第22卷 第1期 广州大学学报(自然科学版) Vol. 22 No. 1
2023年 2月 Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition) Feb. 2023

文章编号:1671-4229(2023)01-0045-06

二维变量信息视角下的概率犹豫模糊集决策方法研究

朱国成[1],赵瑞华[2],陈利群[1*]
(1.广东创新科技职业学院 通识教育学院,广东 东莞 523960;2. 云安中学 生物组,广东 云浮 527500)

摘 要: 将概率犹豫模糊集中的隶属度与概率看作二维变量信息,在二维变量信息条件下研究概率犹豫模糊集多属性决策问题。首先,将概率犹豫模糊数书写形式改为点坐标形式,并在此形式下建立概率犹豫模糊元几何距离函数模型与离差程度系数模型;其次,属性的评价值为概率犹豫模糊元,在考虑其内部元素的离差程度与相互之间离差程度基础上,采用熵值法确定属性权重;再次,使用新定义的几何距离函数与离差程度系数函数计算由概率犹豫模糊元组成的属性值,得到属性的综合值,并利用 Maclaurin 对称平均算子对各方案属性的综合值进行集结,通过比较集结的方案属性综合值大小对各方案进行排序;最后用一个数值算例对本文方法进行验证分析,结果表明,该方法能够快速取得有效的排序结果。

关键词: 概率犹豫模糊集; 二维变量信息; 熵值法; Maclaurin 对称平均算子; 排序
中图分类号: O 159 **文献标志码:** A

Research on probabilistic hesitant fuzzy set decision making method from the perspective of two-dimensional variable information

ZHU Guo-cheng[1], *ZHAO Rui-hua*[2], *CHEN Li-qun*[1*]
(1. School of General Education, Guangdong Innovative Technical College, Dongguan 523960, China;
2. Biology Group, Yunan Middle School, Yunfu 527500, China)

Abstract: The membership degree and probability of probabilistic hesitant fuzzy sets are regarded as two-dimensional variable information. The multi-attribute decision making problem of probabilistic hesitant fuzzy sets is studied under the condition of two-dimensional variable information. Firstly, the writing form of the probabilistic hesitant fuzzy number is changed to the point coordinate form, and the geometric distance function model and the deviation degree coefficient model of the probabilistic hesitant fuzzy element are established in this form. Secondly, the evaluation value of the attribute is the probabilistic hesitant fuzzy element, and the entropy method is used to determine the weight of the attribute on the basis of considering the deviation degree of the internal elements in the probabilistic hesitant fuzzy element and the deviation degree of each element. Thirdly, the newly defined geometric distance function and deviation degree coefficient function are used to calculate the attribute values composed of probabilistic hesitant fuzzy elements, and the comprehensive value of the attribute is obtained. Maclaurin symmetric average operator is used to aggregate the comprehensive value of the attribute of each scheme, and the ranking of each scheme is conducted by comparing the comprehensive

收稿日期: 2021-07-20; **修回日期:** 2021-10-16
基金项目: 广东创新科技职业学院特色创新类重点资助项目(2022TSZD05)
作者简介: 朱国成(1986—),男,讲师. E-mail:569141518@qq.com
*通信作者. E-mail:1922178641@qq.com
引文格式:朱国成,赵瑞华,陈利群. 二维变量信息视角下的概率犹豫模糊集决策方法研究[J].广州大学学报(自然科学版),2023,22(1):45-50.

value of the aggregated scheme attribute. Finally, a numerical example is used to verify and analyze the proposed method, and the results show that the proposed method can quickly obtain effective sorting results.

Key words: probabilistic hesitant fuzzy set; two-dimensional variable information; entropy value method; Maclaurin symmetric average operator; sorting

概率犹豫模糊集(Probabilistic Hesitant Fuzzy Sets, PHFS)作为犹豫模糊集(Hesitant Fuzzy Sets, HFS)的概念推广(给予每个隶属度添加发生的可能性值也即概率),自朱斌[1]在其博士论文中定义以来,众多学者对该理论进行了深入研究并在多属性决策问题中得到了大量应用。目前研究的主要方向有:概率犹豫模糊集多属性决策中的属性权重计算方法[2]、概率犹豫模糊集属性信息数据的融合方法[3]、决策专家的权重确定方法[4]等。以上研究方法中,为了说明两个概率犹豫模糊集的贴近程度、概率犹豫模糊元(Probabilistic Hesitant Fuzzy Element, PHFE)的大小比较以及属性的概率犹豫模糊元的信息融合方法,都需要利用其得分函数与偏差函数[5]模型来完成中间数值转换,即将隶属度的信息数据和与之对应的概率信息数据进行直接相乘。事实上,隶属度与之概率是两个维度的信息,怎样将两个部分的信息进行科学高效的糅合是值得研究的课题。针对该问题,本文将隶属度与之概率看作二维的信息数据,并以点坐标形式进行书写,为了比较两个概率犹豫模糊元的大小,定义了概率犹豫模糊元的几何距离函数与离差程度系数函数,从二维平面中的距离角度出发来研究其大小比较问题,使用一种新的方法对概率犹豫模糊信息进行测度。考虑到Maclaurin对称平均算子不仅具有良好的数据比较性能,决策专家还可以根据实际决策需求灵活调整参数[6]对方案进行排序,鉴于此,本文对采用几何距离函数模型汇总的概率犹豫模糊元的信息数据使用Maclaurin对称平均算子集结,通过比较方案的综合属性值大小达到优选方案目的。文中数值算例及与其他文献方法对比可知,本文的决策方法是可行的。

1 基础知识

为了方便书写,下文中的概率犹豫模糊集简写为PHFS,概率犹豫模糊元简写为PHFE等。

定义 1[5] 设 X 为非空集合,形如 $H=\{<x,h_x(p_x)>|x\in X\}$ 的二元组称为 X 上的PHFS,将 $h(p)=h_x(p_x)=\{\gamma_l(p_l),l=1,2,\cdots,|h(p)|,\sum_{l=1}^{|h(p)|}p_l=1\}$ 称为PHFE,其中,γ_l 表示元素 x 属于集合 H 的隶属度,p_l 为隶属度 γ_l 发生的概率,$|h(p)|$ 表示PHFE $h(p)$ 中元素个数。

为了将概率犹豫模糊数(Probabilistic Hesitant Fuzzy Number, PHFN)中的隶属度 γ_l 与之概率 p_l 以二维变量形式体现,将其按照点坐标形式书写。

定义 2 H 为PHFS,其中的PHFE记为 $h(p)=\{(\gamma_l,p_l),l=1,2,\cdots,|h(p)|,\sum_{l=1}^{|h(p)|}p_l=1\}$。

定义 3[5] 根据定义1,$h(p)$ 为PHFE,其得分函数为 $E(h(p))=\frac{1}{|h(p)|}\sum_{l=1}^{|h(p)|}\gamma_l p_l$。

定义 4[5] 根据定义1,PHFE $h(p)$ 偏差函数 $D(h(p))=\frac{1}{|h(p)|}\sum_{l=1}^{|h(p)|}((\gamma_l p_l-E(h(p)))^2)p_l$,由定义3、定义4,针对两个PHFE $h_1(p),h_2(p)$,比较规则如下:

(1)若 $E(h_1(p))>E(h_2(p)),\Rightarrow h_1(p)<h_2(p)$;

(2)若 $E(h_1(p))<E(h_2(p)),\Rightarrow h_1(p)<h_2(p)$;

(3)若 $E(h_1(p))=E(h_2(p))$,

①$D(h_1(p))>D(h_2(p)),\Rightarrow h_1(p)<h_2(p)$;

②$D(h_1(p))<D(h_2(p)),\Rightarrow h_1(p)>h_2(p)$;

③$D(h_1(p))=D(h_2(p)),\Rightarrow h_1(p)=h_2(p)$。

定义 5 根据定义2,$h(p)$ 为PHFE,其几何距离函数 $e=e(h(p))$ 计算方法为

$$e(h(p))=\sum_{l=1}^{|h(p)|}\frac{\min\{\gamma_l,p_l\}\sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}+\sqrt{(\gamma_l-1)^2+(p_l-1)^2}} \tag{1}$$

性质 1 PHFE $h(p)$ 的几何距离函数 $e(h(p))$ 取值范围为 $e(h(p))\in[0,1]$。

(1)当 $h(p)=\{(0,1),(1,0)\}$ 时,$e(h(p))=E(h(p))=0$;

(2)当 $h(p)=\{(1,1)\}$ 时,$e(h(p))=E(h(p))=1$;

(3)当 $h(p)=\{(\gamma_l,p_l),l=1,2,\cdots,|h(p)|,0<\gamma_l<1,\sum_{l=1}^{|h(p)|}p_l=1\}$ 时,$e(h(p))\in(0,1)$。

证明(3) 因为

$$0<\frac{\sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}+\sqrt{(\gamma_l-1)^2+(p_l-1)^2}}<1,$$

$$0<\frac{\min\{\gamma_l,p_l\}\ \sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}+\sqrt{(\gamma_l-1)^2+(p_l-1)^2}}<\min\{\gamma_l,p_l\},$$

所以

$$0<\sum_{l=1}^{|h(p)|}\frac{\min(\gamma_l,p_l)\ \sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2+p_l^2}+\sqrt{(\gamma_l-1)^2+(p_l-1)^2}}<$$

$$\min\{\sum_{l=1}^{|h(p)|}\gamma_l,\sum_{l=1}^{|h(p)|}p_l\}=\min\{\sum_{l=1}^{|h(p)|}\gamma_l,1\},$$

即 $e=e(h(p))\in(0,1)$。

综上可得 $e(h(p))\in[0,1]$。

定义 6　根据定义 2，PHFE $h(p)$，其离差程度系数函数

$$d(h(p))=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{|h(p)|}\sum_{l'=1}^{|h(p)|}\sqrt{(\gamma_l-\gamma_{l'})^2+(p_l-p_{l'})^2}\tag{2}$$

根据定义 5、定义 6，针对两个 PHFE $h_1(p)$，$h_2(p)$，比较规则如下：

(1) $e(h_1(p))>e(h_2(p))$，$\Rightarrow h_1(p)>h_2(p)$；

(2) $e(h_1(p))<e(h_2(p))$，$\Rightarrow h_1(p)<h_2(p)$；

(3) $e(h_1(p))=e(h_2(p))$，

①$d(h_1(p))>d(h_2(p))$，$\Rightarrow h_1(p)<h_2(p)$；

②$d(h_1(p))<d(h_2(p))$，$\Rightarrow h_1(p)>h_2(p)$；

③$d(h_1(p))=d(h_2(p))$，$\Rightarrow h_1(p)=h_2(p)$。

定义 7　根据定义 2，PHFE $h(p)$ 的加权综合值计算方法为

$$\text{PHFE } h(p)^{\omega}=\tilde{h}(p)=[e(h(p))]^{\omega}+[d(h(p))]^{\omega-1}\tag{3}$$

ω 为 PHFE $h(p)$ 对应的权重。在定义 7 中，PHFE $h(p)$ 加权综合值 $\tilde{h}(p)$ 的大小由两个因素决定，分别是几何距离函数值 $e=e(h(p))$ 与离差程度系数函数值 $d=d(h(p))$。容易验证式(3)中，几何距离函数值 $e=e(h(p))$ 越大，$\tilde{h}(p)$ 的值越大；离差程度系数函数值 $d=d(h(p))$ 越小，则 $\tilde{h}(p)$ 的值越大。

定义 8　令 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组非负实数，且有 $r=1,2,\cdots,n$。若

$$MSM^{(r)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\frac{\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\prod_{j=1}^{r}a_{i_j}}{C_n^r}\right)^{\frac{1}{r}}\tag{4}$$

则称式(4)为 Maclaurin 对称平均算子，其中，$i_1,i_2,\cdots,i_r$ 为遍历组合 $1,2,\cdots,n$ 中的一切 r 元组，$C_n^r=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$ 为二项式系数。不难验证 Maclaurin 对称平均算子具有下列性质：

(1) 对于任意的 i，若 $a_i=a\geqslant 0$，则 $MSM^{(r)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a$；

(2) 对于任意的 i，若 $0\leqslant a_i\leqslant b_i$，则有 $MSM^{(r)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant MSM^{(r)}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$；

(3) 对于任意的 $a_i\geqslant 0$，有 $\text{Min}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant MSM^{(r)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant \text{Max}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

定义 9　令 $h(p_i)$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 为一列 PHFE，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为相关的权重向量，有 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，且 $\omega_i\geqslant 0$，根据定义 7，一列加权的 PHFE $h(p_i)$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 的 Maclaurin 综合对称平均算子设置为如下情形：

$$MSM_{(\omega_i)}^{(r)}(h(p_1),h(p_2),\cdots,h(p_n))=\left(\frac{\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\prod_{i=1}^{r}\tilde{h}(p_i)}{C_n^r}\right)^{\frac{1}{r}}\tag{5}$$

2　主要结论与方法

2.1　概率犹豫模糊多属性决策（Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision Making，PHFMADM）问题中属性权重确定方法

在 PHFMADM 问题中，假设方案集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，属性集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，属性权重用 $\omega_{m'}$ 表示，$m'\in\{1,2,\cdots,m\}$。一般情况下，属性分为成本型与效益型两种类型，若为成本型则采用文献[7]中的方法将其转换为效益型，决策专家给予第 n' 个方案的第 m' 个属性的评分。

用 $h_{n'm'}(P_{n'm'})$ 表示，这里的评分符号 $h_{n'm'}(P_{n'm'})$ 为 PHFE。$n'\in\{1,2,\cdots,n\}$，$m'\in\{1,2,\cdots,m\}$。

$h_{n'm'}(P_{n'm'})=\{(\gamma_{n'm'}^{(k)},p_{n'm'}^{(k)}),k=1,2,\cdots,|h_{n'm'}(P_{n'm'})|,0\leqslant\gamma_{n'm'}^{(k)}\leqslant 1,\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}p_{n'm'}^{(k)}=1\}$。

根据定义 5 可得

$$e(h_{n'm'}(P_{n'm'}))=\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\frac{\min\{\gamma_{n'm'}^{(k)},p_{n'm'}^{(k)}\}\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)})^2+(p_{n'm'}^{(k)})^2}}{\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)})^2+(p_{n'm'}^{(k)})^2}+\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)}-1)^2+(p_{n'm'}^{(k)}-1)^2}}\tag{6}$$

根据定义 6 可得

$$d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sum_{k'=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)}-\gamma_{n'm'}^{(k')})^2+(p_{n'm'}^{(k)}-p_{n'm'}^{(k')})^2}\tag{7}$$

采用熵值法计算属性权重，定义第 m' 个属性的熵如下：

$$S_{m'}=-\frac{\sum_{n'=1}^{n}\mu_{n'm'}\ln\mu_{n'm'}}{\ln n},n'=1,2,\cdots,n;\quad m'=1,2,\cdots,m\tag{8}$$

其中,
$$\mu_{n'm'} = \frac{e(h_{n'm'}(P_{n'm'})) \times \dfrac{1}{d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))}}{\sum_{n'=1}^{n} e(h_{n'm'}(P_{n'm'})) \times \dfrac{1}{d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))}} =$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|} \frac{\min\{\gamma^{(k)}_{n'm'}, p^{(k)}_{n'm'}\}\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'})^2}}{\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'})^2}+\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'}-1)^2+(p^{(k)}_{n'm'}-1)^2}} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sum_{k'=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'}-\gamma^{(k')}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'}-p^{(k')}_{n'm'})^2}}}{\displaystyle\sum_{n'=1}^{n}\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|} \frac{\min\{\gamma^{(k)}_{n'm'}, p^{(k)}_{n'm'}\}\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'})^2}}{\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'})^2}+\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'}-1)^2+(p^{(k)}_{n'm'}-1)^2}} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sum_{k'=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'}-\gamma^{(k')}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'}-p^{(k')}_{n'm'})^2}}} \quad (9)$$

属性的权重确定公式为

$$\omega_{m'} = \frac{1-S_{m'}}{n-\sum_{m'=1}^{m} S_{m'}}, m'=1,2,\cdots,m \quad (10)$$

本文采用的熵值法确定属性权重有两方面优势:①仅依据数据进行计算,避免了人为因素的干扰,得到的权重比较客观;②不仅考虑了各方案的属性整体评价值的偏差问题,还兼顾了属性内部各因素的偏差问题,计算的权重值更加科学。

2.2 PHFMADM 方法

本文考虑的属性类型为效益型,结合 2.1 节 PHFMADM 的问题陈述,决策方法如下:

第 1 步 由 2.1 节确定属性权重 $\omega_{m'}, m'=1,2,\cdots,m$;

第 2 步 根据定义 7,计算各方案的每个属性的综合值 $\tilde{h}_{n'm'}(P_{n'm'})$,这里

$$\tilde{h}_{n'm'}(P_{n'm'}) = [e(h_{n'm'}(P_{n'm'}))]^{\omega} + [d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))]^{\omega-1} \quad (11)$$

其中,$e(h_{n'm'}(P_{n'm'}))$,$d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))$取值如下:

$$e(h_{n'm'}(P_{n'm'})) = \sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|} \frac{\min\{\gamma^{(k)}_{n'm'}, p^{(k)}_{n'm'}\}\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'})^2}}{\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'})^2}+\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'}-1)^2+(p^{(k)}_{n'm'}-1)^2}},$$

$$d(h_{n'm'}(P_{n'm'})) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sum_{k'=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\sqrt{(\gamma^{(k)}_{n'm'}-\gamma^{(k')}_{n'm'})^2+(p^{(k)}_{n'm'}-p^{(k')}_{n'm'})^2};$$

第 3 步 利用式(4),集结各方案的属性综合值 $\tilde{h}_{n'm'}(P_{n'm'})$,得$|a_i|$,$(i=1,2,\cdots,n)$,$|a_i|$表示各方案的综合值;

第 4 步 根据$|a_i|$,$(i=1,2,\cdots,n)$值的大小对方案排序,由式(4)性质可知,$|a_i|$的值大者,对应的方案为优;

第 5 步 比较决策结果;

第 6 步 结束。

3 案例分析

为了更好地与本文算法进行比较,采用文献[8]中的案例进行说明。

对某个森林公园进行测评,从休闲娱乐型、保健锻炼型和养生养老型等 3 个因素进行测评来鉴定该公园属性为哪种类型,3 个因素分别用符号 a_1, a_2, a_3 表示,评价指标为健康需求、养老需求以及亲子需求等,评价指标分别用符号 c_1, c_2, c_3 刻画,显然这里的 3 个评价指标 c_1, c_2, c_3 皆为效益型属性,评价专家组给出的评价如表 1 所示。

表 1 决策专家评分表

Table 1 Evaluation table of decision experts

因素	评价指标		
	c_1	c_2	c_3
a_1	{(0.5,0.337 3),(0.4,0.421 7)(0.7,0.241 0)}	{(0.3,0.567 6),(0.9,0.189 2)(0.7,0.243 2)}	{(0.1,0.100 0),(0.2,0.421 4)(0.3,0.478 6)}
a_2	{(0.5,0.225 6),(0.3,0.376 0)(0.6,0.398 4)}	{(0.4,0.245 1),(0.2,0.490 2)(0.5,0.264 7)}	{(0.1,0.473 1),(0.6,0.239 4)(0.5,0.287 5)}
a_3	{(0.1,0.535 1),(0.8,0.178 8)(0.5,0.286 1)}	{(0.3,0.459 0),(0.4,0.344 3)(0.7,0.196 7)}	{(0.1,0.350 1),(0.5,0.288 8)(0.4,0.361 1)}

3.1　确定属性权重

3.1.1　利用几何距离函数值与离差程度系数函数值确定属性权重

首先,根据表 1 数据及定义 5,可得各属性的几何距离函数值 $e(h_{n'm'}(p_{n'm'}))$,$n'=1,2,3$;$m'=1,2,3$ 分别为

$e(h_{11}(p_{11}))=0.4209$,$e(h_{12}(p_{12}))=0.3476$,$e(h_{13}(p_{13}))=0.1901$,

$e(h_{21}(p_{21}))=0.3849$,$e(h_{22}(p_{22}))=0.2547$,$e(h_{23}(p_{23}))=0.2490$,

$e(h_{31}(p_{31}))=0.2366$,$e(h_{32}(p_{32}))=0.3335$,$e(h_{33}(p_{33}))=0.2776$。

其次,根据表 1 数据及定义 6,可得各属性的离差程度系数值 $d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))$,$n'=1,2,3$;$m'=1,2,3$ 分别为

$d(h_{11}(p_{11}))=0.7031$,$d(h_{12}(p_{12}))=1.4316$,$d(h_{13}(p_{13}))=0.8800$,

$d(h_{21}(p_{21}))=0.7506$,$d(h_{22}(p_{22}))=0.7935$,$d(h_{23}(p_{23}))=1.1039$,

$d(h_{31}(p_{31}))=1.5753$,$d(h_{32}(p_{32}))=0.9648$,$d(h_{33}(p_{33}))=0.8283$。

再次,由式(8)计算 $S_{m'}$,$m'=1,2,3$ 分别为 $S_1=0.9936$,$S_2=0.9419$,$S_3=0.9819$。

最后,得各属性权重为 $\omega_1=0.7981$,$\omega_2=0.0689$,$\omega_3=0.1330$。

3.1.2　仅用几何距离函数值确定属性权重

首先, 定义第 m'个属性的熵如下:

$$T_{m'}=-\frac{\sum_{n'=1}^{n}\pi_{n'm'}\ln\pi_{n'm'}}{\ln n},n'=1,2,\cdots,n;\quad m'=1,2,\cdots,m \tag{12}$$

这里

$$\pi_{n'm'}=\frac{e(h_{n'm'}(p_{n'm'}))}{\sum_{n'=1}^{n}e(h_{n'm'}(p_{n'm'}))}=\frac{\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\frac{\min\{\gamma_{n'm'}^{(k)},p_{n'm'}^{(k)}\}\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)})^2+(p_{n'm'}^{(k)})^2}}{\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)})^2+(p_{n'm'}^{(k)})^2}+\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)}-1)^2+(p_{n'm'}^{(k)}-1)^2}}}{\sum_{n'=1}^{n}\sum_{k=1}^{|h_{n'm'}(P_{n'm'})|}\frac{\min\{\gamma_{n'm'}^{(k)},p_{n'm'}^{(k)}\}\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)})^2+(p_{n'm'}^{(k)})^2}}{\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)})^2+(p_{n'm'}^{(k)})^2}+\sqrt{(\gamma_{n'm'}^{(k)}-1)^2+(p_{n'm'}^{(k)}-1)^2}}} \tag{13}$$

其次,属性的权重确定公式为

$$\omega_{m'}=\frac{1-T_{m'}}{n-\sum_{m'=1}^{m}T_{m'}},m'=1,2,\cdots,m \tag{14}$$

最后,得各属性权重为 $\omega_1=0.5730$,$\omega_2=0.1820$,$\omega_3=0.2450$。

3.2　决策算法

第 1 步　采用 3.1.1 节中的属性权重进行计算,即 $\omega_1=0.7981$,$\omega_2=0.0689$,$\omega_3=0.1330$;

第 2 步　计算各方案的每个属性的综合值 $\tilde{h}_{n'm'}(P_{n'm'})=[e(h_{n'm'}(P_{n'm'}))]^{\omega}+[d(h_{n'm'}(P_{n'm'}))]^{\omega-1}$,得

$\tilde{h}_{11}(p_{11})=1.5751$,$\tilde{h}_{12}(p_{12})=2.6458$,$\tilde{h}_{13}(p_{13})=1.9191$,

$\tilde{h}_{21}(p_{21})=1.5264$,$\tilde{h}_{22}(p_{22})=2.1505$,$\tilde{h}_{23}(p_{23})=1.7371$,

$\tilde{h}_{31}(p_{31})=1.2288$,$\tilde{h}_{32}(p_{32})=1.9610$,$\tilde{h}_{33}(p_{33})=2.0207$。

第 3 步　利用式(4),集结各方案的属性综合值 $\tilde{h}_{n'm'}(P_{n'm'})$,得$|a_i|$,$(i=1,2,\cdots,n)$,

取 $r=1$,有 $|a_1|=2.0467$,$|a_2|=1.8047$,$|a_3|=1.7368$,方案排序为 $a_1>a_2>a_3$;

取 $r=2$,有 $|a_1|=2.0222$,$|a_2|=1.7953$,$|a_3|=1.7181$,方案排序为 $a_1>a_2>a_3$;

取 $r=3$,有 $|a_1|=1.9997$,$|a_2|=1.7864$,$|a_3|=1.6948$,方案排序为 $a_1>a_2>a_3$,

即无论参数 r 取何值,该森林公园都是休闲娱乐型。

3.3　比较算法结果

3.3.1　属性权重比较

在 PHFMADM 问题中,研究属性权重的文献相对较少,同时在二维数据信息视角下研究属性权重的文献更是匮乏,将本文求解方法与其他文献中的方法进行了对比,如表 2 所示。

表 2　属性权重不同求解方法的结果对比

Table 2　Comparison of results of different solution methods for attribute weight

属性权重的不同求解方法	属性权重
文献[9]中的离差最大化方法	$\omega_1=0.4500$,$\omega_2=0.4000$,$\omega_3=0.1500$
文献[8]中的熵值法	$\omega_1=0.4700$,$\omega_2=0.3400$,$\omega_3=0.1900$
本文 3.1.1 节中的方法	$\omega_1=0.7981$,$\omega_2=0.0689$,$\omega_3=0.1330$
本文 3.1.2 节中的方法	$\omega_1=0.5730$,$\omega_2=0.1820$,$\omega_3=0.2450$

由表2结果对比可知,4种求解属性权重的方法在对最重要属性认同上高度一致,但在具体属性权重分配上具有很大差别。文献[8]及文献[9]在传统的PHF-MADM问题中确定属性权重,故二者属性的权重离差程度较低。本文3.1.1节与3.1.2节中的方法都是从二维变量信息的角度出发进行计算,由于3.1.1节不仅考虑了PHFE的几何距离,还兼顾了PHFE中PHFN的离差程度,与仅考虑PHFE的几何距离这一单一因素的3.1.2节中的方法所计算出的结果差距明显。本文定义的确定属性权重的两种方法有别于前人的计算方法,丰富了确定属性权重的基础理论。

3.3.2 决策结果比较

为了说明本文决策方法的有效性,将排序结果与其他文献进行了对比,见表3。

由表3的对比结果可知,本文的排序方法是有效的。表3的对比结果说明,决策方法思考角度差异造成了对方案排序结果的异同,在决策问题中,决策者需要根据实际决策问题要求灵活制定排序方法以满足决策需求。

表3 不同决策算法结果对比

Table 3 Comparison of results of different decision algorithms

决策方法	决策结果得分值	方案排序
文献[5]中的PHFWA方法	$S_1=0.7214, S_2=0.7831, S_3=0.4831$	$a_2>a_1>a_3$
文献[5]中的PHFWG方法	$S_1=0.4616, S_2=0.3307, S_3=0.3161$	$a_1>a_2>a_3$
文献[8]中的LINMAP方法	$\xi(a_1)=0.5860, \xi(a_2)=0, \xi(a_3)=0.6196$	$a_3>a_1>a_2$
文献[10]中的TOPSIS方法	$c(a_1)=0.4625, c(a_2)=0.2953, c(a_3)=0.4267$	$a_1>a_3>a_2$
本文方法 $r=1,2,3$	$r=1, \lvert a_1\rvert=2.0467, \lvert a_2\rvert=1.8047, \lvert a_3\rvert=1.7368$	$a_1>a_2>a_3$
	$r=2, \lvert a_1\rvert=2.0222, \lvert a_2\rvert=1.7953, \lvert a_3\rvert=1.7181$	$a_1>a_2>a_3$
	$r=3, \lvert a_1\rvert=1.9997, \lvert a_2\rvert=1.7864, \lvert a_3\rvert=1.6948$	$a_1>a_2>a_3$

4 结 语

文章在二维变量信息视角下研究了PHFMADM问题,建立了两种确定属性权重方法并与其他文献方法进行了简单对比,同时,利用Maclaurin对称平均算子对各方案的属性综合值进行集结进而对方案排序,决策结果表明该方法科学有效,为解决PHFMADM问题提供了一种新的思路。

参考文献:

[1] 朱斌. 基于偏好关系的决策方法研究及应用[D]. 南京: 东南大学, 2014.

[2] 朱峰, 刘玉敏, 徐济超, 等. 基于相似度和改进雷达图的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 运筹与管理, 2021, 30(4): 109-114.

[3] 王金凤, 程璐, 冯立杰, 等. 基于关联系数的概率区间犹豫模糊多属性决策方法[J]. 统计与决策, 2020, 36(20): 176-180.

[4] 饶益, 陈云翔, 蔡忠义, 等.考虑专家偏好的基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 火力与指挥控制, 2021, 46(4): 4-13.

[5] Zhang S, Xu Z S, He Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. Information Fusion, 2017, 38(1): 1-11.

[6] 李宝萍, 陈华友. 概率犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及其多属性群决策模型[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(5): 130-142.

[7] Li J, Wang J Q. An extended QUALIFLEX method under probability hesitant fuzzy environment for selecting green suppliers[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(6): 1866-1879.

[8] 曹倩, 刘小弟, 张世涛, 等. 概率信息完全未知的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 系统科学与数学, 2020, 40(7): 1242-1256.

[9] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.

[10] Ding J, Xu Z S, Zhao N. An interactive approach to probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision making with incomplete weight information[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 32(3): 2523-2536.

【责任编辑: 卓祯雨】