

文章编号:1671-4229(2022)01-0041-06

基于分形插值的多重分形降趋波动 分析法及其有效性检验

刘 慧, 万 丽*, 曾祥健, 邓小成
(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 利用分形插值拟合替代多重分形降趋波动分析法(MFDFA)中的多项式拟合,给出基于分形插值的多重分形降趋波动分析法(FI-MFDFA),并以经典的二项式多重分形序列(BMS)为例,检验该方法的有效性。结果表明,FI-MFDFA方法能有效识别序列多重分布奇异性的程度,随着BMS模型参数的减小,序列多重分形特征越明显;通过与MFDFA对比分析,得出在方法步骤、参数统计精度和样本量的敏感度3个方面,FI-MFDFA方法都优于MFDFA方法,且避免了拟合阶数的选取对多重参数计算结果的影响。为进一步分析实际数据的非线性特征提供理论依据。

关键词: 降趋势波动; 分形插值拟合; 多重分形; Hurst指数

中图分类号: O 29 **文献标志码:** A

Validity test of the fractal interpolation based multifractal detrended fluctuation analysis method

LIU Hui, WAN Li*, ZENG Xiang-jian, DENG Xiao-cheng

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: By using fractal interpolation fitting instead of polynomial fitting in the MFDFA method, fractal interpolation based multifractal detrended fluctuation analysis (FI-MFDFA) method is presented, and the effectiveness of this method is tested by taking the classical Binomial Multifractal Sequence (BMS) as an example. The results show that the FI-MFDFA method can effectively identify the degree of the multi-distribution singularity of sequences, and the multifractal characteristics of sequences become more obvious with the decrease of BMS model parameters. By comparing this to MFDFA, it is concluded that the FI-MFDFA method is superior to the MFDFA method in three aspects: method steps, statistical accuracy of parameters and sensitivity of sequence size. It also avoids the influence of the selection of fitting order on the calculation results of multiple parameters. It provides a theoretical basis for further analysis of the nonlinear characteristics of actual data.

Key words: detrended fluctuation; fractal interpolation fitting; multifractal; Hurst index

多重分形是由定义在具有自相似性的形态结构上的无穷多个标度指数的测度所组成的度量集合,其谱函数可以描述分形结构上不同的局域条件或分形结构在

演化过程中不同层次所导致的特殊行为与特征^[1-2]。常用于计算多重分形谱及相关参数的方法是配分函数法,但该方法无法准确反映有趋势影响的非平稳数据的

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41872246);广州大学全日制研究生基础创新资助项目(2020GDJC-M33)

作者简介: 刘慧(1998—),女,硕士研究生. E-mail:1582532639@qq.com

* 通信作者. E-mail:wanli@gzhu.edu.cn

引文格式: 刘慧,万丽,曾祥健,等. 基于分形插值的多重分形降趋波动分析法及其有效性检验[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2022,21(1):41-46.

多重特征。近年来,新提出了多重分形降趋波动分析法(Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, MFDFA)^[3]、多重分形降趋移动平均分析法(Multifractal Detrending Moving Average Analysis, MFDMAA)^[4]、小波领导分析法(Wavelet Leaders Analysis, WLA)^[5]和小波模极大值法(Wavelet Transform Modulus Maxima, WTMM)^[6]等,其中,MFDFA方法由于运算简便且易于实现的优点,已证实是描述非线性序列复杂性的有效定量化工具之一,被广泛应用在化学、生物、医学、地质和物理等各个学科领域,但该方法也存在着产生伪波动误差及多项式拟合阶数的影响较大的缺点^[7-10]。Barnsley于1986年首次提出了分形插值技术^[11],为拟合分形数据提供了新思想,分形插值方法具有拟合精度高的优点。

为了找出更合适的去趋势和去噪声的方式,本文将分形插值拟合技术引入到MFDFA方法中,给出了基于分形插值的多重分形降趋波动分析法(Fractal Interpolation based Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, FI-MFDFA),并验证其有效性;进一步从算法模型异同、数据样本量的变化和多重参数计算的统计精度等方面,对比分析FI-MFDFA和MFDFA方法的优劣,为应用这2种方法来分析实际序列的多重分形特征和长程相关性提供理论支持。

1 理论与方法

1.1 分形插值

分形插值方法是建立在迭代函数系(IFS)理论基础上,通过给定一组插值点 $\{(x_j, y_j) \in \mathbf{R}^2, j=0, 1, 2, \dots, N\}$ 构造出满足插值条件 $f(x_j) = y_j (j=0, 1, 2, \dots, N)$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \rightarrow \mathbf{R}$,其中, $x_0 < x_1 < \dots < x_N, y_0, y_1, \dots, y_N$ 是任意实数,该连续函数称为分形插值函数^[12],其步骤如下:

(1) 设插值区间为 $I = [x_0, x_N]$,两点区间为 $I_i = [x_{i-1}, x_i], i=1, 2, \dots, N$,压缩变换 $L_i: I \rightarrow I_i$ 和 $F_i: K = I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$$L_i(x_0) = x_{i-1}, L_i(x_N) = x_i \quad (1)$$

$$F_i(x_0, y_0) = y_{i-1}, F_i(x_N, y_N) = y_i \quad (2)$$

(2) 定义仿射变换 $W_i(x_j, y_j) = (L_i(x_j), F_i(x_j, y_j)), i=1, 2, \dots, N; j=0, 1, 2, \dots, N$,从而构造出迭代函数系 $IFS\{K; W_i, i=1, 2, \dots, N\}$,当 $L_i(x_j, y_j)$ 和 $F_i(x_j, y_j)$ 是线性函数时,可得到如下公式:

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \rightarrow W_i \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_m \\ y'_m \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, N; j=0, 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中, (x'_m, y'_m) 为进行第一次迭代插值之后得到的数据长度为 m 的序列,在进行第二次迭代时,将 (x'_m, y'_m) 作为新的插值点进行插值,以此类推。当迭代次数为 k 时,生成的插值数据个数 m 和插值点个数 N 之间的关系为 $m = (N-1)^{2^k} + 1$ 。

(3) 将式(1)和式(2)代入式(3)中,解得

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0} \quad (4)$$

$$e_i = \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0} \quad (5)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_N - x_0} - d_i \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} \quad (6)$$

$$f_i = \frac{x_N y_{i-1} - x_0 y_i}{x_N - x_0} - d_i \frac{x_N y_0 - x_0 y_N}{x_N - x_0} \quad (7)$$

式中, $d_i (i=1, 2, \dots, N)$ 为垂直比例因子,是仿射变换 W_i 的一个自由变量,满足 $|d_i| < 1$,代入相应的 d_i ,系数 $a_i, e_i, c_i, f_i (i=1, 2, \dots, N)$ 可由插值点数据计算得出,因此,分形插值拟合可以通过改变垂直比例因子 d_i 的值,来改变插值函数方程 $f(d_i)$ 的表达式。

1.2 FI-MFDFA

研究非平稳序列的途径是先通过降趋势过程将序列平稳化,再对序列的相关性特征进行分析。降非线性趋势的常用方式是多项式拟合,而在实际应用中,无法准确判断数据具有几阶多项式趋势,从而在结果分析时容易产生偏差。FI-MFDFA通过分形插值拟合消除序列的分形趋势,避免多项式阶数选取的主观性影响。

对给定长度为 n 的序列 $\{x_i\} (i=1, 2, \dots, n)$,FI-MFDFA的计算步骤如下:

步骤1:求序列 $\{x_i\}$ 的累积离差序列 $y(i)$

$$y(i) = \sum_{k=1}^i [x_k - \bar{x}], i=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

式中, \bar{x} 为 x_i 的均值; x_k 表示原序列的第 k 个数据值。

步骤2:求出对序列 $y(i), i=1, 2, \dots, n$ 进行分形插值时的垂直比例因子 d 。在序列 $y(i)$ 上等距选取5个插值点 $\{(i, y(i)) \mid i=1, n/4, n/2, 3n/4, n\}$,由分形插值理论,插值区间 $[1, n]$ 被分为4段,设每一段的垂直比例因子 d_l 对于每个 l 都相等,即 $d_l = d (l=1, 2, 3, 4)$,根据最小二乘原则计算当分形插值拟合序列 $f(i)$ 和序列 $y(i)$ 之间的误差 $\sqrt{\sum_{i=1}^n (f(i) - y(i))^2}$ 达到最小值时 d 的值,此时垂直比例因子 d 达到最优。

步骤3:把序列 $y(i)$ 从第一个数据开始等长度地分割成尺度为 s 的 $N_s = \text{int}(N/s)$ 个互不相交的数据段,由于长度 N 经常不是 s 的整数倍,为了不丢弃尾部剩余部分,从序列最后一个数据重复这一分割过程,因此,得到

$2N_s$ 个区间。

步骤 4:用最小二乘拟合法求均方误差 $F^2(s, v)$ 。设 $f_v(i)$ 为第 v 个小区间的分形插值函数方程,控制每一个小区间的函数方程中的垂直比例因子 d 不变,均等于第二步计算出的 d 。

当 $v=1, 2, \dots, N_s$ 时,有

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \{y[(v-1)s+i] - f_v(i)\}^2 \quad (9)$$

当 $v=N_{s+1}, N_{s+2}, \dots, 2N_s$ 时,有

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[N-(v-N_s)s+i] - f_v(i)\}^2 \quad (10)$$

步骤 5:求序列的 q 阶波动函数(q 为整数)

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (11)$$

当 $q=0$ 时,

$$F_0(s) = \lim_{q \rightarrow 0} F_q(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [\ln F^2(s, v)] \right\} \quad (12)$$

步骤 6:确定波动函数的标度指数,根据 $F_q(s)$ 与 s 的关系

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (13)$$

先固定阶数 q ,作 $\ln F_q(s)$ 对 $\ln s$ 的函数关系图,其拟合直线的斜率即为所得的标度指数 $h(q)$ 。这里 $h(q)$ 称为广义赫斯特(Hurst)指数,当序列是平稳时间序列时, $h(2)$ 称为 Hurst 指数。通常,波动函数值 $F_q(s)$ 是 s 的增函数,广义 Hurst 指数 $h(q)$ 是随 q 变化的单调减函数。当序列的小波动和大波动具有不同的标度行为时, $h(q)$ 显著依赖于 q , 序列表现为多重分形;当 $h(q)$ 独立于 q 为一常数时,即广义指数函数 $h(q)$ 不随 q 变化,则序列表现为单一分形。

步骤 7: q 阶广义 Hurst 指数 $h(q)$ 与质量指数 $\tau(q)$ 的关系为

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (14)$$

根据 legendre 变换得到多重分形奇异指数 α 和奇异谱函数 $f(\alpha)$:

$$\alpha = d\tau(q)/dq \quad (15)$$

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (16)$$

奇异指数用来描述观测序列中不同区间的奇异程度,奇异谱函数用于描述不同区间奇异指数的分形维数。当 $f(\alpha)$ 独立于 α 为一常数时,序列表现为单一分形特征;当 $f(\alpha)$ 的形状呈单峰凸分布时,序列表现为多重分形特征。

2 FI-MFDFA 方法检验

选择经典二项多重分形序列(BMS)模型检验 FI-MFDFA 方法的有效性。该模型构造如下:

$$x(i) = p^{n(i-1)} (1-p)^{n-n(i-1)}, i=1, 2, \dots, 2^n \quad (17)$$

式中参数 p 的取值范围是 $0 < p < 0.5$, $n(i)$ 则表示数值 i 在二进制中 1 的个数。

2.1 多重分形特征识别

选取参数 $p=0.20, 0.25, 0.30, 0.35$ 和 0.40 , 长度 $L=1024$ 的 BMS 序列作为分析对象,运用 FI-MFDFA 方法分析序列在不同参数下的多重分形特征。无标度区间 s 的取值范围从 20 到 $L/4$, 步长为 10;阶数 q 从 -3 到 3, 以 0.2 为步长均匀取 31 个值。图 1(a) 是不同参数 p 下的广义 Hurst 指数 $h(q)$ 随着 q 变化的曲线, 当 q 从 -3 增加到 3 时, 不同参数 p 下的 $h(q)$ 均随着 q 的增大而减小, 说明 FI-MFDFA 能识别出 BMS 序列的多重分形特征, 且 $\Delta h = h(-3) - h(3)$ 随着 p 增大而减小, 说明奇异性越大的序列, 多重分形特征越明显; 图 1(b) 是不同参数 p 下的多重分形谱 $\alpha-f(\alpha)$ 曲线, 从图形可以看出, 随着 p 的减小, 奇异指数 α 增大, 即分布奇异性越大的序列多重分形强度越大, 说明 FI-MFDFA 能较好地识别序列的多重分形性。

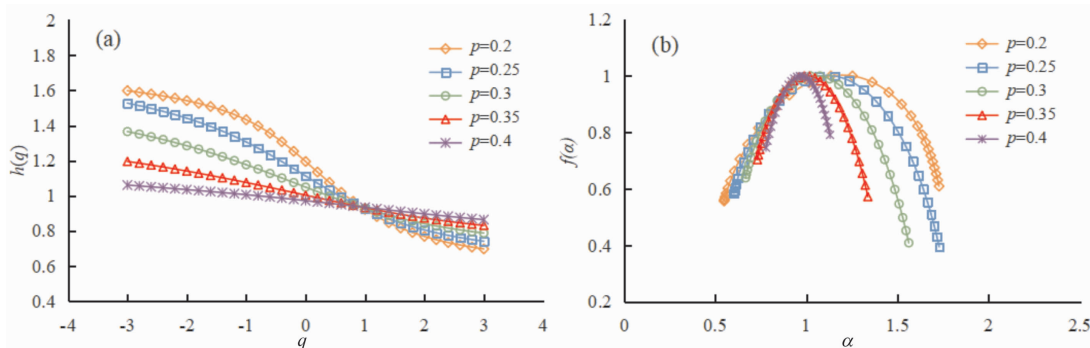


图 1 BMS 序列不同参数 p 的 FI-MFDFA 计算结果

Fig. 1 FI-MFDFA calculation results of different parameters p in the BMS sequence

2.2 与 MFDFA 的对比分析

2.2.1 方法步骤比较

FI-MFDFA 与 MFDFA 主要不同点在第 3 步。MFDFA 方法用多项式拟合法求残差,当拟合的多项式阶数为 m ,相应的方法记作 MFDFA $_m$,虽然拟合多项式的阶数可以根据具体情况灵活设置,但阶数的确定具有主观性,选取的阶数过小会导致不完全去除趋势,选取的阶数过大会引起过拟合;而 FI-MFDFA 用分形插值拟合法求残差,可以解决多项式阶数的选取不恰当对分析结果造成的影响。

2.2.2 参数的统计精度比较

采用参数 $p=0.3$,长度 $L=256$ 的 BMS 序列对比 FI-MFDFA 和 MFDFA 2 种方法的计算统计精度。无标度区间 s 取值范围为 20 到 $L/4$,步长为 10,阶数 q 从 -3 到 3,间隔为 0.2 均匀取 31 个值。图 2(a)和(b)分别是 Hurst 指数 $h(q)$ 和质量指数 $\tau(q)$ 与阶数 q 的关系图;图 2(c)是 FI-MFDFA 与 MFDFA $_1$ 、MFDFA $_2$ 及 MFDFA $_3$ 方法分析得到的多重分形谱 $f(\alpha)$ 和理论值谱线;为了更好地比较 4 种方法的统计精度,计算理论 Hurst 指数 $H(q)$ 与实际估计的 Hurst 指数 $h(q)$ 的差值:

$$\Delta h(q) = H(q) - h(q) \quad (18)$$

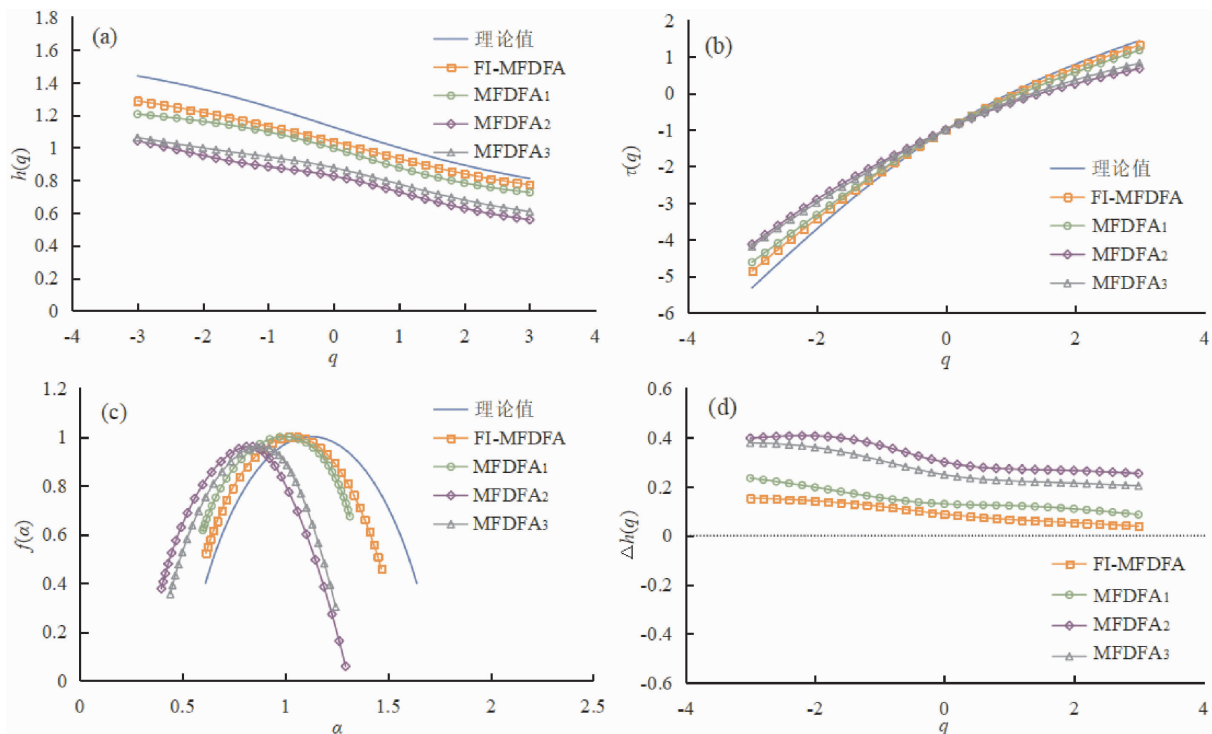


图 2 BMS 序列($p=0.3$)在 4 种多重分形方法下的对比结果

Fig. 2 Comparison results of BMS sequence ($p=0.3$) under four multifractal methods

图 2(d)是 $\Delta h(q)$ 与 q 的关系图。图 2(a)和(b)中 $h(q)$ 随着 q 的变化而变化,且 $\tau(q)$ 与 q 之间不是直线关系,故该序列是多重分形序列;FI-MFDFA 的 q 阶 Hurst 指数更接近理论值,其次是 MFDFA $_1$ 和 MFDFA $_3$ 、MFDFA $_2$ 的计算结果离理论值最远。由图 2(c)可以看出,多重分形谱曲线均往左偏离理论值曲线;相比于 $q < 0$ 部分,FI-MFDFA 方法计算出来的分形谱曲线逼近理论值的效果优于 $q > 0$ 部分;MFDFA 方法随着多项式拟合阶数的增加,计算出的多重分形谱与理论值的偏差变化较大,当阶数 $m=1$ 时,效果优于 $m=2$ 和 $m=3$,拟合阶数过大会引起过拟合现象,导致多重分形谱的形状和宽度偏离理论值。图 2(d)中 FI-MFDFA 的 $\Delta h(q)$ 波动斜率小于 MFDFA,随着 q 增大,4 种方法下的 $\Delta h(q)$ 均有所下降,其中,FI-MFDFA 的 $\Delta h(q)$ 小于 MFDFA,更接近 0。

表 1 是在 FI-MFDFA 和 MFDFA 方法下计算的 Hurst 指数 $h(q)$ 、质量指数 $\tau(q)$ 以及多重分形谱参数 α 和 $f(\alpha)$ 对于理论值的均方根误差。4 种方法下的参数 $h(q)$ 、 $\tau(q)$ 、 α 和 $f(\alpha)$ 均方根误差的大小关系:FI-MFDFA < MFDFA $_1$ < MFDFA $_3$ < MFDFA $_2$ 。总体来说 FI-MFDFA 方法的分析效果比 MFDFA 方法好。

表 1 多重分形参数的均方根误差

Table 1 Root-mean-square error of multifractal parameters

参数的均方根误差	FI-MFDFA	MF DFA ₁	MF DFA ₂	MF DFA ₃
$h(q)$	0.101 5	0.151 8	0.328 4	0.281 4
$\tau(q)$	0.193 0	0.295 2	0.603 3	0.531 2
α	0.114 0	0.184 3	0.334 7	0.305 9
$f(\alpha)$	0.052 0	0.124 2	0.059 4	0.072 1

2.2.3 样本量的影响比较

选取 $p = 0.3$, 样本量 L 分别为 256、512 和 1 024 的 BMS 序列, 运用 FI-MFDFA、MF DFA₁、MF DFA₂ 和 MF DFA₃ 4 种方法分析序列的多重分形性, 控制方法

中的无标度区间不变, 尺度区间 s 取值范围为 20 到 $L/4$, 步长为 10, 阶数 q 从 -3 到 3, 间隔为 0.2 均匀取 31 个值。图 3 分别为 FI-MFDFA、MF DFA₁、MF DFA₂ 和 MF DFA₃ 4 种方法计算出的多重分形谱, 并与理论值对比。随着样本量的增加, 4 种方法计算的分形谱右边部分的波动变化均大于左边部分, MF DFA₂ 和 MF DFA₃ 的波动明显大于 FI-MFDFA。FI-MFDFA 对于样本量的变化不是特别敏感, 在样本量为 256 时, 多重分形谱的形状在 $q < 0$ 部分略偏离理论值, 在样本量为 512 和 1 024 时, 多重分形谱的形状更接近于理论值; MF DFA 方法在样本量 L 为 256 时, 分形谱曲线偏离理论值最远, 在样本量为 1 024 时, 分形谱曲线最接近理论值, 其中 MF DFA₂ 和 MF DFA₃ 受小样本量的影响较大。

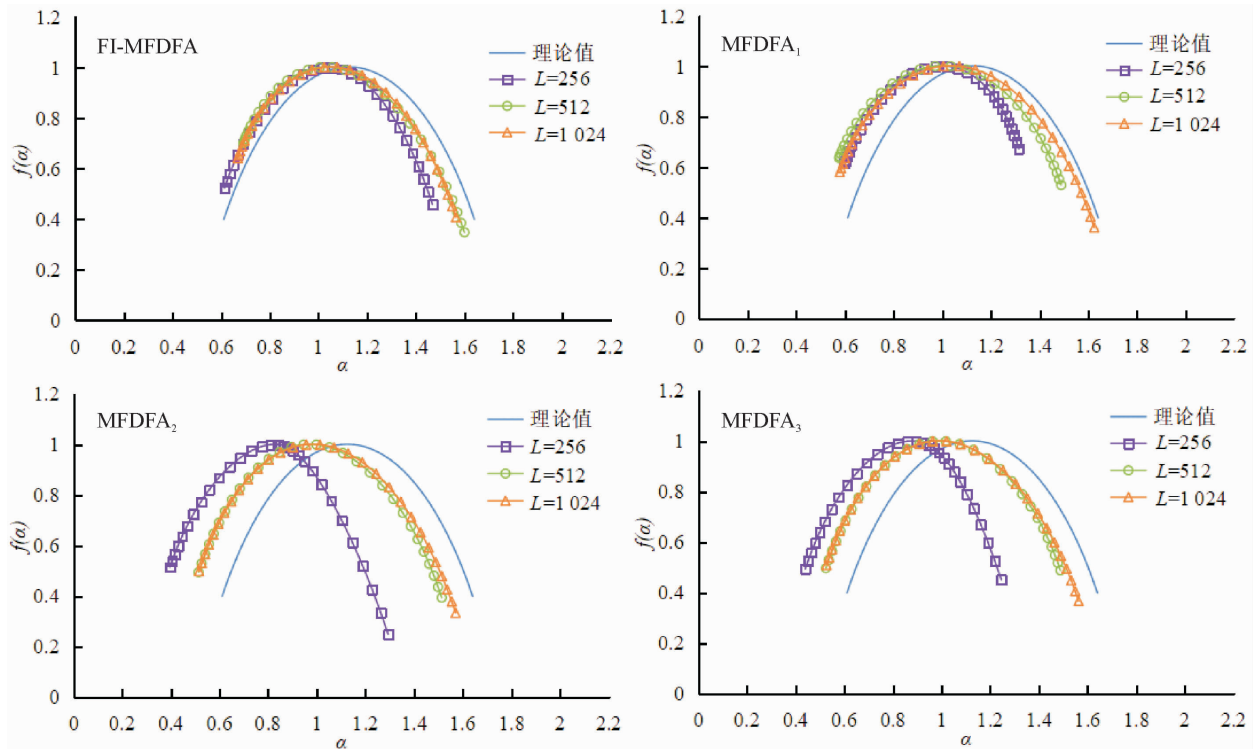


图 3 不同样本量序列的多重分形谱

Fig. 3 Multifractal spectrum of different sample series

表 2 是不同样本量序列在 4 种方法下的 Hurst 指数的均方根误差。FI-MFDFA 方法在计算同一样本量序列的实际 Hurst 指数与理论值的偏差均小于 MF DFA。4 种方法计算的 $h(q)$ 均方根误差均随着样本量 L 的增大而逐渐减小, 其中 FI-MFDFA 方法对于样本量的增加, Hurst 指数偏离理论值的变化波动最小, 当 $L = 512$ 和 $L = 1 024$ 时的 $h(q)$ 与理论值的均方根误差值分别为 0.074 1 和 0.066 9, 当 $L = 256$ 时, 均方根误差为

0.101 5, 均属于可以接受的误差范围; MF DFA 方法的多项式拟合阶数取 1 时, 计算 3 个样本量序列的均方根误差均小于 MF DFA₃, 而 MF DFA₂ 最大, 只有 MF DFA₁ 在 $L = 1 024$ 时均方根误差值小于 0.1。综合分析, 使用 MF DFA 方法对序列进行分析最少需要 1 024 个数据点, 而 FI-MFDFA 方法取 512 个数据点就可满足计算精度, 对于小样本量也可达到满意的精度。

表 2 不同样本量序列的 Hurst 指数均方根误差
Table 2 Root-mean-square error of Hurst index of different sample size sequences

样本量	FI-MFDFA	MFDFA ₁	MFDFA ₂	MFDFA ₃
$L=256$	0.101 5	0.151 8	0.328 4	0.281 4
$L=512$	0.074 1	0.120 4	0.141 4	0.126 9
$L=1 024$	0.066 9	0.083 9	0.127 9	0.121 4

3 结 论

将分形插值技术与降趋势波动方法相结合给出基

于分形插值的降趋势波多重分形方法(FI-MFDFA),并利用 BMS 模型对该方法进行了检验,从方法的算法步骤、参数统计精度和样本容量的敏感性 3 个方面,对比分析了 FI-MFDFA 方法与 MFDFA 方法的优劣性。分析结果显示:FI-MFDFA 方法能有效识别多重分形强度,其多重参数 $h(q)$ 、 $\tau(q)$ 、 α 和 $f(\alpha)$ 计算结果的均方根误差均小于 MFDFA 方法的对应值,且受数据量大小的影响也较小,表明了 FI-MFDFA 方法要明显优于 MFDFA 方法,还能避免多项式拟合阶数的变化对多重参数计算结果的影响,为进一步应用该方法研究实际数据的多重分形特征提供了理论支持。该方法对二维和高维数据的应用有待进一步研究。

参考文献:

- [1] Mandelbrot B. The fractal geometry of nature[M]. New York:W. H. Freeman and Company, 1983.
- [2] Cao G X, He L Y, Cao J. Multifractal detrended analysis method and its application in financial markets[M]. Singapore: Springer, 2018.
- [3] Kantelhardt J W, Zschiegner S A, Koscielny-Bunde E, et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2002, 316(1):87-114.
- [4] 奚彩萍,张淑宁,熊刚,等. 多重分形降趋势波动分析法和移动平均法的分形谱算法对比分析[J]. 物理学报, 2015, 64(13):335-348.
- [5] Serrano E, Figliola A. Wavelet Leaders: A new method to estimate the multifractal singularity spectra[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2009, 388(14):2793-2805.
- [6] Wang Z L, Chang J, Zhang S S, et al. Application of wavelet transform modulus maxima in raman distributed temperature sensors[J]. Photonic Sensors, 2014, 4(2):142-146.
- [7] 张淑清,张赆,刘海涛,等. 多重分形去趋势波动分析及改进决策树在电能质量分析中的应用[J]. 计量学报, 2021, 42(4):424-431.
- [8] Cristina-Maria P, Bogdan-Radu N. An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension [J]. Chaos, Solitons and Fractals: The Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena, 2020, 139:110073.
- [9] Chatterjee S, Ghosh D. Impact of global warming on SENSEX fluctuations – A study based on multifractal detrended cross correlation analysis between the temperature anomalies and the SENSEX fluctuations[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2021, 571:125815.
- [10] Gómez-Gómez J, Carmona-Cabezas R, Ariza-Villaverde A B, et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of temperature in Spain (1960–2019)[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2021, 578: 126118.
- [11] Michael F B. Fractal functions and interpolation[J]. Constructive Approximation, 1986, 2(1):303-329.
- [12] 孙洪泉. 分形几何与分形插值[M]. 北京:科学出版社, 2011.

【责任编辑:周 全】