆矩阵的主对角线元素的乘积最小化,从而使得其矩形置信区域的体积最小.

Holger 根据线性回归模型参数联合估计的 Bonferroni-t 区间法,构造了矩形置信区域,于 1997 年提出了一类基于该置信区域的新型最优准则——R - 最优准则. 关于 R - 最优准则的研究相对于其它最优准则,如 A - 最优准则、D - 最优准则、E - 最优准则和 I - 最优准则来说相对较少,仅赵洪雅等[3-4]介绍了二阶 Scheffé 正则多项式模型参数估计的 R - 最优,二阶可加混料模型参数估计的 R - 最优设计问题. 李俊鹏等[5]讨论了 q 分量二阶混料 K 模型的 R - 最优设计. 胡小玲[6]研究了二阶塌落模型的 R - 最优. 而关于单纯形 - 中心多项式的研究,关颖男等[7]讨论了 $q-1$ 阶多重线性多项式模型参数估计的 A - 最优设计,给出了一种 A 最优设计的算法,佟毅等[8]讨论了最优的单纯形 - 中心设计. 基于此,本文将 R - 最优准则与单纯形 - 中心多项式结合起来,主要介绍 q 分量三阶中心多项式混料模型的 R - 最优设计,并给出设计柱点以及相应的测度.

1 q 分量三阶中心多项式模型

对于 q 分量混料系统来说,$q-1$ 维正规单纯形 S_{q-1} 上的 q 阶单纯形中心多项式模型为

$$\eta = \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i + \sum_{i<j}\beta_{ij}x_ix_j + \sum_{i<j<k}\beta_{ijk}x_ix_jx_k + \cdots + \beta_{1,2\cdots q}x_1x_2\cdots x_q \tag{4}$$

对于模型(4),试验点安排在单纯形 S_{q-1} 上所有各类中心上的设计就是单纯形 - 中心设计,单纯形 - 中心设计是 Scheffé 在 1963 年提出的,在 q 分量单纯形 - 中心设计中,共有 2^q-1 个不同的试验点,分别为 q 个纯混料、${C_q}^2$ 个二分量等比例混料和 ${C_q}^3$ 个三分量等比例混料,…,全部分量的等比例混料.

特别地,当 $m=3$ 时,正规单纯形 S_{q-1} 上的 q 分量三阶中心多项式模型为

$$\eta = \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q}\beta_{ij}x_ix_j + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant q}\beta_{ijk}x_ix_jx_k \tag{5}$$

其中,$\beta_i,\beta_{ij},\beta_{ijk}$ 是未知的待估参数,共有 $C_q^1+C_q^2+C_q^3=\dfrac{q^3+5q}{6}$ 个. 模型(5)中的参数 β_i 可表示成纯分量 i 混料的期望响应值,且称为分量 i 的线性混料值,参数 β_{ij} 是分量 i 与 j 的非可加性混料系数,它可以表示为纯分量 i 混料的期望响应、纯分量 j 混料的期望响应及分量 i 与 j 等比例混料的期望响应之线性组合,参数 β_{ijk} 也可类似的确定.

2 q 分量三阶中心多项式模型 R - 最优设计

本文考察的是在混料系统正规单纯形 S_{q-1} 上模型(5)的 R - 最优设计,通过计算给出了该模型在 S_{q-1} 内的 R - 最优设计柱点及其测度.

引理 1[9] 对于混料区域 S_{q-1} 上的三阶中心多项式模型(5),参数估计的最优设计柱点只能是 S_{q-1} 上的各类中心点.

设 r_1,r_2,r_3 分别表示 S_{q-1} 上的每个顶点、两顶点中心及三顶点中心的测度,满足

$$C_q^1r_1+C_q^2r_2+C_q^3r_3=1,$$

则模型(5)所对应的设计矩阵 $\boldsymbol{X}$ 为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{0}_{\alpha_{12}} & \boldsymbol{0}_{\alpha_{13}}\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{M}_2 & \frac{1}{4}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}_{\alpha_{23}}\\ \frac{1}{3}\boldsymbol{M}_3 & \frac{1}{9}\boldsymbol{C}_{32} & \frac{1}{27}\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}.$$

其中,$\boldsymbol{0}_{\alpha_{ij}}$ 为 $C_q^i\times C_q^j$ 阶零矩阵,$\boldsymbol{M}_i$ 为 $C_q^i\times q$ 阶的0-1矩阵,其第一行的前 i 个元素是 1,其余行是第一行按字典顺序做出的全排列. $\boldsymbol{I}_m$ 是 C_q^2 阶单位阵,$\boldsymbol{I}_n$ 是 C_q^3 阶单位阵. $\boldsymbol{C}_{32}$ 是 $C_q^3\times C_q^2$ 阶矩阵,其具体形式为

$$\boldsymbol{C}_{32}=\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0&1&\cdots&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix}.$$

记测度矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}r_1\boldsymbol{I}_q&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&r_2\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&r_3\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix},$$

则该模型所对应的信息矩阵 $\boldsymbol{M}(\xi)$ 为

$$\boldsymbol{M}(\xi)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}=$$

$$\begin{bmatrix}r_1\boldsymbol{I}_q+\frac{r_2}{2^2}\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2+\frac{r_3}{3^2}\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3 & \frac{r_2}{2^3}\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}+\frac{r_3}{3^3}\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{32} & \frac{r_3}{3^4}\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}\\ \frac{r_2}{2^3}\boldsymbol{M}_2+\frac{r_3}{3^3}\boldsymbol{C}_{32}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3 & \frac{r_2}{2^4}\boldsymbol{I}_m+\frac{r_3}{3^4}\boldsymbol{C}_{32}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{32} & \frac{r_3}{3^5}\boldsymbol{C}_{32}^{\mathrm{T}}\\ \frac{r_3}{3^4}\boldsymbol{M}_3 & \frac{r_3}{3^5}\boldsymbol{C}_{32} & \frac{r_3}{3^6}\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}.$$

利用文献[10]求 3×3 分块矩阵的逆矩阵的方法,求得信息矩阵 $\boldsymbol{M}(\xi)$ 的逆为

$$\boldsymbol{M}^{-1}(\xi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}&\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^{-1}&\boldsymbol{K}^{-1}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}\end{bmatrix},$$

其中

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{r_1}I_q & -\frac{2}{r_1}M_2^{\mathrm{T}}\\ -\frac{2}{r_1}M_2 & \frac{16}{r_2}I_m+\frac{4}{r_1}M_2M_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$T^{-1}Q=\begin{bmatrix}-\frac{9}{r_1}M_3^{\mathrm{T}}+\frac{6}{r_1}M_2^{\mathrm{T}}C_{32}^{\mathrm{T}}\\ \frac{18}{r_1}M_2M_3^{\mathrm{T}}-\frac{48}{r_2}C_{32}^{\mathrm{T}}-\frac{12}{r_1}M_2M_2^{\mathrm{T}}C_{32}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$PT^{-1}=\Big[-\frac{9}{r_1}M_3+\frac{6}{r_1}C_{32}M_2\ \ \frac{18}{r_1}M_3M_2^{\mathrm{T}}-\frac{48}{r_2}C_{32}-\frac{12}{r_1}C_{32}M_2M_2^{\mathrm{T}}\Big],$$

$$K^{-1}+PT^{-1}Q=\Big[\frac{3^6}{r_3}I_n+\frac{81}{r_1}M_3M_3^{\mathrm{T}}-\frac{54}{r_1}C_{32}M_2M_3^{\mathrm{T}}-\frac{54}{r_1}M_3M_2^{\mathrm{T}}C_{32}^{\mathrm{T}}+\frac{144}{r_2}C_{32}C_{32}^{\mathrm{T}}+\frac{36}{r_1}C_{32}M_2M_2^{\mathrm{T}}C_{32}^{\mathrm{T}}\Big].$$

由 R - 最优准则(3)可得如下约束极小值问题

$$\begin{cases}\min\prod_{i=1}^{\frac{q^3+5q}{6}}(M^{-1}(\xi))_{ii}=\\ \min\left(\frac{1}{r_1}\right)^q\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3}\\ qr_1+C_q^2r_2+C_q^3r_3=1.\end{cases}$$

利用拉格朗日乘子法,令

$$H(r_1,r_2,r_3,\lambda)=\left(\frac{1}{r_1}\right)^q\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3}+\lambda(qr_1+C_q^2r_2+C_q^3r_3-1).$$

对 r_1,r_2,r_3,λ 求偏导,得

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial r_1}=-\frac{q}{r_1^{q+1}}\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3}-\frac{8C_q^2}{r_1^{q+2}}\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2-1}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3}-\\ \quad\frac{27C_q^3}{r_1^{q+2}}\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3-1}+\lambda q\\ \frac{\partial H}{\partial r_2}=-\frac{16C_q^2}{r_1^qr_2^2}\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2-1}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3}-\frac{432C_q^3}{r_1^qr_2^2}\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3-1}+\lambda C_q^2\\ \frac{\partial H}{\partial r_3}=-\frac{729C_q^3}{r_1^qr_3^2}\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^{C_q^2}\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right)^{C_q^3-1}+\lambda C_q^3\\ \frac{\partial H}{\partial\lambda}=qr_1+C_q^2r_2+C_q^3r_3-1.\end{cases}$$

由 $\frac{\partial H}{\partial r_1}=0,\frac{\partial H}{\partial r_2}=0,\frac{\partial H}{\partial r_3}=0,\frac{\partial H}{\partial\lambda}=0$,化简得到式(6).

$$\begin{cases}(32q+32)r_1r_3^2+(16q-26)r_2r_3^2+162r_1r_2r_3-162r_1r_2^2-81r_2^3=0\\ 2(q^2+21q+32)r_1r_2r_3^2+192r_1^2r_3^2+324r_1^2r_2r_3+(q^2+5)r_2^2r_3^2+(81q+81)r_1r_2^2r_3-162r_1^2r_2^2-324r_1^3r_2=0\\ 6qr_1+3q(q-1)r_2+q(q-1)(q-2)r_3=6\end{cases}\tag{6}$$

由于式(6)较复杂,不易求出 r_1、r_2、r_3 的表达式,但当 q 为具体数值时,通过将 q 的值带入式(6)并结合软件 mathematica 可得到具体分量的三阶中心多项式模型的 R - 最优配置的数值解.

3　实　　例

下面考察当 $q=3$ 时模型(5)的 R - 最优设计. 可直接将 $q=3$ 带入式(6),通过软件 mathematica 计算得到三分量三阶中心多项式模型的 R - 最优配置. 也可通过该模型的信息矩阵,利用拉格朗日乘子法得到其 R - 最优配置.

设 r_1,r_2,r_3 分别表示混料系统正规单纯形 S_{3-1} 上的每个顶点、两顶点中心及三顶点中心的测度,满足

$$C_3^1r_1+C_3^2r_2+C_3^3r_3=1,$$

则该模型所对应的设计矩阵 X 为

$$X=\begin{bmatrix}I_3 & 0_{\alpha_1} & 0_{\alpha_3}\\ \frac{1}{2}M_2 & \frac{1}{4}I_3 & 0_{\alpha_3}\\ \frac{1}{3}J_{\alpha_1} & \frac{1}{9}J_{\alpha_1} & \frac{1}{27}J_{\alpha_3}\end{bmatrix}.$$

其中,0_{α_i} 为 $3\times C_3^i$ 阶零矩阵,J_{α_i} 为 $1\times C_3^i$ 阶元素全为 1 的矩阵,M_2 为 $C_3^2\times3$ 阶的 0 - 1 矩阵,其第一行的前两个元素是 1,其余行是第一行按字典顺序做出的全排列. I_3 是三阶单位阵.

记测度矩阵为

$$\Lambda=\begin{bmatrix}r_1I_3 & 0 & 0\\ 0 & r_2I_3 & 0\\ 0 & 0 & r_3I_1\end{bmatrix},$$

则该模型所对应的信息矩阵 $M(\xi)$ 为

$$M(\xi)=\begin{bmatrix}r_1I_3+\frac{r_2}{2^2}M_2^{\mathrm{T}}M_2+\frac{r_3}{3^2}J_3 & \frac{r_2}{2^3}M_2^{\mathrm{T}}+\frac{r_3}{3^3}J_3 & \frac{r_3}{3^4}J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}}\\ \frac{r_2}{2^3}M_2+\frac{r_3}{3^3}J_3 & \frac{r_2}{2^4}I_3+\frac{r_3}{3^4}J_3 & \frac{r_3}{3^5}J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}}\\ \frac{r_3}{3^4}J_{\alpha_1} & \frac{r_3}{3^5}J_{\alpha_1} & \frac{r_3}{3^6}J_{\alpha_3}\end{bmatrix},$$

其中,J_3 为元素均为 1 的三阶方阵.

易求得信息矩阵 $M(\xi)$ 的逆为

$$M^{-1}(\xi)=\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-1}Q \\ PT^{-1} & K^{-1}+PT^{-1}Q \end{bmatrix},$$

其中

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{r_1}I_3 & -\frac{2}{r_1}M_2^{\mathrm{T}} \\ -\frac{2}{r_1}M_2 & \frac{16}{r_2}I_3+\frac{4}{r_1}M_2M_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$T^{-1}Q=\begin{bmatrix} -\frac{9}{r_1}J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}}+\frac{6}{r_1}M_2^{\mathrm{T}}J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}} \\ \frac{18}{r_1}M_2J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}}-\frac{48}{r_2}J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}}-\frac{12}{r_1}M_2M_2^{\mathrm{T}}J_{\alpha_1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$PT^{-1}=\Big[-\frac{9}{r_1}J_{\alpha_1}+\frac{6}{r_1}J_{\alpha_1}M_2\ \ \frac{18}{r_1}J_{\alpha_1}M_2^{\mathrm{T}}-\frac{48}{r_2}J_{\alpha_1}-\frac{12}{r_1}M_2M_2^{\mathrm{T}}\Big],$$

$$K^{-1}+PT^{-1}Q=\Big[\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\Big].$$

由 R – 最优准则(3) 可得如下约束极小值问题

$$\begin{cases} \min\prod_{i=1}^{7}(M^{-1}(\xi))_{ii}= \\ \min\left(\frac{1}{r_1}\right)^3\left(\frac{16}{r_2}+\frac{8}{r_1}\right)^3\left(\frac{27}{r_1}+\frac{432}{r_2}+\frac{729}{r_3}\right) \\ 3r_1+3r_2+r_3=1. \end{cases}$$

利用拉格朗日乘子法解该条件极小值问题,结合软件 mathematica 可得到如下结果:

$r_1\to 0.179\,635\,000\,502\,688\,07$,

$r_2\to 0.121\,685\,461\,418\,078\,89$,

$r_3\to 0.096\,038\,614\,237\,699\,16$.

因此,三分量三阶中心多项式模型的 R – 最优配置为

$$\begin{cases} r_1^*=0.179\,635\,000\,502\,688\,07 \\ r_2^*=0.121\,685\,461\,418\,078\,89 \\ r_3^*=0.096\,038\,614\,237\,699\,16 \end{cases}$$

4 结 论

由于实际中需保持预测值的精度,需要适当提高模型的阶数,因此,对三阶中心多项式混料模型及其 R – 最优设计的研究是有必要的. 本文从 R – 最优设计的理论出发,讨论了 q 分量三阶中心多项式模型的 R – 最优设计,并结合软件 mathematica,得到了具体分量的三阶中心多项式模型的 R – 最优配置的数值解. 为了求得模型的 R – 最优设计,需要得到模型的信息矩阵,通过最小化信息矩阵的逆矩阵的主对角线元素的乘积,利用拉格朗日乘子法解条件极小值问题,得到模型的 R – 最优设计. 在这个过程中,由于 R – 最优设计的信息矩阵计算的复杂性,对于 q 分量的该中心多项式模型,不易求得其 R – 最优配置的数值表达式,但当 q 为具体数值时,通过软件 mathematica 较易得到具体分量的三阶中心多项式模型的 R – 最优配置. 因此,随着计算机的不断发展,利用算法及相应的软件,使得对于模型的 R – 最优设计问题变得相对容易,从而可以按照需求解决更为复杂的 R – 最优设计问题.

参考文献:

[1] 关颖男. 混料试验设计[M]. 上海:上海科学技术出版社,1990.

[2] Holger D. Designing experiments with respect to ‘standardized’ optimality criteria[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 1997, 59(1):97-110.

[3] 赵洪雅,关颖男,韩大伟. 混料试验的 R – 最优设计[J]. 东北大学学报(自然科学版),2000,21(6):682-684.

[4] 赵洪雅,关颖男,韩大伟. 二阶可加混料模型的 R – 最优设计[J]. 东北大学学报(自然科学版),2001,22(2):222-225.

[5] 李俊鹏,吴惠彬,胡小玲,等. q 分量二阶混料 K 模型 R – 最优设计[J]. 广州大学学报(自然科学版),2017,16(1):32-35.

[6] 胡小玲. 二阶塌落模型的最优设计及 Cox 均匀设计研究[D]. 广州:广州大学,2018.

[7] 关颖男,刘春雨. $q-1$ 阶多重线性多项式模型的 A – 最优设计[J]. 东北工学院学报(自然科学版),1993,83(2):198-202.

[8] 佟毅,王天辉,关颖男. 最优的单纯形 – 中心设计[J]. 东北大学学报(自然科学版),1999,20(5):559-561.

[9] Corwin L A. Optimal and efficient designs of experiments[J]. The Annals of Mathematical Statistics,1969, 40(5):1570-1602.

[10] 马骏,李萌,靳丹丹,等. 几类 3×3 分块矩阵的逆矩阵的求法[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),2016,42(3):54-58.

【责任编辑:周 全】