文章编号:1671-4229(2022)01-0053-06

在 S^2 局部坐标下的二维不可压 Naiver-Stokes 方程

李小如，王　术，耿　范*
(广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州　510006)

摘　要：考虑 S^2 局部坐标系下的二维不可压 Naiver-Stokes 方程的表达式及其在 S^2_+ 局部坐标系下解满足的能量等式。利用黎曼度量，结合流形上的几个微分算子，推导在 S^2 局部坐标下的 Naiver-Stokes 方程的具体表达式，并结合二维不可压 Naiver-Stokes 方程在 R^2 中的能量守恒得到了在 S^2_+ 中的能量等式。

关键词：黎曼度量；S^2；S^2_+；局部坐标；Naiver-Stokes 方程；能量等式
中图分类号：O 351. 1　　　**文献标志码**：A

Two-dimensional incompressible Naiver-Stokes equations in local coordinates of S^2

LI Xiao-ru, *WANG Shu*, *GENG Fan*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The expression of the two-dimensional incompressible Naiver-Stokes equation in the local coordinate system of S^2 and the energy equation satisfied by the solution in the local coordinate system of S^2_+ are considered. By using the Riemannian metric and combining several differential operators on the manifold, the specific expression of the Naiver-Stokes equation in the local coordinate system is derived, and the energy equation on S^2_+ is obtained by combining the energy conservation of the two-dimensional incompressible Naiver-Stokes equation in R^2.

Key words: Riemannian metric; S^2; S^2_+; local coordinates; Naiver-Stokes equation; energy identity

0　引　言

Naiver-Stokes 方程组是流体力学方程组中的典型代表，在物理工程学、等离子物理、半导体物理、航空航天、空气动力学、血液动力学和科学计算等诸多领域都有着广泛的应用。它可以对气流、大气洋流、管道中的流体血液等各种各样的液体流动进行建模。对简化或者具体表达形式的 Naiver-Stokes 方程组的研究，可以更好地应用于天气预测、防止环境污染、提高各种交通工具的性能和在医疗上辅助治疗心血管疾病等[1]。

在 R^3 中有如下形式的 Naiver-Stokes 方程组：

$$\begin{cases}\partial_t u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=\mu\Delta u,\\ \nabla\cdot u=0,\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{1}$$

式中，$u(x,t)$ 表示未知的速度场，$p(x,t)$ 表示未知的压力，$u_0(x)$ 表示给定的初始速度场，且在分布的意义下满足 $\nabla\cdot u_0=0$，μ 是粘性系数。

至今，其数学理论的研究备受关注，它是国际数学界长期关注的焦点问题之一。迄今为止，在三维情况下，虽然已经有很多重要的结果，但

作者简介：李小如(1995—)，女，硕士研究生．E-mail：lixiaoru@e. gzhu. edu. cn
*通信作者．E-mail：gengfan@e. gzhu. edu. cn

引文格式：李小如，王术，耿范．在 S^2 局部坐标下的二维不可压 Naiver-Stokes 方程．[J]．广州大学学报(自然科学版)，2022，21(1)：53-58.

是方程组(1)的 Leray-Hopf 整体弱解的正则性仍不清楚，目前仍然是流体力学理论中的公开问题，美国 Clay 数学研究所也在 2000 年把三维不可压缩 Naiver-Stokes 方程具有有限能量光滑初值整体正则解的存在性或在有限时间内爆破列为 7 个“千禧问题”之一。近些年来，有越来越多的研究者研究曲线坐标系下的 Naiver-Stokes 方程组的一些性质及其弱解的估计或全局解等相关内容，也取得了重大的进展[1-4]。

随着数学的发展，以及它的应用范围的扩大，所考虑的坐标不再局限于直角坐标，所考虑的空间也不再局限于欧式空间。在曲线坐标系中，常用的有球坐标、极坐标和柱坐标等[3-5]。采用这些坐标把许多方程的具体形式表示出来，从而有助于求出方程(组)的解。虽然，Naiver-Stokes 方程无一般的精确解法，但是，对于一些物理现象简单的流体流动问题能够获得 Naiver-Stokes 方程的精确解。在文献[4]中，利用球坐标表示出 Naiver-Stokes 方程的具体形式，并对方程的一些物理量进行理想化，从而求出方程的古典解。故写出 Naiver-Stokes 方程在某些空间中的具体表达式可进一步开展深入的研究。而本文的目的在于将欧氏空间的微分算子推广到流形当中，并推导在二维流形 S^2 局部坐标下 Naiver-Stokes 方程组的具体表达式及在 S^2_+ 上的能量等式。

1 二维流形 S^2 上的 Naiver-Stokes 方程

数学的发展促使微积分从欧氏空间到微分流形的拓展，而欧氏空间是最简单的光滑流形，它的微分算子在局部坐标下的表达式可适用于一般的黎曼流形。为了计算简便，考虑低维流形即二维流形 S^2 在局部坐标下的微分算子。

首先在 S^2 上建立坐标系，即建立球面和平面或平面一部分的一个对应。由于球面具有紧致性，而平面是非紧致的，则这样整体的坐标系是不存在的，故考虑局部坐标。然后利用局部坐标分别表示出二维流形 S^2 上的梯度算子、散度算子以及拉普拉斯算子，进而写出 Naiver-Stokes 方程组的具体形式。

R^3 中的单位曲面 $S^2(1)=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 是二维黎曼流形 (S^2,g)，则它的参数方程表示为

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\ y=\sin\theta\sin\varphi,\ z=\cos\theta \qquad (2)$$

其中，$0<\theta<\pi$，$0<\varphi<2\pi$，g 是黎曼度量。

命题 1 假设 $u(\theta,\varphi,t)$ 是二维 Naiver-Stokes 方程未知的速度场，则在 $u=u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi$ 时，在 S^2 局部坐标系下的 Naiver-Stokes 方程可以表示成如下形式：

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}-\frac{u_\varphi L}{\sin\theta}+\frac{\partial Q}{\partial\theta}=\mu\left(\Delta_s u_\theta-\frac{u_\theta}{\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+\frac{u_\theta L}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}=\mu\left(\Delta_s u_\varphi-\frac{u_\varphi}{\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0。$$

其中，

$$\Delta_s=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$L=\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\varphi)-\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},\ Q=P+\frac{1}{2}(u_\theta^2+u_\varphi^2)。$$

证明 证明分 3 个步骤。

(1)计算黎曼度量

通过 2 种方法引入黎曼度量 g，一种是球极投影引入黎曼度量(或者是通过欧氏空间诱导在球面上的度量)，另一种是曲面在局部坐标系下的第一基本形式，而这 2 种方法算出的黎曼度量是一致的。

方法 1：通过球极投影可以得到 $S^2(1)$ 的一个局部坐标覆盖。设 $N=(0,0,1)$，$S=(0,0,-1)$ 分别为 $S^2(1)$ 的北极和南极。下面只考虑其中一个，另一个同理。令 $U:=S^2(1)\setminus\{0,0,-1\}$，定义映射 $\varphi:U\to R^2$ 如下：

$$(\xi^1,\xi^2)=\varphi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right) \qquad (3)$$

不难看出

$$\xi^1=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{1+\cos\theta},\ \xi^2=\frac{\sin\theta\sin\varphi}{1+\cos\theta} \qquad (4)$$

考虑变量 θ，φ 的一阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\xi^1}\frac{\partial\xi^1}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\xi^1}\frac{\partial\xi^1}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial\varphi} \qquad (5)$$

其中，

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial\theta}=\frac{\cos\varphi}{1+\cos\theta},\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\theta},$$
$$\frac{\partial\xi^1}{\partial\varphi}=\frac{-\sin\theta\sin\varphi}{1+\cos\theta},\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\varphi}=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{1+\cos\theta}\tag{6}$$

若在局部坐标系$(U,\ \xi^i)$下，则 $S^2(1)$的黎曼度量 g 的表达式为

$$g=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\xi^j\tag{7}$$

其中，由黎曼度量的定义[6-7]可得分量 $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial\xi^i},\frac{\partial}{\partial\xi^j}\right)\in C^\infty(U)$，且 $g_{ij}=g_{ji}$。再结合式(2)、式(4)可得

$$g_{ij}=\frac{4\delta_{ij}}{\left(1+\sum_j(\xi^j)^2\right)^2}\tag{8}$$

其中，δ_{ij} 是张量中的一个基本符号，$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$，$(i,\ j=1,2,\cdots)$。

先将 ξ^1，ξ^2 代入式(8)，再结合式(6)可进一步计算出

$$g=\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varphi\tag{9}$$

则度量系数分别为

$$g_{11}=1,g_{12}=g_{21}=0,g_{22}=\sin^2\theta\tag{10}$$

故有 g 的反变分量 g^{ij}(即 g_{ij}的逆)为

$$g^{11}=1,\ g^{12}=g^{21}=0,\ g^{22}=\frac{1}{\sin^2\theta}\tag{11}$$

则度量系数的行列式为

$$G=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & \sin^2\theta\end{vmatrix}=\sin^2\theta,\sqrt{G}=\sin\theta\tag{12}$$

另外，包含映射 $i:S^2(1)\to R^3$ 是嵌入映射，自然也是浸入映射，则球面是浸入空间中的曲面，R^3 中的标准度量 h 在 $S^2(1)$上的限制 $g=i^*h$ 是 $S^2(1)$上的黎曼度量。

方法 2：通过考虑 R^3 中的正则曲面，利用曲面的第一基本形式。记

$$r=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)\tag{13}$$

(θ,φ)是 S^2 中的局部坐标，由方法 1 中的描述可知，r 是浸入 R^3 中的二维光滑子流形。

令

$$E=\langle\frac{\partial r}{\partial\theta},\ \frac{\partial r}{\partial\theta}\rangle,\ F=\langle\frac{\partial r}{\partial\theta},\ \frac{\partial r}{\partial\varphi}\rangle,\ O=\langle\frac{\partial r}{\partial\varphi},\ \frac{\partial r}{\partial\varphi}\rangle\tag{14}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示的是内积(即 S^2 上的一个对称、正定的二阶协变张量)。则 R^3 在该曲面上诱导度量是

$$\mathrm{d}s^2=\langle\mathrm{d}r,\mathrm{d}r\rangle=\langle\frac{\partial r}{\partial\theta},\ \frac{\partial r}{\partial\theta}\rangle(\mathrm{d}\theta)^2+$$
$$\langle\frac{\partial r}{\partial\theta},\ \frac{\partial r}{\partial\varphi}\rangle\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi+\langle\frac{\partial r}{\partial\varphi},\ \frac{\partial r}{\partial\varphi}\rangle(\mathrm{d}\varphi)^2=$$
$$E(\mathrm{d}\theta)^2+F\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi+O(\mathrm{d}\varphi)^2\tag{15}$$

由于

$$\frac{\partial r}{\partial\theta}=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)\tag{16}$$
$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}=(-\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi,0),$$

则将式(16)代入式(15)，有

$$E=1,\ F=0,\ O=\sin^2\theta,$$
$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\tag{17}$$

由 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$，故有度量系数分别为 $g_{11}=1$，$g_{12}=g_{21}=0,g_{22}=\sin^2\theta$ 且

$$G=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & \sin^2\theta\end{vmatrix}=\sin^2\theta,\sqrt{G}=\sin\theta\tag{18}$$

(2)计算单位正交切向量

下面是单位正交标架场的算法[7]，设$(U,\ \xi^i)$是 M 的一个局部坐标系，黎曼度量 g 在该坐标系下的分量为

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial\xi^i},\ \frac{\partial}{\partial\xi^j}\right)=\langle\frac{\partial}{\partial\xi^i},\ \frac{\partial}{\partial\xi^j}\rangle\tag{19}$$

其中，$\xi^1=\theta$，$\xi^2=\varphi$。

要得到定义在 U 上的单位正交标架场，只要将自然标架场$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}$作 Schmidt 正交化就行。令

$$e_\theta=\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right|}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\tag{20}$$

假设切向量 $a_1=\frac{\partial}{\partial\varphi}+\lambda e_\theta$ 垂直于 e_θ，则有

$$\langle a_1,\ e_\theta\rangle=0\tag{21}$$

由此可知

$$\lambda=-\langle\frac{\partial}{\partial\varphi},e_\theta\rangle=-\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\tag{22}$$

即得

$$a_1=\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{\partial}{\partial\theta}\tag{23}$$

将 a_1 单位化并记为 e_φ，则

$$e_\varphi=\frac{a_1}{|a_1|}=\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tag{24}$$

因此,e_θ, e_φ 是2个彼此正交的单位切向量,并且 $span\{e_\theta,e_\varphi\}=span\left\{\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}$。

(3)考虑流形上的3个微分算子[6-9],进而得到Naiver-Stokes方程组的具体表达式

$$\nabla f|_U=f_i g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i},\ f_i=\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{25}$$

$$divX=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}X^i),\ G=\det(g_{ij}) \tag{26}$$

$$\Delta f|_U=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \tag{27}$$

令 $u=u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi$,则对应的梯度算子、拉普拉斯算子及散度算子分别为

$$\nabla u|_{p\in U}=\frac{\partial u}{\partial x^i}g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^j}=\frac{\partial u}{\partial\theta}g^{11}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial\theta}g^{12}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}g^{21}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}g^{22}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\Delta u|_U=&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta g^{11}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta g^{12}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta g^{21}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta g^{22}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}divu=&\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{G}u^\theta)+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sqrt{G}u^\varphi)=\\&\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{u_\theta}{\sqrt{g_{11}}}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\frac{u_\varphi}{\sqrt{g_{22}}}\right)\right]=\\&\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right]\end{aligned} \tag{30}$$

这里应用了逆变分量 u^θ, u^φ 与物理分量 u_θ, u_φ 之间的关系。

结合式(28)~(29),可分别计算出 $u\cdot\nabla u$, Δu。

$$\begin{aligned}u\cdot\nabla u=&(u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}e_\varphi\right)(u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi)=\\&\left(u_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}u_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi)=\\&\left(u_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\frac{\cos\theta u_\varphi^2}{\sin\theta}\right)e_\theta+\\&\left(u_\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta u_\theta u_\varphi}{\sin\theta}+\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)e_\varphi\end{aligned} \tag{31}$$

这里可以对结果进行简化,记 $L=\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\varphi)-\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}$,则

$$\begin{aligned}u\cdot\nabla u=&\left(\frac{1}{2}\frac{\partial(u_\theta^2+u_\varphi^2)}{\partial\theta}-\frac{u_\varphi L}{\sin\theta}\right)e_\theta+\\&\left(\frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta^2+u_\varphi^2)}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta L}{\sin\theta}\right)e_\varphi\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\Delta u=&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi)\right)+\\&\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(u_\theta e_\theta+u_\varphi e_\varphi)=\\&\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\theta^2}\right)e_\theta+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\theta^2}\right)e_\varphi+\\&\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}e_\theta+u_\theta\frac{\partial e_\theta}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}e_\varphi+u_\varphi\frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi}\right)=\\&\left(\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\varphi^2}-\frac{u_\theta}{\sin^2\theta}-\right.\\&\left.\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)e_\theta+\left(\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\right.\\&\left.\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{u_\varphi}{\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)e_\varphi\end{aligned} \tag{33}$$

且压力的梯度与速度场对时间的偏导数分别记为

$$\nabla P=\frac{\partial P}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}e_\varphi,\ u_t=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}e_\theta+\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}e_\varphi \tag{34}$$

由上述表达式(32)~(34),可以得到在二维流形 S^2 局部坐标系表示的Naiver-Stokes方程如下:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_\theta}{\partial t}-\frac{u_\varphi L}{\sin\theta}+\frac{\partial Q}{\partial\theta}=\mu\left(\Delta_s u_\theta-\frac{u_\theta}{\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),\\&\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+\frac{u_\theta L}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}=\\&\qquad\mu\left(\Delta_s u_\varphi-\frac{u_\varphi}{\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right),\\&\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0\end{aligned} \tag{35}$$

其中,

$$\Delta_s=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{36}$$

$$L=\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\varphi)-\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},\ Q=P+\frac{1}{2}(u_\theta^2+u_\varphi^2) \tag{37}$$

命题证毕。

为进一步研究二维流形 S^2 局部坐标系表示的 Naiver-Stokes 方程，需考虑边界条件。R^3 中半径为 $r=1$ 的标准单位球面 $S^2(1)$ 是截曲率为 $c=1$ 的二维空间形式。$S^2(1)$ 是单连通且紧致的，因而又是完备的。

因为球面是二维封闭的曲面，但二维的封闭曲面是没有边界的，所以为了得到边界的条件，可以考虑球面的上半球面来进行研究，因为上半球面是一个有边界区域。

在 R^3 中考虑 $S^2(1)$ 球面的上半球面：

$S_+^2=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0\}$。

在 $z=0$ 的平面上，半球面的边界 ∂S_+^2 是圆 $x^2+y^2=1$。

从而，对于上半球面的参数方程可写成

$$\begin{cases} x=\sin\theta\cos\varphi, \\ y=\sin\theta\sin\varphi, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$$

其中，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\varphi\in(0,2\pi)$。

系统(35)的初始条件和边界条件可分别写成：

$(u_\theta,u_\varphi)(\theta,\varphi,t=0)=u_0, (\theta,\varphi)\in S_+^2$；

$(u_\theta,u_\varphi)\mid_{\partial S_+^2}=0,\ t\geqslant 0$。

并且 u_0 在 $\overline{S_+^2}$ 上具有紧支集。

2　能量等式验证

前面提到 $S_+^2\subset S^2$，S^2 是封闭的曲面，是没有边界的。而 S_+^2 是一个有边界的区域，故可考虑如下的 S_+^2 局部坐标系下的二维 Naiver-Stokes 方程的初边值问题的能量等式[10]：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_\theta\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{u_\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\dfrac{\cos\theta u_\varphi^2}{\sin\theta}+\dfrac{\partial P}{\partial\theta}= \\ \quad\mu\left(\Delta_s u_\theta-\dfrac{u_\theta}{\sin^2\theta}-\dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right), \\ \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_\theta\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\dfrac{\cos\theta u_\theta u_\varphi}{\sin\theta}+\dfrac{u_\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}= \\ \quad\mu\left(\Delta_s u_\varphi-\dfrac{u_\varphi}{\sin^2\theta}+\dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0, \\ (u_\theta,u_\varphi)(\theta,\varphi,t=0)=u_0, (\theta,\varphi)\in S_+^2, \\ (u_\theta,u_\varphi)\mid_{\partial S_+^2}=0,\ t\geqslant 0 \end{cases} \tag{38}$$

其中，$S_+^2\subset S^2$ 是有光滑边界 ∂S_+^2 的紧区域，且这里的算子

$$\Delta_s=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}。$$

结合笛卡尔坐标下二维 Naiver-Stokes 方程的能量等式的计算步骤：

首先根据 $u_t+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=\mu\Delta u$，将其与 u 作内积，并进行分部积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\mu\|\nabla u\|^2=0。$$

则对于任意的 $0\leqslant t\leqslant T$，有下述的能量等式：

$$\|u(t)\|^2+2\mu\int_0^t\|\nabla u\|^2\mathrm{d}x=\|u(0)\|^2,\ x\in\mathbf{R}^2。$$

进一步可写出 S_+^2 上的二维 Naiver-Stokes 方程的能量等式。

定理 1　上半球面 S_+^2 是 S^2 中的有界区域，那么对于任意的 $0\leqslant t\leqslant T$，S_+^2 局部坐标系下的二维 Naiver-Stokes 方程的解满足如下的能量等式：

$$\int_{S_+^2}\sin\theta(u_\theta^2+u_\varphi^2)\mathrm{d}\tau+2\mu\int_0^t\int_{S_+^2}\sin\theta\left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2\right]+\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{\sin\theta}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=E(0)。$$

其中，$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，

$$E(0)=\int_{S_+^2}\sin\theta[u_\theta^2(0)+u_\varphi^2(0)]\mathrm{d}\tau。$$

证明　先考虑式(38)中的第一个等式，让它与 $\sin\theta u_\theta$ 作内积，并用格林公式进行分部积分，则可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_+^2}\sin\theta u_\theta^2\mathrm{d}\tau-\int_{S_+^2}\cos\theta u_\varphi^2u_\theta\mathrm{d}\tau=-\mu\int_{S_+^2}\sin\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{u_\theta^2}{\sin\theta}-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}u_\varphi\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\mathrm{d}\tau \tag{39}$$

然后再考虑式(38)中的第二个等式，让它与 $\sin\theta u_\varphi$ 作内积，并用格林公式进行分部积分，则可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_+^2}\sin\theta u_\varphi^2\mathrm{d}\tau+\int_{S_+^2}\cos\theta u_\varphi^2u_\theta\mathrm{d}\tau=-\mu\int_{S_+^2}\sin\theta\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2+$$

$$\frac{u_\varphi^2}{\sin\theta}+\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}u_\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\mathrm{d}\tau \tag{40}$$

又因为不可压缩条件:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0 \tag{41}$$

将式(41)与 $\sin\theta u_\theta$ 作内积，则有

$$\int\sin\theta u_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)\mathrm{d}\tau+\int\sin\theta u_\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\mathrm{d}\tau=0,$$

再用格林公式进行分部积分，故可以得到

$$-\int\sin\theta u_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)\mathrm{d}\tau-\int\sin\theta u_\varphi\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\mathrm{d}\tau=0,$$

即有

$$-u_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)=u_\varphi\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} \tag{42}$$

将式(39)~(40)两个等式相加，并将式(41)~(42)代入其中，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_+^2}\sin\theta(u_\theta^2+u_\varphi^2)\mathrm{d}\tau+\mu\int_{S_+^2}\sin\theta\left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2\right]+\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{\sin\theta}\mathrm{d}\tau=0,$$

即

$$\int_{S_+^2}\sin\theta(u_\theta^2+u_\varphi^2)\mathrm{d}\tau+2\mu\int_0^t\int_{S_+^2}\sin\theta\left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2\right]+\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{\sin\theta}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=E(0),$$

其中，

$$E(0)=\int_{S_+^2}\sin\theta[u_\theta^2(0)+u_\varphi^2(0)]\mathrm{d}\tau。$$

即完成能量等式的证明。

3 结束语

Naiver-Stokes 方程在流体力学中具有重要的理论价值，本文主要是对几个微分算子从欧氏空间到流形的推广，并给出了详细的计算过程，进一步得到了 Naiver-Stokes 方程在 S^2 中局部坐标下的具体表达形式，这有利于对流体的局部形式进行了解，并可以进一步对 Naiver-Stokes 方程在流形上局部坐标下解的适定性进行分析，这对于研究方程的解具有重要的意义。因此，可以从这样的坐标系出发，突破更多有关于解的问题。

参考文献:

[1] 谢洪燕，李杰，贺方毅. 关于轴对称 Naiver-Stokes 方程正则性的一个注记[J]. 应用数学和力学，2017，38(3)：276-283.

[2] Wang S. The viscosity vanishing limit and global well-posedness of the three-dimensional incompressible Naiver-Stokes equations with smooth large initial data in spherical coordinates[J]. Applied Mathematics Letters，2020，103：106195.

[3] Geng F，Wang S，Wang Y X. The regularity criteria and the a priori estimate on the 3D incompressible Naiver-stokes equations in orthogonal curvilinear coordinate systems[J]. Journal of Function Spaces，2020(3)：1-9.

[4] 葛玉丽. 轴对称的不可压缩 Stokes 流动问题在球坐标系下的古典解[J]. 南阳师范学院学报，2015，14(9)：5-9，18.

[5] 谢树艺. 工程数学:矢量分析与场论[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2012.

[6] 陈维桓，李兴校. 黎曼几何引论(上册)[M]. 北京：北京大学出版社，2002.

[7] 箫树铁，陈维桓. 大学数学:流形上的微积分[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2003.

[8] 宗若. 张量分析[M]. 西安：西北工业大学出版社，2005.

[9] Temam R，Wang S H. Inertial forms of Navier-Stokes equations on the sphere[J]. Journal of Functional Analysis，1993，117(1)：215-242.

[10] 朱长江，邓引斌. 偏微分方程教程[M]. 北京：科学出版社，2005.

【责任编辑：周　全】