

文章编号:1671-4229(2023)02-0057-07

对称群 S_4 的表示环

周木森, 戴莉兰

(广州大学 数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 文章利用有限群特征标理论计算了对称群 S_4 的二维和三维不可约表示幂公式, 刻画了 S_4 上表示环 $r(S_4)$, 并找到 S_4 在有理数域 Q 上表示代数 $r_Q(S_4)$ 的 5 个一维表示和 5 个中心本原幂等元。

关键词: 对称群; 群特征标; 不可约表示; 表示环

中图分类号: O 187.2 **文献标志码:** A

On the Green ring of symmetric groups S_4

ZHOU Mu-sen, DAI Li-lan

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In this paper, we calculate the power formulas of two-dimensional and three-dimensional irreducible representations of symmetric group S_4 by using the character theory of finite group, characterize the Green ring $r(S_4)$ of S_4 , and find five one-dimensional representations and five central primitive idempotents of representation algebra $r_Q(S_4)$ over the rational field Q .

Key words: symmetric groups; group character; irreducible representation; the Green ring

在复数域上, 对称群 S_n 的所有不可约复表示可以通过 n 划分自然得到。自然地, 对于 S_n 的任意两个不可约复表示 U 和 W , 考虑不可约复表示 $U \otimes W$ 的一般组合规律, 即 $U \otimes W$ 可以用不可约复表示的直和来线性表示, 这个问题的关键是要找到这些不可约表示的系数组合规律, 这些系数称为 Kronecker 系数。Kronecker 系数最早由 Redfield^[1] 研究对称函数的 Kronecker 内积时提出, 随后 Littlewood^[2] 将 Kronecker 内积应用到对称群表示上。Gessel^[3] 和 Lascoux^[4] 在某些特定的情况下得到了 Kronecker 系数的组合解释。Manivel^[5] 曾考虑过这个公开问题, 并给出了部分解答。截至目前, 这个公开问题仍然未得到有效解决。实际上直接寻找一般对称群 Kronecker 系数的组合规律无疑是十分困难的, 针对这个问题, 考虑通过低阶对称群寻找 Kronecker 系数的组合规律。对于

$n=4$ 的情形, 通过有限群特征标理论, 借助相应矩阵特征值和特征向量, 递归地给出了 S_4 的二维和三维不可约表示幂公式。

关于群表示环的研究问题, 其概念最早是由数学家 Green^[6] 在 20 世纪 60 年代研究有限群的模表示时提出的。随后, 人们将两个不可分解对象的张量积进行直和分解时, 在幺半(monoidal)范畴上赋予了环的结构, 形成表示环的概念。到了 20 世纪 80 年代, Benson 等^[7-8] 进一步研究了相关问题, 并取得了一系列的成果。近年来, Hopf 代数表示理论逐渐成为研究热点^[9-13]。Witherspoon^[14] 研究了有限维群代数 Drinfeld 偶的表示环; Wakui^[15] 给出了所有八维非半单 Hopf 代数的表示环, 并计算出了生成元与生成关系; Chen 等^[16] 研究了一般 Taft 代数的表示环; Li 等^[17] 研究了广义 Taft 代数的表示环; Sun 等^[18] 研究了 Taft

收稿日期: 2021-04-08; 修回日期: 2021-09-10

作者简介: 周木森(1996—), 男, 硕士研究生. E-mail: 2111915061@e.gzhu.edu.cn

引文格式: 周木森, 戴莉兰. 对称群 S_4 的表示环[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2023, 22(2): 57-63.

代数 Drinfeld 偶的表示环。

在算出对称群 S_4 上表示环 $r(S_4)$ 后,自然地,会考虑 $r(S_4)$ 环的一些性质,例如根基、扭元,做成复代数时的维数、线性基等等。另外,对于一般的群 G 在复数域上表示代数 $r_C(G)$ 都是半单的^[19]。此外,根据 Wang 等^[20]的结果可知,有限群 G 的表示环 $r(G)$ 与有限群 G 在复数域 C 上表示代数 $r_C(G)$ 具有相同的半单性。在此基础上,因为对称群 S_n 的特征标都是整数,笔者更感兴趣的是找到 S_4 在有理数域 Q 上表示代数 $r_Q(S_4)$ 的所有不可约表示,并计算其所有中心本原幂等元。

本文主要由以下 3 个部分组成:

第一节介绍本文所需要用到的一些基本定义。

第二节由一组引理出发,计算 S_4 的所有特征标以及不可约表示的张量积分解,借助张量积分解递推关系得到相应矩阵,算出该矩阵的特征值与特征向量,从而给出 S_4 的二维和三维不可约表示幂公式。

第三节讨论 S_4 上表示环 $r(S_4)$,并找到 S_4 在有理数域 Q 上表示代数 $r_Q(S_4)$ 的 5 个一维表示。在此基础上,计算了 $r_Q(S_4)$ 的 5 个中心本原幂等元。

1 基本定义

为了更好地阐述本文主要定理,需要引用如下定义。设 F 是一个域, Z, Q 和 C 分别表示整数环、有理数域和复数域。

定义 1^[21] 定义 G 的 F 表示为群同态

$$\rho: G \rightarrow GL(V),$$

这里 $GL(V)$ 是有限维 F 空间 $V \neq 0$ 上可逆线性变换群。

定义 2^[21] 群 G 的表示环 $r(G)$ 是具有 Z -基 $\{[V_i] \mid 1 \leq i \leq s\}$,加法和乘法由下式所确定的环,对 G 的任意两个复表示 M, N ,

$$[M] + [N] = [M \oplus N], [M][N] = [M \otimes N].$$

这里 $\{[V_i] \mid 1 \leq i \leq s\}$ 是 G 互不等价的不可约复表示, $[M]$ 表示 G 的任意有限维复表示 M 对应的同构类。

定义 3^[21] 设 $(\rho, V) \in R_F(G)^+$,在 G 上定义 F 值函数:

$$\chi_\rho: g \mapsto \text{tr} \cdot \rho(g),$$

这里 $\text{tr} \cdot \rho(g)$ 是 V 上线性变换的迹,称 χ_ρ 为 G 表示 ρ 的特征标;如果 ρ 是不可约表示,则称 χ_ρ 为不可

约特征标;如 $F = C$,则称 χ_ρ 为复特征标。

定义 4^[21] 设 φ 和 ψ 是有限群 G 上两个 C -值函数。定义 (φ, ψ) 如下:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g)^{-1},$$

若 χ_1, χ_2 是 G 的两个复特征标,则称

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)}$$

为 χ_1, χ_2 的内积。

2 主要定理

借助以下一组引理,可以得到 S_4 的二维和三维不可约表示幂公式,因为对称群的特征标都是整数,如不特别申明,以下讨论均在有理数域上进行。

引理 1^[21] 设群 G 与代数闭域 F 满足条件 $\text{char} F \nmid |G|$ 。令 s 为 G 的共轭类个数,则

$$(a) \quad |\overline{\text{Irr}}_F G| = s;$$

$$(b) \quad \overline{\text{Irr}}_F G = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}, n_i = \deg \rho_i,$$

$$|G| = \sum_{i=1}^s n_i^2.$$

对于对称群 S_4 ,希望找到其所有不可约表示,引理 1 可以帮助判断是否找到了 S_4 的所有不可约表示。

引理 2^[21] 若 $F = C, \text{Irr}_F G = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$,则

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

引理 3^[21] 设 χ_1, χ_2 是有限群 G 两个复表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 的特征标,则

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}.$$

引理 2 和引理 3 提供了计算对称群 S_4 的不可约表示特征标以及不可约表示张量积特征标的方法。

引理 4^[21] 群 G 的两个复表示等价当且仅当它们有相同的特征标。

通过引理 4,可以快速判断对称群 S_4 的两个不可约表示张量积是否等价。

引理 5^[21] 设 (ρ, V) 是有限群 G 的一个复表示,且 $V = n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_s V_s$ 是表示 (ρ, V) 的不可约表示直和分解,则

$$n_i = (\chi_i, \chi),$$

其中, χ 是 (ρ, V) 的特征标, χ_i 是 (ρ_i, V_i) 的特征标。

当需要对对称群 S_4 的两个不可约表示张量积进行分解时,通过引理 5 可以用待定系数法确

定其不可约表示分量的重数。

S_4 有两个一维不可约表示,分别是单位表示 (ρ_1, V_1) 和符号表示 (ρ_2, V_2) ,此外 S_4 还有一个二维不可约自然表示 (ρ_3, V_3) ,一个三维不可约自然表示 (ρ_4, V_4) 。根据引理 1, S_4 还剩下一个三维不可约表示 (ρ_5, V_5) 。那么根据定义 1 及引理 2, 可得到 S_4 的特征标表,见表 1。

表 1 S_4 的特征标表

Table 1 S_4 feature scale

不可约表示	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

再根据引理 3 可得表 2:

表 2 S_4 的不可约表示张量积的特征标表

Table 2 The irreducible representation of S_4 represents feature scale of tensor products

张量积	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
$\chi_{V_3 \otimes V_3}$	4	0	1	0	4
$\chi_{V_3 \otimes V_4}$	6	0	0	0	-2
$\chi_{V_3 \otimes V_5}$	6	0	0	0	-2
$\chi_{V_4 \otimes V_4}$	9	1	0	1	1
$\chi_{V_4 \otimes V_5}$	9	-1	0	-1	1
$\chi_{V_5 \otimes V_5}$	9	1	0	1	1

根据表 1 及表 2 的结果,得到以下主要定理。

定理 1 (i) S_4 的二维不可约表示 V_3 的幂公式如下:

$$V_3^{\otimes n} = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} V_1 \oplus \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} V_2 \oplus \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} V_3。$$

(ii) S_4 的三维不可约表示 V_4, V_5 的幂公式如下:

$$V_4^{\otimes n} = V_5^{\otimes n} = \frac{(-1)^n \cdot 3 + 2 + 3^{n-1}}{8} V_1 \oplus \frac{(-1)^{n+1} - 2 + 3^{n-1}}{8} V_2 \oplus \frac{(-1)^{n+1} + (-1)^n \cdot 3 + 2 \cdot 3^{n-1}}{8} V_3 \oplus \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 + 2 + 3^n}{8} V_4 \oplus \frac{(-1)^n - 2 + 3^n}{8} V_5。$$

证明 定理 1 中的 (i) 与 (ii) 的证明类似,以下只证明 (ii)。

根据引理 4, 可得到如下结果:

$$\begin{cases} V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1 \cong V_2, \\ V_1 \otimes V_3 \cong V_3 \otimes V_1 \cong V_3, \\ V_1 \otimes V_4 \cong V_4 \otimes V_1 \cong V_4, \\ V_1 \otimes V_5 \cong V_5 \otimes V_1 \cong V_5, \\ V_2 \otimes V_2 \cong V_1, \\ V_2 \otimes V_3 \cong V_3 \otimes V_2 \cong V_3, \\ V_2 \otimes V_4 \cong V_4 \otimes V_2 \cong V_5, \\ V_2 \otimes V_5 \cong V_4 \otimes V_2 \cong V_4。 \end{cases}$$

计算 $V_3 \otimes V_3$, 根据引理 5, 不妨假设 $V_3 \otimes V_3 \cong n_{33}^1 V_1 \oplus n_{33}^2 V_2 \oplus n_{33}^3 V_3 \oplus n_{33}^4 V_4 \oplus n_{33}^5 V_5$,

可求得:

$$\begin{cases} n_{33}^1 = \frac{1}{24}(1 \times 1 \times 4 + 6 \times 1 \times 0 + 8 \times 1 \times 1 + 6 \times 1 \times 0 + 3 \times 1 \times 4), \\ n_{33}^2 = \frac{1}{24}(1 \times 1 \times 4 + 6 \times (-1) \times 0 + 8 \times 1 \times 1 + 6 \times (-1) \times 0 + 3 \times 4 \times 1), \\ n_{33}^3 = \frac{1}{24}(1 \times 2 \times 4 + 6 \times 0 \times 0 + 8 \times (-1) \times 1 + 6 \times 0 \times 0 + 3 \times 2 \times 4), \\ n_{33}^4 = \frac{1}{24}(1 \times 3 \times 4 + 6 \times 1 \times 0 + 8 \times 0 \times 1 + 6 \times 0 \times 0 + 3 \times 2 \times 4), \\ n_{33}^5 = \frac{1}{24}(1 \times 3 \times 4 + 6 \times (-1) \times 0 + 8 \times 0 \times 1 + 6 \times 1 \times 0 + 3 \times (-1) \times 4), \end{cases}$$

即得 $V_3 \otimes V_3 \cong V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ 。

同理,可以得到:

$$\begin{cases} V_4 \otimes V_4 \cong V_1 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5, \\ V_3 \otimes V_4 \cong V_3 \otimes V_5 \cong V_4 \oplus V_5, \\ V_4 \otimes V_5 \cong V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5, \\ V_5 \otimes V_5 \cong V_1 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5。 \end{cases}$$

接着算 S_4 的三维不可约表示幂公式, 设 $V_4^{\otimes n} \cong a_n V_1 \oplus b_n V_2 \oplus c_n V_3 \oplus d_n V_4 \oplus e_n V_5$,

可求得如下结果:

$$\begin{cases} V_4^{\otimes 1} \cong V_4, \\ V_4^{\otimes 2} \cong V_1 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5, \\ V_4^{\otimes 3} \cong V_1 \oplus V_2 \oplus 2V_3 \oplus 4V_4 \oplus 3V_5, \\ V_4^{\otimes 4} \cong 4V_1 \oplus 3V_2 \oplus 7V_3 \oplus 10V_4 \oplus 10V_5, \\ V_4^{\otimes 5} \cong 10V_1 \oplus 10V_2 \oplus 20V_3 \oplus 31V_4 \oplus 30V_5, \end{cases}$$

观察上面等式,由假设归纳不难发现,

$$\begin{cases} a_n = d_{n-1}, \\ b_n = e_{n-1}, \\ c_n = d_{n-1} + e_{n-1}, \\ d_n = a_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1}, \\ e_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1}. \end{cases} \quad (1)$$

式(1)等价于

$$T_n = AT_{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \end{pmatrix}.$$

通过迭代,可以得到 $T_n = A^{n-1}T_1$, 这样求 a_n, b_n, c_n, d_n, e_n 通项公式就转化成求 A 的 $n-1$ 次幂问题。

注意到 A 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix},$$

从而可得到 A 的所有特征值,分别为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 3$ 。

(a) 当 $\lambda_1 = 0$ 时,对应的特征向量为 $(1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0)^T$;

(b) 当 $\lambda_2 = -1$ 时,对应的特征向量为 $(0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1)^T, (-1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0)^T$;

(c) 当 $\lambda_3 = 1$ 时,对应的特征向量为 $(1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1)^T$;

(d) 当 $\lambda_4 = 3$ 时,对应的特征向量为 $\left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ 1\right)^T$ 。

从以上讨论可知,存在可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵,其中,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

通过计算,可以得到,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

因此,可以得到 $A^{n-1} = PA^{n-1}P^{-1}$,不妨设 $A^{n-1} = (a_{ij})_{n \times n}$;注意到 $T_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$,只需要算 $a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}, a_{54}$ 的值即可,通过计算可得:

$$\begin{cases} a_{14} = \frac{(-1)^n \cdot 3 + 2 + 3^{n-1}}{8}, \\ a_{24} = \frac{(-1)^{n+1} - 2 + 3^{n-1}}{8}, \\ a_{34} = \frac{(-1)^{n+1} + (-1)^n \cdot 3 + 2 \cdot 3^{n-1}}{8}, \\ a_{44} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 + 2 + 3^n}{8}, \\ a_{54} = \frac{(-1)^n - 2 + 3^n}{8}. \end{cases}$$

从而可得:

$$T_n = A^{n-1}T_1 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n \cdot 3 + 2 + 3^{n-1}}{8} \\ \frac{(-1)^{n+1} - 2 + 3^{n-1}}{8} \\ \frac{(-1)^{n+1} + (-1)^n \cdot 3 + 2 \cdot 3^{n-1}}{8} \\ \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 + 2 + 3^n}{8} \\ \frac{(-1)^n - 2 + 3^n}{8} \end{pmatrix},$$

又因为

$$V_4 \otimes V_4 \cong V_5 \otimes V_5,$$

所以,

$$V_4^{\otimes n} = V_5^{\otimes n} = \frac{(-1)^n \cdot 3 + 2 + 3^{n-1}}{8} V_1 \oplus$$

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n+1} - 2 + 3^{n-1}}{8} V_2 \oplus \\ & \frac{(-1)^{n+1} + (-1)^n \cdot 3 + 2 \cdot 3^{n-1}}{8} V_3 \oplus \\ & \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 + 2 + 3^n}{8} V_4 \oplus \\ & \frac{(-1)^n - 2 + 3^n}{8} V_5 \circ \end{aligned}$$

3 表示环及其性质

在算出了对称群 S_4 的所有特征标以及不可约表示张量积分解后,讨论 S_4 上表示环 $r(S_4)$ 及其性质。

定理 2 对称群 S_4 的表示环 $r(S_4)$ 同构于

$$r(S_4) \cong Z[x_1, x_2, x_3, x_4] / (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}),$$

其中,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - 1, y_2 = x_2^2 - x_2 - x_1 - 1, y_3 = x_4^2 - x_4 - x_3 - x_2 - 1, \\ y_4 &= x_3^2 - x_4 - x_3 - x_2 - 1, y_5 = x_1 x_2 - x_2, y_6 = x_1 x_3 - x_4, \\ y_7 &= x_1 x_4 - x_3, y_8 = x_2 x_3 - x_3 - x_4, y_9 = x_2 x_4 - x_3 - x_4, \\ y_{10} &= x_3 x_4 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \circ \end{aligned}$$

证明 根据引理 1 的证明,有以下结论:

$$\left\{ \begin{aligned} V_2 \otimes V_2 &\cong V_1, \\ V_3 \otimes V_3 &\cong V_1 \oplus V_2 \oplus V_3, \\ V_4 \otimes V_4 &\cong V_1 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5, \\ V_5 \otimes V_5 &\cong V_1 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5, \\ V_2 \otimes V_3 &\cong V_3, \\ V_2 \otimes V_4 &\cong V_5, \\ V_2 \otimes V_5 &\cong V_4, \\ V_3 \otimes V_4 &\cong V_4 \oplus V_5, \\ V_3 \otimes V_5 &\cong V_4 \oplus V_5, \\ V_4 \otimes V_5 &\cong V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5 \circ \end{aligned} \right.$$

记 $V_2 = x_1, V_3 = x_2, V_4 = x_3, V_5 = x_4$, 则

$$r(S_4) \cong Z[x_1, x_2, x_3, x_4] / (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}),$$

其中,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - 1, y_2 = x_2^2 - x_2 - x_1 - 1, y_3 = x_4^2 - x_4 - x_3 - x_2 - 1, \\ y_4 &= x_3^2 - x_4 - x_3 - x_2 - 1, y_5 = x_1 x_2 - x_2, y_6 = x_1 x_3 - x_4, \\ y_7 &= x_1 x_4 - x_3, y_8 = x_2 x_3 - x_3 - x_4, y_9 = x_2 x_4 - x_3 - x_4, \\ y_{10} &= x_3 x_4 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \circ \end{aligned}$$

对于有限群 $G, r(G)$ 与 $r_F(G)$ 是否半单,除了通过计算 Jacobson 根基来判定外,还可以由 Casimir 数来判定。Wang 等^[20]给出了 $r(G)$ 与 $r_F(G)$ 半单的充分必要条件,即 $r(G)$ 与 $r_F(G)$ 半单当且仅当它们的 Casimir 数非零。而 $r(G)$ 与 $r_C(G)$ 具有相同的 Casimir 数,因而可以知道 $r(G)$ 与 $r_C(G)$ 具有相同的半单性。此外,对于一般的群 G 在复数域上表示代数 $r_C(G)$ 都是半单的^[19],由此也进一步说明在常表示下的表示环都是半单的。事实上,对于 $r_Q(S_4)$ 而言,根据文献^[20]中的结果,笔者也计算了 $r_Q(S_4)$ 的 Casimir 数,其 Casimir 数为 288。由于 $r_Q(S_4)$ 的元素都是在乘法作用下是可交换的,因而其所有不可约表示都是一维的, $r_Q(S_4)$ 是五维代数,笔者则希望找到 $r_Q(S_4)$ 5 个一维不可约表示,并计算其 5 个中心本原幂等元。

定理 3 $r_Q(S_4)$ 的正则表示可分解为 5 个一维表示的直和,这 5 个一维表示分别由以下向量张成:

- ① $1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4,$
- ② $1 - x_1 - x_3 + x_4,$
- ③ $1 + x_1 - x_2,$
- ④ $-1 + x_1 - x_3 + x_4,$
- ⑤ $-1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \circ$

从而表示代数 $r_Q(S_4)$ 有 5 个中心本原幂等元,分别是

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{24}(1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4), \\ e_2 &= \frac{1}{4}(1 - x_1 - x_3 + x_4), \\ e_3 &= \frac{1}{3}(1 + x_1 - x_2), \\ e_4 &= -\frac{1}{4}(-1 + x_1 - x_3 + x_4), \\ e_5 &= -\frac{1}{8}(-1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4) \circ \end{aligned}$$

证明 注意到 $r_Q(S_4)$ 中所有元素在乘法作用下是可交换的, 则 $r_Q(S_4)$ 的所有不可约表示都是一维的, 考虑正则表示:

$$1 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)A_1,$$

$$x_1 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)A_2,$$

$$x_2 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)A_3,$$

$$x_3 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)A_4,$$

$$x_4 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)A_5,$$

其中,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

通过计算可知, A_i 均可对角化, 则存在 P_i , 使得 $P_i^{-1}A_iP_i = \Lambda_i$, 其中,

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

观察上面 P_i 与 Λ_i 可知, 存在 5 个公共的特征向量, 分别是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

根据上述 5 个公共特征向量可知,

$$(1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4)^2 = \lambda_1(1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4),$$

$$(1 - x_1 - x_3 + x_4)^2 = \lambda_2(1 - x_1 - x_3 + x_4),$$

$$(1 + x_1 - x_2)^2 = \lambda_3(1 + x_1 - x_2),$$

$$(-1 + x_1 - x_3 + x_4)^2 = \lambda_4(-1 + x_1 - x_3 + x_4),$$

$$(-1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4)^2 = \lambda_5(-1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4),$$

待定系数解得: $\lambda_1 = 24, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = -4,$

$$\lambda_5 = -8。$$

$r_Q(S_4)$ 的 5 个本原幂等元分别为

$$e_1 = \frac{1}{24}(1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4),$$

$$e_2 = \frac{1}{4}(1 - x_1 - x_3 + x_4),$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(1 + x_1 - x_2),$$

$$e_4 = -\frac{1}{4}(-1 + x_1 - x_3 + x_4),$$

$$e_5 = -\frac{1}{8}(-1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4)。$$

参考文献:

- [1] Redfield J H. The theory of group reduced distribution[J]. American Journal Mathematics, 1927,49:433-455.
- [2] Littlewood D E. The Kronecker product of symmetric group representations[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1956,31:89-93.
- [3] Gesse I M. Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions[J]. Contemporary Mathematics, 1984,34:289-301.
- [4] Lascoux A. Produit de Kronecker des representations du group symmetrique[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1980,795:319-329.
- [5] Manivel L. A note on certain Kronecker coefficients[J]. Proceedings of the American Mathematics Society, 2010,138(1):1-7.
- [6] Green J A. The modular representation algebra of a finite group[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1962,6:607-619.
- [7] Benson D J, Carlson J F. Nilpotent elements in the Green ring[J]. Journal of Algebra, 1986,104(2):329-350.
- [8] Benson D J, Parker R A. The Green ring of a finite group[J]. Journal of Algebra, 1984,87(2):290-331.
- [9] Gordon D J, Martin W L. Representations and characters of groups[J]. Physics Today, 1994,47(9):94.
- [10] Bardoe M K. Representation theory of finite groups[M]. Salt Lake City: Academic Press, 1965.
- [11] Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of non-nilpotent type[J]. Journal of Algebra, 2016,449:108-137.
- [12] Archer L. On certain quotients of the Green rings of dihedral 2-groups[J]. Journal of Pure Applied Algebra, 2008,212(8):1888-1897.
- [13] 董井成,陈惠香. 二面体群量子偶的表示环[J]. 数学学报, 2013,56(3):331-342.
- [14] Witherspoon S J. The representation ring of the quantum double of a finite group[J]. Journal of Algebra, 1996,179(1):305-329.
- [15] Wakui M. Various structures associated to the representation categories of eight-dimensional nonsemisimple Hopf algebra[J]. Algebra & Representation Theory, 2004(5):491-515.
- [16] Chen H X, Oystaeyen F V, Zhang Y H. The Green rings of Taft algebras[J]. Proceedings of the American Mathematics Society, 2012,142(3):765-775.
- [17] Li L B, Zhang Y H. The Green rings of the generalized Taft Hopf algebras[J]. Contemporary Mathematics, 2013,585:275-288.
- [18] Sun H, Mohammed S E, Lin W J, et al. Green rings of Drinfeld doubles of Taft algebras[J]. Communications in Algebra, 2020,48(9):3933-3947.
- [19] Etingof P, Gelaki S, Nikshych D, et al. Tensor categories[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2015.
- [20] Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. A criterion for the Jacobson semisimplicity of the Green ring of a finite tensor category[J]. Glasgow Mathematical Journal, 2018,60:253-272.
- [21] 曹锡华. 时俭益. 有限群表示论[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2009.

【责任编辑:卓祯雨】