文章编号:1671-4229(2023)02-0052-05

拓扑空间的敏感性

钟新林,杨　霄,汪火云*
(广州大学 数学与信息科学学院,广东 广州　510006)

摘　要:文章研究了一致空间、Hausdorff 空间和度量空间上的一些敏感性质。分别用 Hausdorff 空间中的有限开覆盖和一致空间中的“从”介绍了 n-敏感、敏感串和局部 proximal 串等概念,证明了这 3 个概念两种版本的定义在紧致的 Hausdorff 空间上分别是互相等价的。更进一步地,如果在一个紧致的度量空间上,那么这 3 个概念两种版本的定义与它们的标准定义也分别是互相等价的。

关键词:n-敏感;敏感串;局部 proximal 串;一致空间
中图分类号:O 189. 11　　**文献标志码**:A

Sensitivities for topological spaces

ZHONG Xin-lin, *YANG Xiao*, *WANG Huo-yun**
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In this paper, we study the sensitive properties on uniform space, Hausdorff space and metric space, introduce the notions of n-sensitivity, sensitive tuple, and local proximal tuple in terms of finite open covers and for Hausdorff topological spaces and entourages for uniform spaces. We show that the two definitions for each notion are equivalent in compact Hausdorff spaces and further they are equivalent to their standard definitions in compact metric spaces.

Key words: n-sensitivity; sensitive n-tuple; regionally proximal; uniform space

初始条件的敏感依赖性,简称敏感性,是混沌动力系统中重要的研究对象,是对 20 世纪 70 年代流行术语“蝴蝶效应”的本质描述。敏感性的概念在 1979 年由美国数学家 Guckenheimer[1] 首次提出,并在区间上给出了具有敏感性函数的一些拓扑刻画。1993 年,Glasner 等[2] 在经典动力系统(X,T)中开展了敏感性的研究,其中,X 是一个紧致的度量空间,T: $X \to X$ 是一个连续自映射。在 2013 年,Ceccherini-Silberstein 等[3] 把敏感性的概念推广到了一致空间。为了进一步研究动力系统的敏感性,2005 年 Xiong[4] 在经典动力系统中引入了 n-敏感的概念。具体地说,一个动力系统是 n-敏感的,如果在每个非空开集中都存在 n 个互异的点,使得它们的距离至少在某一次迭代时大于一个给定的正常数,这个常数也被称为 n-敏感常数。为了研究极小系统的 n-敏感性质,邵松等[5] 在 2008 年提出 n-局部 proximal 的概念,并证明了极小系统是 n-敏感的当且仅当 n-局部 proximal 关系 Q_n 包含了一个坐标互异的元素。在 2008 年,Ye 等[6] 引入了敏感串的概念。在 2011 年,Huang 等[7] 在测度空间上引入了敏感串的概念。近年来,已有一些作者[8-10] 在一般拓扑空间上讨论敏感性,这些讨论取得了令人感兴趣的结果。

收稿日期:2021-10-26;**修回日期**:2022-04-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11771149)
作者简介:钟新林(1997—),男,硕士研究生. E-mail:xinlin. z@ e. gzhu. edu. cn
*通信作者. E-mail:wanghuoyun@ 126. com
引文格式:钟新林,杨　霄,汪火云. 拓扑空间的敏感性[J]. 广州大学学报(自然科学版),2023,22(2):52-56.

本文研究了 n-敏感、敏感串和局部 proximal 串在 Hausdorff 拓扑空间、一致空间和度量空间上的性质。证明了在一个紧致的 Hausdorff 拓扑空间上, Hausdorff 空间版本的 n-敏感与一致空间版本的 n-敏感是互相等价的; 更进一步地, 如果在一个紧致的度量空间上, 那么它们与标准版本的 n-敏感也是分别互相等价的, 具体证明参见定理 1。此外,还证明了敏感串和局部 proximal 串也有类似的结果,分别参见定理 2 和定理 3。

1　基本概念

1938 年,Weil[11]引入了一致结构和一致空间的概念。X 上的一致结构 $\mathcal{U}$ 是 $X\times X$ 的非空开子集族, 并且满足下列条件:

(1) $\mathcal{U}$ 的每一个成员 E 包含了对角线 Δ, 其中,

$$\Delta=\{(x,x)\in X\times X: x\in X\};$$

(2) 如果 $E\in\mathcal{U}$, 则 $E^{-1}\in\mathcal{U}$, 其中,

$$E^{-1}=\{(y,x)\in X\times X:(x,y)\in E\};$$

(3) 对任意的 $E\in\mathcal{U}$, 存在某个 $F\in\mathcal{U}$ 使得 $F\circ F\subset E$, 其中, $F\circ F=\{(x,y)$: 存在 $z\in X$ 满足 $(x,z)\in F$ 和 $(z,y)\in F\}$;

(4) 对任意的 $E,F\in\mathcal{U}$, 有 $E\cap F\in\mathcal{U}$;

(5) 如果 $E\in\mathcal{U}$ 且 $E\subset F\subset X\times X$, 则 $F\in\mathcal{U}$。

对于一个非空集合 X, 如果它具有一个一致结构 $\mathcal{U}$, 则称偶对 $(X,\mathcal{U})$ 为一个一致空间,一致结构 $\mathcal{U}$ 中的成员 E 称为从(Entourage)。如果从 E 满足 $E=E^{-1}$, 则称其为对称从。对于任意的从 $E\in\mathcal{U}$, 可以找到一个对称从 $D\in\mathcal{U}$, 使得 $D\circ D\subset E$。事实上, 由一致结构定义中的第(3)条可知, 存在某个 $F\in\mathcal{U}$ 使得 $F\circ F\subset E$。又 $F^{-1}\in\mathcal{U}$, 令 $D=F\cap F^{-1}$, 则 D 为对称从, 且 $D\circ D\subset E$。

定义一致拓扑 $\mathcal{T}=\{T\subset X$: 对每一个 $x\in T$, 存在 $E\in\mathcal{U}$, 使得 $E[x]\subset T\}$, 其中, $E[x]=\{y\in X:(x,y)\in E\}$ 为 E 在 x 的一个截面。一个拓扑空间是可一致结构化的, 如果存在着一个 X 上的一致结构, 使得这个一致结构诱导出的一致拓扑就是给定拓扑空间的原始拓扑。此外, 文献[12]指出, 任一紧致的 Hausdorff 空间都是可一致结构化的, 并且满足条件的一致结构是唯一的。

在本文中, 记一个拓扑动力系统为一个偶对 (X,T), 其中, X 是一个紧致的 Hausdorff 空间, T: $X\to X$ 是一个连续自映射。用 X^n 表示 X 的 n 次乘积。用 $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ 分别表示非负整数集和正整数集。设 $A\subset X$, 用 $|A|$ 表示 A 的基数, 用 $int(A)$ 表示集合 A 的内部。由文献[12]的推论 8.1.3 直接可得, $|int(E[x])|\geqslant 1$。用 $B(x,\varepsilon)$ 表示以 x 为球心, 以 ε 为半径的球形邻域。

2　结果的证明

引理 1 来自文献[10]的引理 2.6。

引理 1[10]　令 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间, 并令 $\mathcal{U}$ 是唯一能够诱导 X 的原始拓扑的一致结构。如果 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖, 那么

$$\cup_{A\in\mathcal{A}}A\times A\in\mathcal{U}。$$

引理 2 来自文献[12]的定理 8.3.G。

引理 2[12]　令 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间, 并令 $\mathcal{U}$ 是唯一能够诱导 X 的原始拓扑的一致结构。那么对 X 的每个开覆盖 $\mathcal{A}$, 存在一个对称从 $D\in\mathcal{U}$, 使得 $\{D[x]:x\in X\}$ 加细 $\mathcal{A}$。

定义 1　设 (X,T) 是一个拓扑动力系统, $n\in\mathbb{Z}_+$。

(1) 设 (X,d) 是一个度量空间。称 (X,T) 是 n-敏感的, 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得对 X 的任意一个非空开集 U, 存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathcal{U}$ 和 $k\in\mathbb{N}$, 对任意的 $i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$d(T^kx_i,T^kx_j)>\varepsilon。$$

(2) 设 $(X,\mathcal{U})$ 是一个一致空间。称 (X,T) 是一致 n-敏感的, 如果存在一个从 $E\in\mathcal{U}$, 对 X 的任意一个非空开集 U, 存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$ 和 $k\in\mathbb{N}$, 对任意的 $i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$(T^kx_i,T^kx_j)\notin E。$$

(3) 设 X 是一个 Hausdorff 空间。称 (X,T) 是 Hausdorff n-敏感的, 如果存在一个有限开覆盖 $\mathcal{A}$, 对 X 的任意一个非空开集 U, 存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$ 和 $k\in\mathbb{N}$, 对任意的 $i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 和对任意的 $A\in\mathcal{A}$, 有

$$|\{T^kx_i,T^kx_j\}\cap A|\leqslant 1。$$

定理 1　令 (X,T) 是一个拓扑动力系统, X 是一个紧致的 Hausdorff 空间, 那么以下条件等价:

(1) (X,T) 是 Hausdorff n-敏感的;

(2) (X,T) 是一致 n-敏感的。

如果 X 是一个度量空间, 那么(1)与(2)等价于

(3) (X,T) 是 n-敏感的。

证明 (1)⇒(2) 假设(X,T)是Hausdorff n-敏感的,记$\mathcal{A}$为满足Hausdorff n-敏感定义的一个有限开覆盖。因为X是一个紧致的Hausdorff空间,则存在唯一能够诱导X的原始拓扑的一致结构,记为$\mathcal{U}$。再由引理2可知,存在一个对称从$D\in\mathcal{U}$,使得$\{D[z]:z\in X\}$加细$\mathcal{A}$。因为(X,T)是Hausdorff n-敏感的,则对X任意的一个非空开集U,存在$x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$和$k\in\mathbb{N}$,使得对任意的$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$和对任意的$A\in\mathcal{A}$,有

$$|\{T^kx_i,T^kx_j\}\cap A|\leqslant 1。$$

这蕴含着

$$(T^kx_i,T^k x_j)\notin D。$$

否则当$(T^kx_i,T^kx_j)\in D$时,存在$B\in\mathcal{A}$,

$$T^kx_j\in D[T^kx_i]\subset B,$$

从而有$\{T^kx_i,T^kx_j\}\subset B$,矛盾。因此,由一致$n$-敏感的定义可知(2)成立。

(2)⇒(1) 令$\mathcal{U}$是唯一能够诱导X的原始拓扑的一致结构。令$D\in\mathcal{U}$为对称从,因而存在对称从$D_1\in\mathcal{U}$满足$D_1\circ D_1\subset D$。显然,$\{D_1[z]:z\in X\}$覆盖X,且$\{int(D_1[z]):z\in X\}$也覆盖X。由于X是紧致的,因此,存在$z_1,z_2,\cdots,z_m\in X$,使得

$$\mathcal{B}=\{int(D_1[z_i]):i=1,2,\cdots,m\}$$

是一个有限子覆盖。令U是X的任意一个非空开集,因为(X,T)是一致n-敏感的,则存在$x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$和存在$k\in\mathbb{N}$使得对任意的$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$,有$(T^kx_i,T^kx_j)\notin D$,继而对任意$B\in\mathcal{B}$,有$|\{T^kx_i,T^kx_j\}\cap B|\leqslant 1$。否则,存在$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$使得

$$\{T^kx_i,T^kx_j\}\subset int(D_1[z_l]),$$

其中,$l\in\{1,2,\cdots,m\}$。再由截面的定义有

$$(z_l,T^kx_i)\in D_1,\ (z_l,T^kx_j)\in D_1,$$

则$(T^kx_i,T^kx_j)\in D$,矛盾。因此,(X,T)是Hausdorff n-敏感的。

在接下来的证明中假设X是一个度量空间。

(3)⇒(1) 已知(X,T)是n-敏感的,ε是它的一个敏感常数,$\mathcal{A}=\{B(z,\frac{\varepsilon}{2}):z\in X\}$是$X$的一个开覆盖。由于$X$是紧致的,则存在$z_1,z_2,\cdots,z_m\in X$使得

$$\mathcal{B}=\{B(z_l,\frac{\varepsilon}{2}):l=1,2,\cdots,m\}$$

是X的一个有限子覆盖。令U是X的一个任意的非空开集,因为(X,T)是n-敏感的,则存在$x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$和$k\in\mathbb{N}$,使得对任意的$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$,$d(T^kx_i,T^kx_j)>\varepsilon$。这蕴含着对任意的$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$和对任意$B\in\mathcal{B}$,有

$$|\{T^kx_i,T^kx_j\}\cap B|\leqslant 1。$$

否则,存在$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$\{T^kx_i,T^kx_j\}\subset B(z_l,\frac{\varepsilon}{2}),$$

其中,$l\in\{1,2,\cdots,m\}$。因而有

$$d(T^kx_i,T^kx_j)\leqslant d(T^kx_i,z_l)+d(z_l,T^kx_j)<\varepsilon,$$

矛盾于(X,T)是n-敏感的。因此(1)成立。

(1)⇒(3) 假设(X,T)是Hausdorff n-敏感的,令$\mathcal{A}$是X的一个有限开覆盖,ε是$\mathcal{A}$的一个Lebesgue数。令U是X上的任意一个非空开集,由于(X,T)是Hausdorff n-敏感的,则存在$x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$和$k\in\mathbb{N}$,使得对任意的$i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}$和任意的$A\in\mathcal{A}$,有

$$|\{T^kx_i,T^kx_j\}\cap A|\leqslant 1。$$

因为ε是有限开覆盖$\mathcal{A}$的一个Lebesgue数,这蕴含$d(T_i^kx_i,T^kx_j)>\varepsilon$。所以(3)成立。

定义2 设(X,T)是一个拓扑动力系统,$n\in\mathbb{Z}_+$。记$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个由两两不同的点组成的串。

(1)一个串$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是Hausdorff敏感的,如果对X的任意一个有限开覆盖$\mathcal{A}$,对X的任意一个非空开集U,存在$y_1,y_2,\cdots,y_n\in U,k\in\mathbb{N}$,使得对任意的$i\in\{1,2,\cdots,n\}$,存在$A_i\in\mathcal{A}$满足$\{x_i,T^ky_i\}\subset A_i$。

(2)一个串$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一致敏感的,如果对任意一个对称从D,对X的任意一个非空开集U,存在$y_1,y_2,\cdots,y_n\in U$和$k\in\mathbb{N}$,对任意的$i\in\{1,2,\cdots,n\}$,有$(x_i,T^ky_i)\in D$。

(3)一个串$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是敏感的,如果对任意的$\varepsilon>0$,对X的任意一个非空开集U,存在$y_1,y_2,\cdots,y_n\in U$和$k\in\mathbb{N}$,使得对任意的$i\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$d(x_i,T^ky_i)<\varepsilon。$$

定理2 设(X,T)是一个拓扑动力系统,记$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个由两两不同的点组成的串,那么以下结果等价:

(1)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个Hausdorff敏感串;

(2)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个一致敏感串。

如果 X 是一个紧致的度量空间，那么(1) 与(2)等价于

(3)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个敏感串。

证明 (1)⇒(2) 令$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 Hausdorff 敏感串，设 $\mathcal{U}$是唯一能够诱导 X 的原始拓扑的一致结构。令 $D\in\mathcal{U}$是一个对称从，再令对称从 $D_1\in\mathcal{U}$且满足 $D_1\circ D_1\subset D$。显然，

$$\{int(D_1[z]):z\in X\}$$

是 X 的一个开覆盖。因为 X 是紧致的，所以，存在一个有限开覆盖，不妨设为

$$\mathcal{A}=\{int(D_1[z_j]):j=1,2,\cdots,m\}。$$

由于$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 Hausdorff 敏感串，因而对 X 的任意一个非空开集 U，存在 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in U$ 和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意的一个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在 $A_i\in\mathcal{A}$，有$\{x_i,T^ky_i\}\subset A_i$。再由开覆盖的定义和截面的定义得到$(x_i,T^ky_i)\in D$，所以(2)成立。

(2)⇒(1) 令$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个一致敏感串，设$\mathcal{U}$是唯一能够诱导 X 的原始拓扑的一致结构。设$\mathcal{A}$是 X 的一个有限开覆盖。由引理 1 可知

$$\cup_{A\in\mathcal{A}}A\times A\in\mathcal{U}。$$

由于$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个一致敏感串，因而对 X 的任意一个非空开集 U，存在 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in U$ 和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有

$$(x_i,T^ky_i)\in\cup_{A\in\mathcal{A}}A\times A,$$

因而存在 $A_i\in\mathcal{A}$，使得$(x_i,T^ky_i)\in A_i\times A_i$，也即$\{x_i,T^ky_i\}\subset A_i$。所以(1) 成立。

在接下来的证明中，假设 X 是一个紧致的度量空间。

(3)⇒(1) 设$\mathcal{A}$是 X 的一个有限开覆盖，令 $\varepsilon>0$ 是$\mathcal{A}$的一个 Lebesgue 数。设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个敏感串，则对 X 的任意一个非空开集 U，存在 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in U$ 和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $d(x_i,T^ky_i)<\varepsilon$。故存在 $A_i\in\mathcal{A}$，使得$\{x_i,T^ky_i\}\subset A_i$，所以(1) 成立。

(1)⇒(3) 对任意 $\varepsilon>0$，令

$$\mathcal{A}=\{B(z,\frac{\varepsilon}{2}):z\in X\}$$

是 X 的一个开覆盖，再由 X 的紧致性，存在 X 的一个有限子覆盖，不妨设为

$$\mathcal{B}=\{B(z_j,\frac{\varepsilon}{2}):j=1,2,\cdots,m\}。$$

设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 Hausdorff 敏感串。则对 X 的任意一个非空开集 U，存在 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in U$ 和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在一个 $B_i\in\mathcal{B}$，有

$$\{x_i,T^ky_i\}\subset B_i。$$

因而 $d(x_i,T^ky_i)<\varepsilon$，所以(3) 成立。

定义 3 设(X,T)是一个拓扑动力系统，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X^n,n\geqslant 2$。

(1)一个串$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 Hausdorff 局部 proximal 的，如果对 X 的每一个有限开覆盖$\mathcal{A}$，对每一个 x_i的开邻域 U_i，存在 $y_i\in U_i$，$k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有$\{T^ky_i,T^ky_j\}\subset A_{ij}$，而 $A_{ij}\in\mathcal{A}$。

(2)一个串$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一致局部 proximal 的，如果对任意的一个对称从 D，对每一个 x_i 的开邻域 U_i，存在 $y_i\in U_i$和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有$(T^ky_i,T^ky_j)\in D$。

(3)一个串$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是局部 proximal 的，如果对任意 $\varepsilon>0$，对每一个 x_i的开邻域 U_i，存在 $y_i\in U_i$和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $d(T^ky_i,T^ky_j)<\varepsilon$。

定理 3 设(X,T)是一个拓扑动力系统，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X^n,n\geqslant 2$。如果 X 是一个紧致空间，则以下条件等价：

(1)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 Hausdorff 局部 proximal 串；

(2)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一致局部 proximal 串。

如果 X 是紧致的度量空间，那么(1)与(2)等价于

(3)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是局部 proximal 串。

证明 (1)⇒(2) 令$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个 Hausdorff 局部 proximal 串，设$\mathcal{U}$是唯一能够诱导 X 的原始拓扑的一致结构。设 $D\in\mathcal{U}$是一个对称从，让 $D_1\in\mathcal{U}$也是一个对称从，满足 $D_1\circ D_1\subset D$。注意到$\{int(D_1[z]):z\in X\}$是 X 的一个开覆盖。因为 X 是紧致的，故存在 $z_1,z_2,\cdots,z_m\in X$，使得

$$\mathcal{A}=\{int(D_1[z_j]):j=1,2,\cdots,m\}$$

是 X 的一个有限子覆盖。由于$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 Hausdorff 局部 proximal 的串，故对每一个 x_i 的邻域 U_i，存在 $y_i\in U_i$，和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有$\{T^ky_i,T^ky_j\}\subset A_{ij}$，而 $A_{ij}\in\mathcal{A}$。这蕴含着对任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在与之相关的 $l\in\{1,2,\cdots,m\}$，满足

$$\{T^k y_i, T^k y_j\} \subset D_1[z_l],$$

也即

$$T^k y_i \in D_1[z_l], T^k y_j \in D_1[z_l]。$$

所以

$$(T^k y_i, T^k y_j) \in D。$$

因此(2)成立。

(2)⇒(1) 令$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一致局部proximal串,设$\mathcal{U}$是唯一能够诱导X的原始拓扑的一致结构,设$\mathcal{A}$是X的一个有限开覆盖。令$D = \cup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$,则$D \in \mathcal{U}$。由于$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一致局部proximal串,则对每一个$x_i$的开邻域$U_i$,存在$y_i \in U_i$和$k \in \mathbb{N}$,使得对任意$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,有

$$(T^k y_i, T^k y_j) \in D。$$

故$\{T^k y_i, T^k y_j\} \subset A_{ij}$,其中,$A_{ij} \in \mathcal{A}$。所以(1)成立。

接下来的证明,假设X是一个紧致的度量空间。

(3)⇒(1) 设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是局部proximal串,设$\mathcal{A}$是X的一个有限开覆盖,设$\varepsilon > 0$是$\mathcal{A}$的一个Lebesgue数。对每一个x_i的开邻域U_i,存在$y_i \in U_i$和$k \in \mathbb{N}$,使得对任意$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,有$d(T^k y_i, T^k y_j) < \varepsilon$。因此有$\{T^k y_i, T^k y_j\} \subset A_{ij} \in \mathcal{A}$。所以(1)成立。

(1)⇒(3) 设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个Hausdorff局部proximal串。令$\varepsilon > 0$,显然有$\{B(z, \frac{\varepsilon}{2}): z \in X\}$是$X$的一个开覆盖。因为$X$是紧致的,因而存在$z_1, z_2, \cdots, z_m \in X$,使得

$$\mathcal{A} = \{B(z_j, \frac{\varepsilon}{2}): j = 1, 2, \cdots, m\}$$

是一个X的有限子覆盖。因为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是Hausdorff局部proximal串,故对每一个x_i的开邻域U_i,存在$y_i \in U_i$和$k \in \mathbb{N}$,使得对任意$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,有$\{T^k y_i, T^k y_j\} \subset A_{ij} \in \mathcal{A}$。这蕴含着$d(T^k y_i, T^k y_j) < \varepsilon$,所以(3)成立。

3 结 语

后续的研究可以进一步描述n-敏感、敏感串和局部proximal串之间的关系;也可以在半群作用的动力系统或迭代函数系统中探索它们的相关动力性质,从而得到比在经典的拓扑动力系统中更一般的结果。例如文献[8]的定理1.2及命题3.1和命题3.2分别给出了半群作用的动力系统是敏感的充分条件。

参考文献:

[1] Guckenheimer J. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps[J]. Communications in Mathematical Physics, 1979, 70(2): 133-160.

[2] Glasner E, Weiss B. Sensitive dependence on initial conditions[J]. Nonlinearity, 1993, 6: 1067-1075.

[3] Ceccherini-Silberstein T, Coornaert M. Sensitivity and Devaney's chaos in uniform spaces[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2013, 19(3): 349-357.

[4] Xiong J. Chaos in a topologically transitive system[J]. Science in China, Series A: Mathematics, 2005, 48(7): 929-939.

[5] 邵松,叶向东,张瑞丰. 极小系统中的初值敏感性质以及局部proximal关系[J]. 中国科学(A辑:数学), 2008, 38(1): 53-60.

[6] Ye X, Zhang R. On sensitive sets in topological dynamics[J]. Nonlinearity, 2008, 21(7): 1601-1620.

[7] Huang W, Lu P, Ye X. Measure-theoretical sensitivity and equicontinuity[J]. Israel Journal of Mathematics, 2011, 183(1): 233-283.

[8] Wang H, Liu Q, Li H, et al. Sensitivity, Devaney's chaos and Li-Yorke ε-chaos[J]. Semigroup Forum, 2020, 100(3): 888-909.

[9] 李华海. 半群作用动力系统中的传递紧与敏感性的一些研究[D]. 广州:广州大学, 2019.

[10] Good C, Macías S. What is topological about topological dynamics? [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, 2018, 38(3): 1007-1031.

[11] Weil A. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale[M]. Paris: Hermann, 1938.

[12] Engelking R. General topology 6 sigma series in pure mathematics 6[M]. Berlin: Heldermann, 1989.

【责任编辑:卓祯雨】