文章编号:1671-4229(2022)01-0010-08

完全二部图 $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$)的点可区别 E-全染色

汉大玮，陈祥恩*
(西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州　730070)

摘　要：设图 G 是简单图,如果给图 G 中相邻的 2 个顶点染有不同的颜色,并且让这 2 个顶点的每条关联边和关联边的端点染不相同颜色的一个全染色称为图 G 的一个全染色 f。如果满足条件对 $\forall u,v\in V(G)$,$u\neq v$,存在$C(u)\neq C(v)$,那么 f 叫做图 G 的一个 E-全染色,简称为 VDET 染色。文章利用反证法和分析法,讨论完全二部图 $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$)的点可区别 E-全染色问题,并利用构造染色法,给出完全二部图 $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$)的最优点可区别 E-全染色染色方案。

关键词：E-全染色；VDET 染色；VDET 染色色数；完全二部图
中图分类号：O 157.5　　　**文献标志码**：A

Vertex-distinguishing E-total coloring of a complete bipartite diagram $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$)

HAN Da-wei, *CHEN Xiang-en**
(School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let us say G is a simple graph. The coloring f of diagram G is called an E-total complete coloring if two adjacent top points in graph G are dyed different colors, and dot each associated edge a different color from its end. For an E-complete stain coloring of graph G, if $C(u)\neq C(v)$ for any two different vertices u and v of $V(G)$, we shall abbreviate the "VDET". By using analytical method and proof by contradiction, this paper discusses the vertex-distinguishing E-total (VDET) coloring problem of a complete bipartite graph $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$), and the structure staining method was used to give the best staining scheme of optimal VDET coloring of a complete bipartite graph $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$).

Key words: E-total coloring; vertex-distinguishing E-total coloring; the vertex-distinguishing E-total coloring number; complete bipartite graph

在图论研究中,图的染色问题具有极其重要的研究意义和应用价值,二部图的一系列点可区别是否正常边染色、点染色以及一系列未必正常全染色等好多问题,图论的研究者仍然追求解决这一系列有趣的难题。

设 G 是一个简单图。如果给图 G 的全体顶点以及顶点的边染色,染色规则为对图 G 的任选 2 个相邻的顶点用不同的颜色进行染色,任选 2 个相邻的边用不同的颜色进行染色,边与这条边的关联顶点所染的颜色不一样,这种染色叫做图 G 的一个正常全染色(简称为全染色)。X 表示图 G 的某一个顶点,$C(X)$表示顶点 X 所染颜色及与 X 顶点相关联的边所染颜色构成的一个集合,把 $C(X)$称为顶点 X 的色集合。本文讨论完全二部

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11761064,61163037)
作者简介：汉大玮(1997—),女,硕士研究生. E-mail:handawei2020@163.com
*通信作者. E-mail:chenxe@nwnu.edu.cn
引文格式：汉大玮，陈祥恩. 完全二部图 $K_{11,n}$($11\leqslant n\leqslant 88$)的点可区别 E-全染色[J]. 广州大学学报(自然科学版),2022,21(1):10-17.

图的点可区别的一类未必正常全染色。如果给图 G 的任意相邻顶点着有不同的颜色，且让顶点的每条关联边与关联边的顶点着不相同颜色的一个全染色，叫做图 G 的一个 E-全染色。设 G 的一个 E-全染色 f，如果满足条件对 $\forall u,v\in V(G)$，$u\neq v$，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为图 G 的一个点可区别 E-全染色，简称为 VDET 染色。图 G 的点可区别 E-全色数：$\chi^{e}_{vt}(G)=\min\{k\mid G$ 存在 k-VDET 染色$\}$。

文献[1－2]提出了图的点可区别正常边染色等概念，文献[3－6]陈祥恩团队讨论了完全二部图、轮、星、扇、圈和路的点可区别染色；文献[7－8]研究了完全二部图的点可区别 E-全染色；文献[9－12]中讨论了完全二部图 $K_{2,n}$、$K_{3,n}$、$K_{6,n}$ 和 $K_{7,n}$ 的点可区别 E-全染色；文献[13－14]讨论了完全图和合成图的点可区别正常边染色；文献[15]中得出了 mC_4 的一般点可区别全染色。本文主要利用反证法和分析法研讨 $K_{11,n}$（$11\leqslant n\leqslant 88$）的点可区别 E－全染色，并且利用构造染色法得到 $K_{11,n}$ 的点可区别 E－全染色色数，并得到其最佳染色方案。令 $V(K_{11,n})=X\cup Y$，$E(K_{11},n)=\{u_iv_j:1\leqslant i\leqslant 11,1\leqslant j\leqslant n\}$，其中 $X=\{u_1,u_2,\cdots,u_{11}\}$，$Y=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。

1　主要定理及证明过程

定理 1　当 $11\leqslant n\leqslant 28$ 时，$\chi^{e}_{vt}(K_{11,n})=6$。

证明　用反证法证。先假设完全二部图 $K_{11,n}$ 可以用 5 种颜色点可区别染色，用颜色 1，2，3，4，5 分别染色，下面利用结构分析法，则只可分为以下 4 种情况进行讨论。

情形 1. $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 11 个顶点所染的颜色中互不相同的仅有一种。不妨设 $f(u_i)=1(i=1,2,\cdots,11)$，则每个 $C(v_j)$ 都不能用颜色 1 去染色。因此 $\{1,2,3,4,5\}$ 的子集中可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{5-1}{2}+\binom{5-1}{3}+\binom{5-1}{4}=11$。当 $12\leqslant n\leqslant 28$ 时，Y 中的 n 个顶点不能用 11 个集合染色，矛盾。下面只需考虑 $n=11$ 的情形。令 $A=A_1\cup A_2$，其中：$A_1=\{\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$；$A_2=\{\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{3,4,5\},\{2,4,5\},\{2,3,4,5\}\}$。

当 $n=11$ 时，A_1 中的 2-子集起码有 6 个集合属于 $C(Y)$，因此，在所染 2，3，4，5 的颜色中至少有某 3 种颜色包含在每个 $C(u_i)$ 中，不妨设 $2,3,4\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}\}$，2 个集合不能给 X 中的 11 个顶点染色，矛盾。

情形 2. $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 11 个顶点所染的颜色中互不相同的仅有 2 种。不妨设 $f(u_i)\in\{1,2\}(i=1,2,\cdots,11)$，则不能用颜色 1 或颜色 2 在每个 $C(v_j)$ 是 2-子集时进行染色。因此，$\{1,2,3,4,5\}$ 中的子集可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}-7=19$。当 $20\leqslant n\leqslant 28$ 时，Y 中的 n 个顶点不能用 19 个集合去染色，矛盾。下面只需探讨当 $11\leqslant n\leqslant 19$ 时的情形。令 $B=B_1\cup B_2\cup B_3$，其中，$B_1=\{\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$；$B_2=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\}\}$；$B_3=\{\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$。

下面将情形 2 分以下 2 种情况进行讨论：

情形 2.1. $C(Y)\subseteq B_2$，不妨设为 $\{1,2,3\}$，由 $\{1,2,3\}$ 是 Y 中顶点的色集合，可得 $1,2\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，则 $C(X)\subseteq\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$，8 个集合不能给 X 中的 11 个顶点去染色，矛盾。

情形 2.2. $C(Y)\not\subseteq B_2$，以下仅考虑当 $11\leqslant n\leqslant 16$ 时的情形。这时，在 $B_1\cup B_3$ 中至多有 5 个集合不属于 $C(Y)$，下面分为 2 种情况进行讨论：

情形 2.2.1. $C(Y)\subseteq B_1$，不妨设为 $\{3,4\}$，可得 $3\in C(u_i)$ 或 $4\in C(u_i)$ $(i=1,2,\cdots,11)$。不妨设前者成立，此时在 B_3 中至多有 5 个集合不在 Y 中，设为 $C(Y)\not\subseteq\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$，则 $C(X)\subseteq\{\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$，8 个集合不能给 X 中的 11 个顶点去着色，矛盾。

情形 2.2.2. $C(Y)\not\subseteq B_1$，以下只需讨论 $11\leqslant n\leqslant 13$ 的情形，在 B_3 中最多也就有 2 个集合不属于 $C(Y)$，不妨设为 B_1,B_2，因此，需要包含 1 或 2 的 2-子集至少有 6 个集合属于 $C(X)$，才能够给 X 中的 11 个顶点分别着色。

(1) $\{1,2\}\in C(X)$，设 $C(u_{i0})=\{1,2\}$，可得：$1\in C(u_i)$ 或 $2\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$。不妨设前者成立，从而每个 $C(v_j)$ 只能是以下集合之一：$\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$，7 个集合不能给 Y 中的 n 个顶点染色，矛盾。

(2) $C(X)\not\subseteq\{1,2\}$，则 $C(X)\subseteq\{\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\}$，可得：3,4,5 中的 3 种色全都包含在每个 $C(v_j)$ 中，不妨设 $3,4,5\in C(v_j)(j=1,2,\cdots,n)$。从而 $C(Y)\subseteq\{\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$，3 个集合不能给 Y 中的 n 个顶点分别着色，矛盾。

情形 3. $u_1,u_2,u_3\cdots,u_{11}$ 这 11 个顶点所着颜色中不一样的仅有 3 种。不妨设 $f(u_i)\in\{1,2,3\}(i=1,2,\cdots,11)$，则当 $C(v_j)$ 是2-子集时，不能用颜色 1，2 或颜色 3 进行染色，且不能用 $\{1,2,3\}$ 对每个 $C(v_j)$ 进行着色。因此，$\{1,2,3,4,5\}$ 的子集中可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}-10=16$。当 $17\leqslant n\leqslant 28$ 时，矛盾。下面只需考虑当 $11\leqslant n\leqslant 16$ 时的情形。令 $C=C_1\cup C_2\cup C_3$，其中，$C_1=\{\{4,5\}\}$；$C_2=\{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}\}$；$C_3=\{\{1,4,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$。

以下分 2 种子情形讨论：

情形 3.1. $C(Y)\subseteq\{\{4,5\}\}$，则 $C_2\cup C_3$ 中至多有 5 个集合属于 $C(Y)$，设 $C(Y)\subseteq\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5\}$。由 $\{4,5\}\in C(Y)$，可得 $4\in C(u_i)$ 或 $5\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$。不妨设后者成立，由于 $C(u_i)\neq C(v_j)$，从而 $C(X)\subseteq\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\}\}$，矛盾。

情形 3.2. $C(Y)\not\subseteq\{\{4,5\}\}$，则 $C_2\cup C_3$ 中至多有 4 个集合不属于 $C(Y)$，设 $C(Y)\not\subseteq\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$，且 C_2 中至少有一个集合属于 $C(Y)$，不妨设 $\{1,2,4\}\in C(Y)$，则 $\{1,2\}$ 至少给 $C(u_i)$ 着色 2 次，剩余的 $C(u_i)$ 包含 $\{1,3\}$ 或 $\{2,3\}$。由于 $C(u_i)\neq C(v_j)$，从而 $C(X)\subseteq\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},D_1,D_2,D_3,D_4\}$，矛盾。

情形 4. $u_1,u_2,u_3\cdots,u_{11}$ 这 11 个顶点所染颜色中互不相同的仅有 4 种。不妨设 $f(u_i)\in\{1,2,3,4\}(i=1,2,\cdots,11)$，则每个 $C(v_j)$ 都不是 2-子集，且每个 $C(v_j)$ 也都不是 $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$，因此，$\{1,2,3,4,5\}$ 的子集可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}-5=11$。当 $12\leqslant n\leqslant 28$ 时，矛盾。下面仅探讨当 $n=11$ 时的情形。$\{1,2,5\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}$ 中每一个集合都属于 $C(Y)$，因此，1,2,3,4 中的其中 3 种颜色都包含在每个 $C(u_i)$ 中，由于 $C(u_i)\neq C(v_j)$，从而 $C(u_i)\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{1,2,3,4\}\}$，6 个集合不能给 Y 中的 n 个顶点着色，故矛盾。

因此，完全二部图 $K_{11,n}$ 不能用 5 种颜色进行点可区别 E-全染色，那么当 $11\leqslant n\leqslant 28$ 时，有 $\chi_{vt}^{e}(K_{11,n})\geqslant 6$。下面用构造染色法给出 $K_{11,n}$ 6 种颜色的点可区别 E-全染色最优染色方案。

表 1 列出了 f_{28}（表 1 的第一行代表 X 中 11 个顶点 $u_i(1\leqslant i\leqslant 11)$ 的色集合，其中 -26 表示顶点不用颜色 2 和 6 着色，第二行代表 X 中 11 个顶点 $u_i(1\leqslant i\leqslant 11)$ 所染的颜色，其中 1 表示顶点用 1 着色，第三行 34(3) 表示用 3 染顶点 v_1,v_1 的关联边 $u_1v_1,u_2v_1,\cdots u_{11}v_1$ 分别用 4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4 染色，以下如此类推）。当 $11\leqslant n\leqslant 28$ 时，$K_{11,28}$ 的 6 种颜色的点可区别 E-全染色 f_{28}，在由 $X\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_j\}$ 中显然是 $K_{11,j}$ 的 6 种颜色的点可区别 E-全染色 f_j 所导出的子图所限制的。

表 1 $K_{11,28}$ 顶点 $v_j(11\leqslant j\leqslant 28)$ 关联边的染色方案

Table 1 The coloring method of the associated edges of vertex v_j of $K_{11,28}$ when $(11\leqslant j\leqslant 28)$

Y 中点的色及色集合	X 中点的色及色集合										
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
	−25(1)	−16(2)	−26(1)	−5(1)	−2(1)	−1(2)	−56(1)	−256(1)	−6(2)	−15(2)	(2)
v_1,34(3)	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
v_2,35(5)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
v_3,36(3)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
v_4,45(4)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

(续表 1)

Y 中点的色及色集合	X 中点的色及色集合										
	u_1 −25(1)	u_2 −16(2)	u_3 −26(1)	u_4 −5(1)	u_5 −2(1)	u_6 −1(2)	u_7 −56(1)	u_8 −256(1)	u_9 −6(2)	u_{10} −15(2)	u_{11} (2)
v_5,46(4)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
v_6,2 456(6)	4	4	4	4	4	4	2	4	5	4	5
v_7,135(5)	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	1
v_8,136(6)	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1
v_9,145(5)	1	4	1	1	1	4	1	4	1	4	1
v_{10},146(6)	1	4	1	4	1	4	4	4	1	4	1
v_{11},234(4)	3	2	3	2	3	2	2	3	2	2	3
v_{12},235(5)	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	3
v_{13},236(6)	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	3
v_{14},245(5)	4	4	4	2	4	4	4	4	4	4	4
v_{15},246(6)	4	4	4	2	4	4	2	4	4	4	4
v_{16},345(5)	4	4	4	3	4	4	3	4	4	4	4
v_{17},346(6)	4	4	4	3	4	4	4	4	3	4	3
v_{18},356(6)	3	3	5	3	5	3	3	3	3	3	5
v_{19},456(5)	4	4	5	4	4	4	4	4	4	4	6
v_{20},1 235(5)	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	1
v_{21},1 236(6)	3	3	3	3	3	3	2	3	1	3	3
v_{22},1 245(5)	4	4	4	4	4	4	2	4	4	2	1
v_{23},1 246(6)	4	4	4	4	4	4	2	4	4	2	1
v_{24},1 346(6)	3	4	4	4	3	3	3	3	4	3	1
v_{25},2 356(6)	3	5	3	3	3	3	2	3	3	3	3
v_{26},3 456(6)	4	5	4	3	4	3	3	3	3	4	3
v_{27},12 356(6)	3	5	3	2	3	3	3	3	3	3	1
v_{28},12 456(6)	4	5	4	4	4	4	2	4	4	4	1

定理 2　当 29≤n≤88 时,有 $\chi_{vt}^{e}(K_{11,n})=7$。

证明　用反证法证明。假设 $K_{11,n}$ 可以用 6 种颜色进行点可区别 E-全染色,则用颜色 1,2,3,4,5,6 去着色,利用结构分析法,则可分为以下 5 种情形进行探讨。

情形 1. $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 11 个顶点所染的颜色中互不相同的仅有一种。不妨设 $f(u_i)=1(i=1,2,\cdots,11)$,则每个 $C(v_j)$ 都不能用颜色 1 染色。因此,{1,2,3,4,5,6} 的子集中可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{6-1}{2}+\binom{6-1}{3}+\binom{6-1}{4}+\binom{6-1}{5}=26$。26 个集合不能给 Y 中的 n 个顶点分别着色,矛盾。

情形 2. $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 11 个顶点所着颜色中不一样的仅有 2 种。可设 $f(u_i)\in\{1,2\}(i=1,2,\cdots,11)$,则不能用颜色 1 或颜色 2 在每个 $C(v_j)$ 是 2-子集时进行染色。这样,{1,2,3,4,5,6} 的子集中可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}-9=48$。当 49≤$n$≤88 时,矛盾。下面仅考虑当 29≤$n$≤48 时的情形。令 $B=B_1\cup B_2\cup B_3$,其中,$B_1=\{\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$;$B_2=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\}\}$;$B_3$ 为 {1,2,3,4,5,6} 子集的所有 4-、5-、6-子集和除去 B_2 中的 3-子集所构成的集合,共 38 个集合。

由上面分类可以得到,在 B 中有 26 个包含 1,2 的集合,在 B 中有 29 个包含 3,4,5,6 的子集合。这样,每个 $C(u_i)$ 至少有 3 种颜色才能进行正常染色,故 $C(X)\subseteq B_2\cup B_3$,$C(X)\cup C(Y)\subseteq B$,有 $11+n\leq 48$,可得 $n\leq 37$。因此,当 38≤n≤48 时,矛盾。以下只需对 29≤n≤37 时的情形进行讨论。

情形2.1. $C(Y)\subseteq B_2$,因此,$1,2\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$,则 $C(Y)\not\subseteq B_1$。否则,假设 $C(Y)\subseteq B_1$,则3,4,5,6中至少有一种颜色在每个 $C(u_i)$ 中出现,不妨设 $3\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$,从而 $1,2,3\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$,则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,矛盾。因为 B_1 中的集合均不属于 $C(X)$ 和 $C(Y)$,且 $42\leqslant 11+n\leqslant 48$,所以当 $31\leqslant n\leqslant 37$ 时,42个集合不能给 X 和 Y 中的 $(11+n)$ 个顶点着色,矛盾。因此,只需考虑当 $29\leqslant n\leqslant 30$ 时的情形,当 $29\leqslant n\leqslant 30$ 时,B_2 中至多有一个集合不属于 $C(Y)$。

情形2.1.1. $C(X)\subseteq B_2$,不妨设 $\{1,2,3\}$ 是 X 中点的色集合,由于 $\{4,5,6\}$ 为 Y 中顶点色集合,且 $\{1,2,3\}\cap\{4,5,6\}=\varnothing$,矛盾。

情形2.1.2. $C(X)\not\subseteq B_2$,则 $C(Y)\subseteq B_2$,又 $\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{4,5,6\},\{3,4,5,6\}\in C(Y)$,故颜色3,4,5,6中的至少某2种色出现在每个 $C(u_i)$ 中,从而 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\{1,2,4,5\},\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1,2,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$。不妨设 $C(u_i)=\{1,2,3,4\}$,$f(u_{i0})=1$,由于 $\{1,5,6\}\in C(Y)$,则不能同时正常染色,矛盾。即 $\{1,2,3,4\}\notin C(X)$,10个集合不能给 X 中的11个顶点进行染色,矛盾。

情形2.2. $C(Y)\not\subseteq B_2$。

情形2.2.1. $C(X)\subseteq B_2$,不妨设 $C(u_{i0})=\{1,2,3\}$,$f(u_{i0})=1$,则 $C(v_j)$ 包含颜色2或3,故 $C(Y)\not\subseteq\{\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{4,5,6\},\{1,4,5,6\}\}$,且 $C(X)\not\subseteq\{\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5,6\}\}$,则 $11+n\leqslant 48-4$,有 $n\leqslant 33$。当 $34\leqslant n\leqslant 37$ 时,矛盾。以下只考虑 $29\leqslant n\leqslant 33$ 时的情形。

(1) $C(Y)\subseteq\{\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}\}$,不妨设 $C(v_{j0})=\{3,4\}$,$f(v_{j0})=4$,则 $C(u_i)$ 包含颜色3,那么 $C(X)\not\subseteq\{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\}\}$,从而 $11+n\leqslant 48-4-6$,$n\leqslant 27$,矛盾。

(2) $C(Y)\not\subseteq\{\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}\}$,则 $11+n\leqslant 48-4-3$,$n\leqslant 30$,当 $31\leqslant n\leqslant 37$ 时,矛盾。以下仅考虑 $29\leqslant n\leqslant 30$ 时的情形。此时,$C(X)\not\subseteq\{\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{2,5,6\}\}$,从而 $11+n\leqslant 48-7-3$,$n\leqslant 27$,矛盾。

情形2.2.2. $C(X)\not\subseteq B_2$,此时,$C(X)\cup C(Y)\subseteq B_1\cup B_3$,有 $11+n\leqslant 38+6$,$n\leqslant 33$。因此,当 $34\leqslant n\leqslant 37$ 时,矛盾。以下仅考虑 $29\leqslant n\leqslant 33$ 时的情形。此时 B_1 中至少有2个集合属于 $C(Y)$。

(1) B_1 中恰有2个或3个集合属于 $C(Y)$,因此,在颜色3,4,5,6中至少有某一种色同时出现在每个 $C(u_i)$ 中,不妨设 $3\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$。则 $C(X)\not\subseteq\{\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{2,5,6\}\}$。由 $C(Y)\subseteq\{\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\}\}$,可得包含颜色2的 $C(X)$ 至少包含4,5,6中的某2种共同的颜色,设对每个满足 $f(u_j)=2$ 的 u_j 都有 $a,b\in C(u_j)$,这里 $a<b$,$a,b\in\{4,5,6\}$。由于 $\{4,5\}\cap\{a,b\}\neq\varnothing$,则可得颜色4,5中至少有某一种色同时出现在每个 $C(u_i)$ 中,不妨设 $4\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$,从而 $C(X)\subseteq\{\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,矛盾。

(2) B_1 中恰有4个或5个集合属于 $C(Y)$,则在颜色3,4,5,6中至少有某2种颜色同时出现在每个 $C(u_i)$ 中,不妨设 $3,4\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$。则 $\{1,5,6\},\{2,5,6\},\{1,2,5,6\}\notin C(X)$ 且至少有1个集合属于 $C(Y)$,设 $C(v_{j0})=\{1,2,5,6\}$,$f(v_{j0})=6$,则 $C(u_i)$ 包含 $\{1,2\}$,$\{1,5\}$ 或 $\{2,5\}$ $(i=1,2,\cdots,11)$,因此,$C(X)\subseteq\{\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,矛盾。

(3) $C(Y)\subseteq B_1$,这样在颜色3,4,5,6中至少有某3种色将同时出现在每个 $C(u_i)$ 中,假设 $3,4,5\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$。从而 $C(X)\subseteq\{\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,矛盾。

情形3. $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 11个顶点所染的颜色中互不相同的仅有3种。不妨设 $f(u_i)\in\{1,2,3\}$ $(i=1,2,\cdots,11)$,则当 $C(v_j)$ 是2-子集时,不包含颜色1,2或3,且每个 $C(v_j)$ 都不是 $\{1,2,3\}$。因此,$\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}-13=44$。当 $45\leqslant n\leqslant 88$ 时,矛盾。下面只需讨论当 $29\leqslant n\leqslant 44$ 时的情形。令 $C=C_1\cup C_2\cup C_3$,其中:$C_1=\{\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$;$C_2=\{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},$

$\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\}\}$;$C_3$ 是$\{1,2,3,4,5,6\}$子集中的所有 4-、5-、6-子集和除去 $C_2\cup\{\{1,2,3\}\}$中的 3-子集,共有 32 个子集合。

由上面的分类可以得到在集合 C 中包含 25 个含 i 的子集合$(i=1,2,3)$,包含28 个含j 的子集合$(j=4,5,6)$,因此,每个 $C(u_i)$中至少有 3 种颜色出现,故 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3\}\}\cup C_2\cup C_3$,$C(X)\cup C(Y)\subseteq\{\{1,2,3\}\}\cup C$,有 $11+n\leqslant 1+44$,可得 $n\leqslant 34$,从而当 $35\leqslant n\leqslant 88$ 时,矛盾。下面只需探讨 $29\leqslant n\leqslant 34$ 时的情形。

情形 3.1. $C(X)\subseteq\{1,2,3\}$,则$\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5,6\}$ 均不属于 $C(X)$ 和 $C(Y)$,那么 $C(X)\cup C(Y)\subseteq\{\{1,2,3\}\}\cup C_2\cup C_3\setminus\{\{4,5,6\}\}$,即 $11+n\leqslant 1+9+32-1$,$n\leqslant 30$。当 $31\leqslant n\leqslant 34$ 时,矛盾。当 $29\leqslant n\leqslant 30$ 时,设 $C(u_{i0})=\{1,2,3\}$,$f(u_{i0})=1$,则$\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\}$都不属于 $C(Y)$但同时都属于 $C(X)$。那么 $C(Y)\not\subseteq C_2$,则 $C(Y)\subseteq C_3\setminus\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{4,5,6\}$,有 $n\leqslant 32-4=28$,矛盾。

情形 3.2. $C(X)\not\subseteq\{\{1,2,3\}\}$,此时 $C(X)\subseteq C_2\cup C_3$,$C(X)\cup C(Y)\subseteq C$,有 $11+n\leqslant 44$,$n\leqslant 33$。故以下只需对 $29\leqslant n\leqslant 33$ 时的情形进行探讨,这时 C 中至多有 4 个集合不属于 $C(X)$和 $C(Y)$。

情形 3.2.1. $C(Y)\subseteq C_1$。此时颜色 4,5,6 中至少有某 2 种颜色同时在每个 $C(u_i)$中出现,不妨设 $4,5\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$。则 $C(X)\not\subseteq C_2$,此时 $C(X)\subseteq C_3$,且 C_2 中至多有 4 个集合不属于 $C(Y)$,因此,$1,2,3\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$,从而 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,矛盾。

情形 3.2.2. C_1 中恰有一个或 2 个子集合不属于 $C(X)$和 $C(Y)$。此时在颜色 4,5,6 中至少有某一种色同时出现在每个 $C(u_i)$中,假设 $4\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$,则 $C(X)\not\subseteq\{\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{2,3,5\},\{2,3,6\}\}$,且至多有 3 集合不属于 $C(Y)$,那么由以上可以得到 $1,2,3\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$,则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,故矛盾。

情形 3.2.3. C_1 中的集合都是 X 和 Y 中顶点色集合,假设$\{4,5,6\}$是 Y 中某顶点 v_{j0}的色集合,设 $f(v_{j0})=6$,可得每个 $C(u_i)$包含颜色 4 或颜色 5,则$\{1,2,6\},\{1,3,6\},\{2,3,6\}$不属于 $C(X)$,但至多有一个不属于 $C(Y)$,可得 $1,2,3\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$,则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$。

情形 3.2.4. $C_1\not\subseteq C(X)\cup C(Y)$,且 $C_2\cup C_3$ 中至多有一个集合不属于 $C(X)$和 $C(Y)$,则下面只需对 $29\leqslant n\leqslant 30$ 的情形进行讨论:

(1)$C(X)\not\subseteq C_2$,则在 C_2 中至少有 8 个集合属于 $C(Y)$,可得$1,2,3\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$,则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$,矛盾。

(2)$C(X)\subseteq C_2$,不妨设 $C(u_{i0})=\{1,2,4\}$,$f(u_{i0})=1$,又$\{3,5,6\}$为 Y 中顶点色集合,且$\{1,2,4\}\cap\{3,5,6\}=\varnothing$,故矛盾。

情形 4. $u_1,u_2,u_3\cdots,u_{11}$ 11 个顶点所染的颜色中互不相同的仅有 4 种。不妨设$f(u_i)\in\{1,2,3,4\}(i=1,2,\cdots,11)$,则当 $C(v_j)$是 2-子集时,不含颜色 1,2,3 或 4,且每个 $C(Y)\not\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$,因此,$\{1,2,3,4,5,6\}$的子集可作为 $C(Y)$的数目为$\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}-14-5=38$。当 $39\leqslant n\leqslant 88$ 时,矛盾。下面仅考虑 $29\leqslant n\leqslant 38$ 时的情形。令 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$,其中,$D_1=\{\{5,6\}\}$;$D_2=\{\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\}\}$;$D_3$ 是$\{1,2,3,4,5,6\}$所有子集合中的 5-子集、6-子集和除去$\{1,2,3,4\}$及不在 $D_2\cup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$中的 3-子集,共 26 个。

通过以上分类可以得出 D 中包含 i 集合的共有 22 个$(i=1,2,3,4)$,包含 j 集合的有 28 个$(j=5,6)$,因此,在每个 $C(u_i)$中至少有 3 种颜色同时出现,故 $C(X)\subseteq D_2\cup D_3\cup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$,$C(X)\cup C(Y)\subseteq D\cup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$,有 $11+n\leqslant 38+5$,即 $n\leqslant 32$。从而当 $33\leqslant n\leqslant 38$ 时,矛盾。这样以下只需要讨论当$29\leqslant n\leqslant 32$ 时的情形。

情形 4.1. $C(Y)\subseteq\{\{5,6\}\}$,因此,$5\in C(u_i)$或 $6\in C(u_i)$,$(i=1,2,\cdots,11)$。不妨设后者成立,

则 $C(X)\not\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$,故 $C(X)\cup C(Y)\subseteq D$,即 $11+n\leqslant 38$,$n\leqslant 27$,27 个集合不能分别给 Y 中的 n 个顶点进行染色,矛盾。

情形 4.2. $C(Y)\not\subseteq\{5,6\}$,则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$,不妨设 $C(u_{i0})=\{1,2,3\}$,$f(u_{i0})=1$,则每个 $C(v_j)$ 包含颜色 2 或颜色 3,故 $C(Y)\not\subseteq\{\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{4,5,6\},\{1,4,5,6\}\}$ 且至少有一个子集合是 X 中某顶点 u_{i1} 的色集合,不妨设 $C(u_{i1})=\{1,4,5\}$,$f(u_{i1})=1$,则每个 $C(v_j)$ 包含颜色 4 或颜色 5,那么 $C(Y)\not\subseteq\{\{1,2,6\},\{1,3,6\},\{2,3,6\},\{1,2,3,6\}\}$,$C(Y)\subseteq D_2\cup D_3\setminus\{\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{4,5,6\},\{1,4,5,6\},\{1,2,6\},\{1,3,6\},\{2,3,6\},\{1,2,3,6\}\}$,有 $n\leqslant 12+25-9$,得 $n\leqslant 28$,得出矛盾。

情形 5. $u_1,u_2,u_3\cdots,u_{11}$ 中这 11 个顶点所染的颜色中互不相同的仅有 5 种。不妨设 $f(u_i)\in\{1,2,3,4,5\}$ $(i=1,2,\cdots,11)$,则每个 2-子集都不属于 $C(v_j)$,且 $\{1,2,3,4,5\}$ 的 3-子集、4-子集、5-子集都不属于 $C(v_j)$,共有 $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=16$,因此,$\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集可作为 $C(Y)$ 的数目为 $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}-16=26$,矛盾。

因此,$K_{11,n}$ 不能用 6 种颜色进行点可区别 E-全染色,那么当 $29\leqslant n\leqslant 88$ 时,$\chi_{vt}^{e}(K_{11,n})\geqslant 7$。下面利用构造染色法给出 $K_{11,n}$ 的一个最优 7 种颜色进行点可区别 E-全染色的染色方案。

首先,对 f_{88} 进行染色,让完全二部图 $K_{11,n}$ 所导出的由 $X\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_{28}\}$ 的构成子图按照表 1 给出的 6 种颜色进行染色,然后对剩余的顶点以及剩余顶点的关联边去染色,让 $v_j(29\leqslant j\leqslant 44)$ 和这些顶点所关联的一些边按照下面表 2 的方法进行染色;让顶点 $v_{44},v_{45},\cdots,v_{48}$ 分别按照下列色集合的方法进行染色:用所有包含颜色 7 的 3-,4-,5-,6-子集,但不包含以下任意一个集合:$\{1,2,7\}$,$\{1,3,4,5,7\}$,$\{1,3,4,6,7\}$,$\{2,3,4,6,7\}$,$\{1,3,4,5,6,7\}$,$\{2,3,4,5,6,7\}$,$\{2,3,4,6,7\}$,$\{1,2,3,4,7\}$,$\{1,2,3,4,5,7\}$ 和 $\{1,2,3,4,6,7\}$ 中的任意一个,顶点 v_j 和顶点 v_j 的关联边 $u_1v_j,u_2v_j,\cdots u_{11}v_j$,的具体染色方案在表 3 中列出。当 $29\leqslant j\leqslant 88$ 时,$K_{11,88}$ 的 7 种颜色点可区别 E-全染色对 f_{88} 进行染色,在由 $X\cup\{v_1,v_2\cdots v_j\}$ 所导出的子图上的限制很明显是完全二部图 $K_{11,j}$ 的 7 种颜色点可区别 E-全染色 f_j。

表 2　$K_{11,88}$ 顶点 $v_j(29\leqslant j\leqslant 44)$ 关联边的染色方案

Table 2　The coloring method of the associated edges of vertex v_j of $K_{11,88}$ when $(29\leqslant j\leqslant 44)$

Y 中点的色及色集合	X 中点的色及色集合										
	u_1 −26(1)	u_2 −16(2)	u_3 −25(1)	u_4 −15(2)	u_5 −2(1)	u_6 −1(2)	u_7 −56(1)	u_8 −256(1)	u_9 −6(2)	u_{10} −5(1)	u_{11} (2)
v_{29},37(3)	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
v_{30},47(4)	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
v_{31},57(7)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
v_{32},67(7)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
v_{33},1 345(5)	3	4	3	3	3	3	3	3	4	4	1
v_{34},2 345(5)	3	2	4	2	4	2	2	4	4	4	2
v_{35},1 346(6)	4	4	3	4	3	3	3	3	1	3	1
v_{36},2 346(6)	3	4	3	3	3	3	3	3	4	3	2
v_{37},13 456(5)	3	4	4	4	4	4	3	4	1	4	6
v_{38},23 456(6)	5	4	4	4	4	4	4	4	5	4	2
v_{39},1 234(4)	3	3	3	3	3	3	2	3	1	2	3
v_{40},134(6)	3	3	3	3	4	4	4	3	1	4	3
v_{41},12 345(5)	4	4	3	3	3	3	2	3	1	2	3
v_{42},12 346(6)	4	4	3	3	4	4	2	4	4	2	1
v_{43},123 456(5)	3	3	3	6	3	6	2	3	1	2	3

表3　$K_{11,88}$ 顶点 v_j(45≤j≤88)及与顶点相关联边的染色方案

Table 3　Dyeing scheme for vertex v_j and their associated edges of $K_{11,88}$ when (45≤j≤88)

限制条件	点 v_j 所构成颜色的集合	点 v_j 及相关联边的颜色
3≤a≤6	{1,a,7}	a;77777777171
2≤a<b≤6	{a,b,7}	b;7777777777a
2≤a<b≤6	{1,a,b,7}	b;7777777717a
2≤a<b<c≤6	{a,b,c,7}	c;77777a7777b
2≤a<b<c≤6	{1,a,b,c,7}	c;77777a7177b
2≤a<b<c<d≤6	{a,b,c,d,7}	d;777ab7777ab
2≤a<b<c<d≤6	{1,a,b,c,d,7}	d;7777ab771ab

2　结　语

先利用分析法和反证法得到当29≤n≤88的时候,用6种颜色不能对完全二部图 $K_{11,n}$ 进行点可区别染色。因此,当29≤n≤88时,$\chi_{vt}^{e}(K_{11,n})\geq 7$。然后利用构造染色法,得到用7种颜色可以对完全二部图 $K_{11,n}$ 进行点可区别 E-全染色,这样就可以确定出完全二部图 $K_{11,n}$ 的 VDET 色数为7。当 n≥89时,不能用7种颜色进行染色,将对完全二部图 $K_{11,n}$ 的点可区别 E-全染色色数继续进行研究。在后面的研究中,可能会继续利用本文所用到的方法,对完全二部图 $K_{11,n}$ 进行讨论并计算出其相对应的点可区别 E-全染色色数,但这个证明过程非常长,因此,证明省略。

参考文献:

[1] Zhang Z F, Qiu P X, Li J W, et al. Vertex distinguishing total colorings of graphs[J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 33-45.

[2] Chen X E, Gao Y P, Yao B. Relations of vertex distinguishing total chromatic numbers between a subgraph and its supergraph[J]. Information Sciences, 2014, 288: 246-253.

[3] 辛小青, 王治文, 陈祥恩, 等. 点不交的 m 个 C_3 的并的点可区别全染色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2012, 50(2): 251-257.

[4] 陈祥恩,王治文,马彦荣, 等. mK_4 的点可区别全染色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2012,50(4):686-692.

[5] Chen X E, Zu Y, Zhang Z F. Vertex-distinguishing E-total colorings of graphs[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2011, 36: 1485-1500.

[6] Chen X E, Zu Y. Vertex-distinguishing E-total coloring of the graphs mC3 and mC4[J]. Journal of Mathematical Research Exposition, 2011, 31: 45-58.

[7] 包丽娅, 陈祥恩, 王治文. 完全二部图 $K_{10,n}$(10≤n≤90)的点可区别 E-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(12): 23-30.

[8] 陈祥恩, 包丽娅, 王治文. 完全二部图 $K_{10,n}$(91≤n≤214)的点可区别 E-全染色[J]. 兰州大学学报(理学版), 2019, 55(3): 410-414.

[9] 陈祥恩,苏丽,王治文. 完全二部图 $K_{2,n}$,$K_{3,n}$ 的一般点可区别全染色[J]. 吉林大学学报(理学版),2016,54(6):1289-1293.

[10] 李世玲. 完全二部图的点可区别 E-全染色的若干结果[D]. 兰州:西北师范大学,2017.

[11] Chen Xiangén. Vertex-distinguishing E-Total coloring of complete bipartite graph $K_{7,n}$ when 7≤n≤95[J]. Communications in Mathematical Research, 2016, 32(4):359-374.

[12] 师志凤,陈祥恩,王治文. 完全二部图 $K_{6,n}$ 的点可区别 E-全染色[J]. 吉林大学学报(理学版),2018,56(4):845-852.

[13] 陈祥恩,高毓萍. 合成图的点可区别正常边色数[J]. 吉林大学学报(理学版),2011,49(2):207-212.

[14] 杨芳,王治文,陈祥恩,等. 完全图和星的合成的点可区别正常边染色[J]. 华东师范大学学报(自然科学版),2013,50(4):136-143.

[15] 陈祥恩,李婷,王治文. 一类含有4-圈的单圈图一般点可区别全染色[J]. 大连理工大学学报,2017,57(3):316-320.

【责任编辑: 孙向荣】