第21卷　第1期　　广州大学学报(自然科学版)　　Vol. 21　No. 1
2022年　3月　　Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)　　Mar.　2022

文章编号:1671-4229(2022)01-0047-06

二维不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程的整体弱解的存在性

申会玲

(广州大学 数学与信息科学学院,广东 广州　510006)

摘　要: 运用 Faedo-Galerkin 方法构造二维不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程的近似解,再对近似解做一致有界估计,最后根据 Aubin-Lions 引理等紧性理论证明弱解的存在性。

关键词: 不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程; 弱解; 存在性

中图分类号: O 175.29　　　**文献标志码:** A

Global existence of the weak solution to the incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch equations in 2-dimension

SHEN Hui-ling

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The Faedo-Galerkin method is used to construct the approximate solution of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch equation, and the uniformly bounded estimation of the approximate solution is made. Finally, the existence of the weak solution is proved according to the Aubin-Lions lemma isocompactness theory.

Key words: incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch equations; weak solution; existence

0　引　言

本文研究不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程:

$$\partial_t\rho + div(\rho u) = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho u) + div(\rho u\otimes u) + \nabla p = \mu\Delta u - \lambda\nabla\cdot(\nabla d\odot\nabla d) \tag{2}$$

$$\partial_t d + u\cdot\nabla d + \alpha_1 d\times\Delta d = \alpha_2\Delta d - \alpha_3(1+|d|^2)d \tag{3}$$

$$divu = 0 \tag{4}$$

其中,$(x,t)\in\Omega\times(0,T)$,$\Omega=\{x=(x_1,x_2)\,|\,|x_i|<D(i=1,2)\}$表示二维周期域;$\rho$ 和 u 分别代表流体的密度和速度场;p 是压强函数; $d(x,t):\Omega\to S^2$,表示在 R^3 的单位球上的磁化场;μ, λ, α_1, α_2, α_3 是常数,其中 μ, λ, α_2, $\alpha_3>0$, $\alpha_1<0$;运算符号 ∇是梯度算子;$\nabla\cdot$ 是散度算子;$\nabla d\odot\nabla d$ 是一个 2×2 阶矩阵$\nabla_i d\cdot\nabla_j d(1\leqslant i, j\leqslant2)$。

其初始条件:

$$(\rho,u,d)|_{t=0}=(\rho_0,u_0,d_0) \tag{5}$$

在式(1)~(4)中,若 d 是常向量,则原方程是一个常粘性非齐次不可压 Navier-Stokes 方程。现在对于一般的 Navier-Stokes 方程组的研究相对成熟,Lions[1]对不可压 Navier-Stokes 方程组作了比较系统性的研究,对可压缩的 Navier-Stokes 方程组的研究主要见 Lions[2] 和 Feireisl 等[3-4]。但是

作者简介: 申会玲(1995—),女,硕士研究生. E-mail:1184608149@qq.com

引文格式: 申会玲. 二维不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程的整体弱解的存在性[J]. 广州大学学报(自然科学版),2022,21(1):47-52.

对于三维 Navier-Stokes 方程组的弱解的正则性和唯一性问题至今仍未解决。

若取式(1)~(4)中 $u=0$,ρ 是一个常数,并且如果式(3)中 $\alpha_2\Delta d-\alpha_3(1+|d|^2)d$ 项是 $d\times(d\times\Delta d)$,则式(1)~(4)变为 Landau-Lifshitz 方程[5-6]

$$\partial_t d=d\times\Delta d-\lambda d\times(d\times\Delta d) \tag{6}$$

式(6)无耗散项时为

$$\partial_t d=d\times\Delta d \tag{7}$$

对于式(7),Alouges 等[7]和 Sulem 等[8]讨论了在一定条件下该方程的弱解的存在性及唯一性问题;郭柏灵等[6]、Zhou 等[9-11]和 You 等[12]证明了在一维情况下的整体弱解的存在性、非线性初边值问题整体弱解的存在性,及多维情况下整体弱解的存在性。对于式(6)的解的存在性问题,Guo 等[13]在1997年已经讨论,在文中证明了式(6)局部弱解的存在性,又通过拓展得到整体解的存在性。

当不考虑速度和密度时,式(1)~(4)就是 Landau-Lifshitz-Bloch 方程[14-15]

$$\partial_t d=\Delta d+d\times\Delta d-\lambda|d|^2 d,$$

对此方程的研究近年有显著进展:2016年 Le[16]证明了方程弱解的存在性,并讨论了弱解的正则性;2019年 Ayouch 等[17]讨论了一类含 Caputo 分数阶弱导数的时空 Landau-Lifshitz-Bloch 方程弱解的整体存在性并推导出在一维空间情况下的唯一性;近两年 Jia 和 Guo 等[18-20]研究了 m 维闭黎曼流形上的 Landau-Lifshitz-Bloch 方程局部解的存在性、一维可压缩 Landau-Lifshitz-Bloch 方程初值问题的整体光滑解的存在唯一性、具有周期初始值的 Landau-Lifshitz-Bloch 方程在二维和三维空间中其光滑解的存在唯一性。

本文参考 Wang 等[21]证明二维 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz 方程弱解的存在性的 Feado-Galerkin 方法,研究二维不可压 Navier-Stokes-Landau-Lifshitz-Bloch 方程的整体弱解的存在性。

下面给出本文的主要结果:

定理 1(存在性) 假设初始数据满足以下条件:

$$0<\underline{\rho}\leqslant\rho_0\leqslant\bar{\rho}<\infty \tag{8}$$

$$u_0\in L^2(\Omega),\ \nabla d_0\in L^2(\Omega),\ divu_0=0 \tag{9}$$

则对任意的 $T>0$,式(1)~(4)存在弱解(ρ,u,d)且满足:

$$0<\underline{\rho}\leqslant\rho\leqslant\bar{\rho}<\infty \tag{10}$$

$$u\in L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2([0,T];H^1(\Omega)) \tag{11}$$

$$d\in L^\infty([0,T];H^1(\Omega))\cap L^2([0,T];H^2(\Omega)) \tag{12}$$

1 预备知识

在这里先给出一些符号表示。在本文中 C 是变常数;$W^{k,p}$ 和 H^s 是 Sobolev 空间,$L^p([0,T];L^q(\Omega))$是带有时间的 Sobolev 空间,其中的元素关于时间变量 p 次可积,关于空间变量 q 次可积。

引理 1(Gagliardo-Nirenberg 不等式)[22] 假设 $\Omega\subset R^d(d\geqslant1)$是一个有界开集,且满足$\partial\Omega\in C^{0,1}$,$m\in N$,$1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$,那么存在常数 $C>0$ 使得$\forall u\in W^{m,p}(\Omega)\cap L^q(\Omega)$有

$$\|D^\alpha u\|_{L^r(\Omega)}\leqslant C\|u\|^{\theta}_{W^{m,p}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)},$$

其中,$0\leqslant|\alpha|\leqslant m-1$,$\theta=|\alpha|/m$ 且 $|\alpha|-d/r=\theta(m-d/p)-(1-\theta)d/q$;若 $m=|\alpha|-d/p\notin N_0$,$\theta\in[|\alpha|/m,1]$上述不等式也成立。

引理 2(Sobolev 嵌入定理)[23] Sobolev 空间 $W^{k,p}(R^n)$,若 $k>l$ 且 $1\leqslant p<q<\infty$ 满足$(k-l)p<n$ 和 $1/q=1/p-(k-l)/n$,则

$$W^{k,p}(R^n)\subseteq W^{l,q}(R^n)$$

并且此嵌入连续。在 $k=1$ 且 $l=0$ 的特殊情况下有

$$W^{1,p}(R^n)\subseteq L^{p^*}(R^n),$$

其中,p 与 p^* 是 Sobolev 共轭:$1/p^*=1/p-1/n$.

特别地,由引理1与引理2有下列不等式在 $n=2$ 的情况下成立,且将在下节中用到:

若 $u\in L^2(\Omega)$且$\nabla u\in L^2(\Omega)$,则有

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}\leqslant C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \tag{13}$$

引理 3(Aubin-Lions 引理)[24] 假设 Banach 空间 X,Y,Z 满足 $X\subset Y\subset Z$ 并且 $X\to\to Y$,则有

$$L^q([0,T];X)\cap\{\varphi:\partial_t\varphi\in L^1([0,T];Z)\}\to\to L^q([0,T];Y),\ \forall 1\leqslant q\leqslant\infty,$$

$$L^\infty([0,T];X)\cap\{\varphi:\partial_t\varphi\in L^r([0,T];Z)\}\to\to C([0,T];Y),\ \forall 1\leqslant r\leqslant\infty\text{。}$$

2 存在性证明

在本节中通过构造逼近解,说明了其局部存在性,又对逼近解做一致整体的线性估计,从而证

明弱解的整体存在性。

首先构造一个逼近解序列：

令

$$H = \{g \in C_0^\infty(\Omega), \nabla \cdot g = 0 \text{ 在 } L^2 \text{ 中的闭包}$$

$$V = \{h \in L^2\} \tag{14}$$

令 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ 是下列方程的特征函数：

$$-\Delta w = \lambda_j w,$$

$\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset V$ 是下列方程的特征函数：

$$-\Delta \eta = \delta_j \eta,$$

其中，$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots; 0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \cdots$；$\phi_j$ 和 ψ_j 是 H 与 V 的正交基：$\int_\Omega \phi_i \cdot \phi_j \mathrm{d}x = 0 (i \neq j)$，$\int_\Omega \psi_i \cdot \psi_j \mathrm{d}x = 0 (i \neq j)$。

对于 $\forall m,n$，式(1)~(4)有近似解 u_{mn} 和 d_{mn}：

$$u_{mn} = \sum_{j=i}^{m} g_{jm}(t)\phi_j \tag{15}$$

$$d_{mn} = \sum_{j=i}^{n} h_{jn}(t)\psi_j \tag{16}$$

那么就有

$$\partial_t \rho_{mn} + u_{mn} \cdot \nabla \rho_{mn} = 0 \tag{17}$$

$$\int_\Omega \rho_{mn} u'_{mn} \cdot \phi_j \mathrm{d}x + \mu \int_\Omega \nabla u_{mn} \cdot \nabla \phi_j \mathrm{d}x + \int_\Omega (\rho_{mn} u_{mn} \cdot \nabla) u_{mn} \cdot \phi_j \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \nabla d_{mn} \odot \nabla d_{mn} : \nabla \phi_j \mathrm{d}x \tag{18}$$

$$\int_\Omega d'_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x + \int_\Omega u_{mn} \cdot \nabla d_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x + \alpha_1 \int_\Omega (d_{mn} \times \Delta d_{mn}) \cdot \psi_j \mathrm{d}x + \alpha_2 \int_\Omega \nabla d_{mn} \cdot \nabla \psi_j \mathrm{d}x + \alpha_3 \int_\Omega d_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x + \alpha_3 \int_\Omega |d_{mn}|^2 d_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x = 0 \tag{19}$$

$$\rho_{mn}(x,0) = \rho_{0mn}(x), u_{mn}(x,0) = u_{0mn}(x), d_{mn}(x,0) = d_{0mn}(x) \tag{20}$$

其中，$j = 1,2,\cdots m$。式(17)~(20)是关于 g_{jmn} 和 h_{jmn} 的常微分系统，根据常微分方程组存在性理论可以得到 $\exists T_0 > 0$，使得常微分系统式(17)~(20)有光滑解 (g_{jmn}, h_{jmn})，并且可以将解延拓到区间 $[0,T]$。

下面对上述的逼近解进行先验估计。

引理4　假设定理1的条件成立，则式(17)~(20)的解满足如下估计：

$$0 < \underline{\rho} \leqslant \rho_{mn} \leqslant \bar{\rho} < \infty \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho_{mn}|u_{mn}|^2 + \lambda|\nabla d_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \mu \int_\Omega |\nabla u_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \alpha_2 \int_\Omega |\nabla d_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \lambda\alpha_3 \int_\Omega |\nabla d_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \lambda\alpha_3 \int_\Omega |d_{mn}|^2 |\nabla d_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\lambda\alpha_3 \int_\Omega |\nabla|d_{mn}|^2|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{22}$$

证明　根据式(17)由特征线法易证得式(21)，现证式(22)。

在式(18)中选取 u_{mn} 为测试函数

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho_{mn}|u_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \mu \int_\Omega |\nabla u_{mn}|^2 \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega (\nabla d_{mn} \odot \nabla d_{mn}) : \nabla u_{mn} \mathrm{d}x \tag{23}$$

在此用到由式(17)得到的一个事实

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho_{mn}|u_{mn}|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \rho_{mn} u'_{mn} \cdot u_{mn} + (\rho_{mn} u_{mn} \cdot \nabla u_{mn}) \cdot u_{mn} \mathrm{d}x。$$

类似地，式(19)中选取 Δd_{mn} 为测试函数

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla d_{mn}|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega u_{mn} \cdot \nabla d_{mn} \cdot \nabla d_{mn} \mathrm{d}x + \int_\Omega \alpha_2 |\nabla d_{mn}|^2 + \alpha_3 |\nabla d_{mn}|^2 + \alpha_3 |d_{mn}|^2 |\nabla d_{mn}|^2 + \frac{1}{2}\alpha_3 |\nabla|d_{mn}|^2|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{24}$$

其中，$\int_\Omega (d_{mn} \times \Delta d_{mn}) \cdot \Delta d_{mn} \mathrm{d}x = 0$。

同时又注意到，通过分部积分有

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \cdot \nabla d \cdot d \mathrm{d}x &= \sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega u_i \partial_i d_k \partial_j \partial_j \mathrm{d}x = \\ &- \sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int_\Omega \partial_j u_i \partial_i d_k \partial_j d_k + u_i \partial_j \partial_i d_k \partial_j d_k \mathrm{d}x = \\ &- \int_\Omega \nabla d \odot \nabla d : \nabla u \mathrm{d}x + \\ &\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega \partial_i u_i \frac{1}{2}(\partial_j d_k)^2 \mathrm{d}x = \\ &- \int_\Omega \nabla d \odot \nabla d : \nabla u \mathrm{d}x。\end{aligned}$$

式(23)~(24)的 λ 倍相加得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_{mn}|u_{mn}|^2 + \lambda|\nabla d\|_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \mu\int_\Omega |\nabla u_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \alpha_2 \int_\Omega |\Delta d_{mn}|^2 \mathrm{d}x + \lambda\alpha_3 \int_\Omega |\nabla d_{mn}|^2 \mathrm{d}x +$$

$$\lambda\alpha_3\int_\Omega |d_{mn}|^2|\nabla d_{mn}|^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\lambda\alpha_3\int_\Omega |\nabla|d_{mn}|^2|^2\mathrm{d}x=0 \tag{25}$$

根据引理4,用Gronwall不等式易得下列推论。

推论1 下列不等式成立

$$\|u_{mn}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}+\|u_{mn}\|_{L^2([0,T];H^1(\Omega))}\leqslant C \tag{26}$$

$$\|d_{mn}\|_{L^\infty([0,T];H^1(\Omega))}+\|d_{mn}\|_{L^2([0,T];H^2(\Omega))}\leqslant C \tag{27}$$

引理5 下列估计成立

$$\|\partial_t u_{mn}\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))}\leqslant C \tag{28}$$

证明 由式(18)、式(13)和分部积分可得

$$\left|\underline{\rho}\int_0^T\int_\Omega u'_{mn}\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\rho_{mn}u'_{mn}\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$|\mu|\ \|\nabla u_{mn}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}\|\nabla\phi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}+$$
$$c\|u_{mn}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\|\nabla u_{mn}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}$$
$$\|\nabla\phi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}+c\|\nabla d_{mn}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}$$
$$\|\Delta d_{mn}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}\|\nabla\phi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))},$$

即$\|\partial_t u_{mn}\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))}\leqslant C$得证。

引理6

$$\|\partial_t d_{mn}\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))}\leqslant C \tag{29}$$

证明 由式(19)知

$$\left|\int_0^T\int_\Omega d'_{mn}\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\left|\int_0^T\int_\Omega(u_{mn}\cdot\nabla d_{mn})\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+$$

$$|\alpha_1|\left|\int_0^T\int_\Omega(d_{mn}\times\Delta d_{mn})\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+$$

$$|\alpha_2|\left|\int_0^T\int_\Omega\nabla d_{mn}\cdot\nabla\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+$$

$$|\alpha_3|\left|\int_0^T\int_\Omega d_{mn}\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+$$

$$|\alpha_3|\left|\int_0^T\int_\Omega|d_{mn}|^2d_{mn}\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|。$$

通过分部积分可得

$$\int_\Omega(d\times\Delta d)\cdot\psi_j\mathrm{d}x=-\int_\Omega(d\times\nabla d):\nabla\psi_j\mathrm{d}x,$$

因此,

$$\left|\int_0^T\int_\Omega d'_{mn}\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\|u_{mn}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\|d_{mn}\|_{L^2([0,T];L^\infty(\Omega))}$$
$$\|\nabla\psi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}+$$
$$|\alpha_1|\ \|d_{mn}\|_{L^2([0,T];L^\infty(\Omega))}\|\nabla d_{mn}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}$$
$$\|\nabla\psi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}+|\alpha_2|\ \|\nabla d_{mn}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}$$
$$\|\nabla\psi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}+$$
$$|\alpha_3|\ \|d_{mn}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}\|\psi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}+$$
$$|\alpha_3|\ \|d_{mn}\|^2_{L^\infty([0,T];L^4(\Omega))}\|d_{mn}\|_{L^2([0,T];L^\infty(\Omega))}$$
$$\|\psi_j\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}。$$

由Sobolev嵌入易得

$$\|\partial_t d_{mn}\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))}\leqslant C。$$

上述所有估计的界与m和n无关,根据Sobolev嵌入定理和Aubin-Lions引理知可选择$(\rho_{mn},u_{mn},d_{mn})$的子序列(仍记为$(\rho_{mn},u_{mn},d_{mn})$),使得当$m\to\infty$或$n\to\infty$时

$$u_{mn}\rightharpoonup u,\text{弱收敛,在}L^2([0,T];H^1(\Omega))\text{中} \tag{30}$$

$$u_{mn}\rightharpoonup u,\text{弱}*\text{收敛,在}L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\text{中} \tag{31}$$

$$u_{mn}\to u,\text{强收敛,在}L^2([0,T];L^2(\Omega))\text{中} \tag{32}$$

$$u_{mn}\to u,\text{几乎处处收敛,在}L^2([0,T];L^2(\Omega))\text{中} \tag{33}$$

类似可得

$$d_{mn}\to d,\text{弱收敛,在}L^2([0,T];H^2(\Omega))\text{中} \tag{34}$$

$$d_{mn}\to d,\text{弱}*\text{收敛,在}L^\infty([0,T];H^1(\Omega))\text{中} \tag{35}$$

$$d_{mn}\to d,\text{强收敛,在}L^2([0,T];H^1(\Omega))\text{中} \tag{36}$$

$$d_{mn}\to d,\text{几乎处处收敛,在}L^2([0,T];H^1(\Omega))\text{中} \tag{37}$$

由上述收敛,易得下列收敛

$$\int_0^T\int_\Omega\rho_{mn}u'_{mn}\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\rightharpoonup\int_0^T\int_\Omega\rho u_t\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{38}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla u_{mn}\cdot\nabla\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\rightharpoonup\int_0^T\int_\Omega\nabla u\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{39}$$

$$\int_0^T\int_\Omega d'_{mn}\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\rightharpoonup\int_0^T\int_\Omega d_t\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{40}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla d_{mn}\cdot\nabla\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\rightharpoonup\int_0^T\int_\Omega\nabla d\cdot\nabla\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{41}$$

$$\int_0^T\int_\Omega d_{mn}\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\rightharpoonup\int_0^T\int_\Omega d\cdot\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{42}$$

接下来考虑其余非线性项:

对于$\int_0^T\int_\Omega(\rho_{mn}u_{mn}\cdot\nabla)u_{mn}\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t$这一项,因为在$L^2([0,T];L^2(\Omega))$中,$u_{mn}\to u$,强收敛且几乎处处收敛,且在$L^2([0,T];H^1(\Omega))$中,$u_{mn}\rightharpoonup u$,据弱收敛引理有下列收敛

$$\int_0^T\int_\Omega(\rho_{mn}u_{mn}\cdot\nabla)u_{mn}\cdot\phi j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\rightharpoonup$$
$$\int_0^T\int_\Omega(\rho u\cdot\nabla)u\cdot\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{43}$$

类似地有

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla d_{mn} \odot \nabla d_{mn} : \nabla\phi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \rightharpoonup \int_0^T\int_\Omega \nabla d \odot \nabla d : \nabla\phi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{44}$$

对于项 $\int_0^T\int_\Omega u_{mn} \cdot \nabla d_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t$,

$$\int_0^T\int_\Omega (u_{mn} \cdot \nabla d_{mn} - u \cdot \nabla d) \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega (u_{mn} \cdot \nabla d_{mn} - u_{mn} \cdot \nabla d + u_{mn} \cdot \nabla d - u \cdot \nabla d) \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega u_{mn} (\nabla d_{mn} - \nabla d) \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega (u_{mn} - u) \nabla d \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t = I_1 + I_2。$$

在 $m\to\infty$ 或 $n\to\infty$ 时,$|I_1|\to 0$,$|I_2|\to 0$,即

$$\int_0^T\int_\Omega u_{mn} \cdot \nabla d_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \rightharpoonup \int_0^T\int_\Omega u \cdot \nabla d \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{45}$$

类似可得

$$\int_0^T\int_\Omega | d_{mn} |^2 d_{mn} \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \rightharpoonup \int_0^T\int_\Omega | d |^2 d \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{46}$$

$$\int_0^T\int_\Omega (d_{mn} \times \Delta d_{mn}) \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \rightharpoonup \int_0^T\int_\Omega (d \times \Delta d) \cdot \psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{47}$$

因为 ϕ_j 和 ψ_j 是单位正交基,所以对 $\forall \phi \in H$, $\psi \in V$, $\phi(\cdot, T) = \psi(\cdot, T) = 0$,下式成立

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\partial_t u \cdot \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \mu\int_0^T\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega (\rho u \cdot \nabla) u \cdot \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla d \odot \nabla d : \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{48}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \partial_t d \cdot \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega u \cdot \nabla d \cdot \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \alpha_1\int_0^T\int_\Omega (d \times \Delta d) \cdot \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \alpha_2\int_0^T\int_\Omega \nabla d \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \alpha_3\int_0^T\int_\Omega d \cdot \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \alpha_3\int_0^T\int_\Omega | d |^2 d \cdot \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{49}$$

至此,方程(1)~(4)的弱解的整体存在性证明完毕。

3　总结与展望

本文首先通过经典的 Faedo-Galerkin 方法构造出了方程的近似解,接着对近似解进行先验估计,得到与近似解相关的一致有界估计,最后由紧性理论有相应的收敛性,从而证明整体弱解的存在性。

本文只是该方程的解的适定性的初步研究,仅证明了该方程在二维空间上弱解的存在性,对于弱解的唯一性及正则性等适定性问题还没有做出相应的研究,而且关于更高维空间里的相应问题也是值得研究的。后续研究将继续致力于解决上述问题。

致谢　感谢广州大学数学与信息科学学院教师王光武、蒲学科对本论文的悉心指导。

参考文献:

[1] Lions P L. Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 1, Incompressible models[M]. New York: Oxford University Press, 1996.

[2] Lions P L. Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 2, Compressible models[M]. New York: Oxford University Press, 1998.

[3] Feireisl E. Dynamics of viscous compressible fluids[M]. New York: Oxford University Press, 2004.

[4] Feireisl E, Novotny A, Petzeltová H. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2001, 3(4): 358-392.

[5] Guo B L. Landau-Lifshitz equations[M]. Singapore: World Scientific, 2008.

[6] 郭柏灵,丁时进. 自旋波与铁磁链方程[M]. 杭州:浙江科学技术出版社, 2000.

[7] Alouges F, Soyeur A. On global weak soutions for Landau-lifshitz equations: Existence and non-uniqueness[J]. Nonlinear Analysis, 1992, 18: 1071-1084.

[8] Sulem P L, Sulem C, Bardos C. On the continuous limit for a system of classical spins[J]. Communications in Mathematical Physics, 1986, 107(3): 431-454.

[9] Zhou Y L, Guo B L. The weak solution of homogeneous boundary value problem for the system of ferromagnetic chain with several variable[J]. Sciential Sinica A, 1986, 4: 337-349.

[10] Zhou Y L, Guo B L. Existence of weak solution for boundary problems of ferromagnetic chain[J]. Sciential Sinica A, 1984, 27(6): 799-811.

[11] Zhou Y L, Guo B L. Some boundary problem of the spin system and the system of ferromagnetic chain I: Nonlinear boundary problem[J]. Acta Mathematica Scientia, 1986, 6(3): 321-337.

[12] You S J, Guo B L. Global well-posedness for highe-order Landau-Lifshitz equation[J]. Journal of Geometry and Physics, 2021, 160(6): 103966.

[13] Guo B L, Wang B X. Global existence of the solution for the Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain[J]. Acta Mathematica Scientia, 1997, 17(4): 429-436.

[14] Garanin D A. Generalized equation of motion for a ferromagnet[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1991, 172: 470-491.

[15] Garanin D A, Ishchenko V V, Panina L V. Dynamics of an ensemble of single-domain magnetic particles[J]. Theoretical and Mathematical Physis, 1990, 82: 169-179.

[16] Le K N. Weak solutions of the Landau-Lifshitz-Bloch equation[J]. Journal of Differential Equations, 2016, 261(12): 6699-6717.

[17] Ayouch C, Essoufi E H, Tilioua M. Global weak solutions to a spatio-temporal fractional Landau-Lifshitz-Bloch equation [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 77(5): 1347-1357.

[18] Jia Z L, Guo B L. Landau-Lifshitz-Bloch equation on Riemannian manifold[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2019, 14(1): 45-76.

[19] Guo B L, Li F F. Global smooth solution for the compressible Landau-lifshitz-Bloch equation[J]. The Journal of Applied Analysis and Computation, 2019, 9(6): 2454-2463.

[20] Wang Y F, Guo B L, Zeng M. On the smooth solutions of Landau-lifshitz-Bloch equantions of antiferromagnets[J]. Communicattions in Mathematical Sciences, 2020, 18(3): 837-849.

[21] Wang G W, Guo B L. Existence and uniqueness of the weak solution to the incompressible Navier-Stokes-Landau-Lifshitz model in 2-dimension[J]. Acta Mathematical Scientia, 2017, 37B(5): 1361-1372.

[22] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations[J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Class di Scienze, 1959, 13(2): 115-162.

[23] Adams R A, Fournier J F. Sobolev spaces[M]. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2003.

[24] Simon J. Compact sets in space $L^p(0,T;B)$[J]. Annali di Mathematica Puraed Applicata, 1978, 146: 65-96.

【责任编辑: 周 全】