

文章编号:1671-4229(2024)02-0084-07

基于参数化水平集的三维多相材料拓扑优化方法

熊锐, 徐安*

(广州大学 风工程与工程振动研究中心, 广东 广州 510006)

摘要: 参数化水平集拓扑优化解决了传统水平集方法数值计算复杂的问题, 由于水平集拓扑优化需要引入更高级别的函数来构建拓扑模型, 大部分关于参数化水平集拓扑优化的研究止于二维。文章在二维参数化水平集拓扑优化的基础上拓展到三维, 结合点云的思想解决了三维拓扑构型的表达问题, 并通过悬臂梁、简支梁等典型数值算例验证了算法能解决三维水平集无法引入更高维度函数等问题, 亦讨论了引入 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 多材料插值模型的多相材料拓扑优化方法, 以供多相材料拓扑优化方面研究进行参考。

关键词: 三维; 参数化水平集; 点云; 多相材料; 拓扑优化

中图分类号: TU12 **文献标志码:** A

3D topology optimization of multiphase materials using parametric level set method

XIONG Rui, XU An*

(Research Center for Wind Engineering and Engineering Vibration, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Parametric level set topology optimization addresses numerical complexities associated with traditional level set methods. Since topological optimization using level sets requires introducing more advanced functions to construct topological models, most research on parametric level set topology optimization has been limited to two dimensions. This article extends the foundation of two-dimensional parametric level set topology optimization to three dimensions. By incorporating the concept of point clouds, it tackles the representation challenges of three-dimensional topological configurations. The algorithm is validated through typical numerical examples involving cantilever beams and simply supported beams, demonstrating its ability to address issues that arise when introducing higher-dimensional functions in three-dimensional level sets. Additionally, the article discusses the application of the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) multi-material interpolation model for multi-material topology optimization, providing valuable insights for further research in this field.

Key words: 3D; parametric level sets; point clouds; multiphase materials; topology optimization

收稿日期: 2022-11-21; 修回日期: 2023-01-16

基金项目: 广东省科技计划项目海外名师资助项目(2020A1414010079)

作者简介: 熊锐(1998—), 男, 博士研究生. E-mail: 756982760@qq.com

*通信作者. E-mail: xuan@gzhu.edu.cn

引文格式: 熊锐, 徐安. 基于参数化水平集的三维多相材料拓扑优化方法[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2024, 23(2): 84-90.

连续体拓扑优化在给定边界和约束条件下,基于有限元方法和数值分析方法并结合优化理论对结构设计域内结构进行材料分布进行优化,得到结构目标函数(如刚度、重量等)的最优解^[1]。现有的拓扑优化方法包括均匀化方法^[2]、变密度法^[3-4]、渐进结构优化方法^[5-6]、水平集法^[7-8]、独立连续映射法^[9]和可移动变形组件法等方法^[10]。多数算法都是先从二维拓扑开始研究,再拓展到三维,Andreassen 等^[11]在2011年总结并推导了二维 SIMP 法,接着 Liu 等^[12]总结并推导了三维 SIMP 法,之后陆续有 Wei 等^[13]在2018年总结并推导了二维 PLSM 法等。

在拓扑优化中,往往使用的是一种材料进行材料分布优化。但在大部分机械设计制造过程中会使用多种材料,多材料结构也具有更加优良的性能。基于此,多相材料拓扑优化显得尤为重要。Bendsoe 等^[4]研究了 SIMP 的多材料拓扑优化方法,Huang 等^[14]用基于 SIMP 的多材料插值方法,将多材料结构拓扑优化应用于 BESO(Bi-directional Evolutionary Structural Optimization)。本文研究了三维参数化水平集拓扑优化问题,并基于参数化水平集拓扑优化引入 SIMP 多材料插值模型,讨论了多相材料拓扑优化问题。

1 参数化水平集

1.1 水平集拓扑优化方法

水平集方法通过引入高一维度的水平集函数表达结构拓扑构型,水平集函数值的大小用于区分结构的空洞或者实体部分,其中,大于零部分为结构的实体,小于零部分为结构的空洞部分^[15],因此,水平集函数的零水平面可作为结构的边界。在优化过程中,拓扑优化通过改变结构的拓扑信息更新水平集函数值,从而改变结构的拓扑构型。以 Φ 表示水平集函数,基于水平集函数的隐式结构表述模型如下:

$$\begin{cases} \Phi(x) > 0, & \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega, \\ \Phi(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \\ \Phi(x) < 0, & \forall x \in D \setminus \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 为结构设计域内的节点坐标, $\forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega$ 为结构的实体部分的点, $\forall x \in \partial\Omega$ 为结构边界上

的点, $\forall x \in D \setminus \partial\Omega$ 为结构孔洞部分的点。

在水平集函数中引入时间变量 t ,同时公式(1)中描述零水平面的方程针对时间变量在两边同时求偏导,可得到一阶哈·密顿-雅克比偏微分方程,即如式(2)所示:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} - v_n |\nabla \Phi(x)| &= 0, \\ \Phi(x, 0) &= \Phi_0(x), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, v_n 是结构边界的法向速度,

$$v_n = \frac{\partial x}{\partial t} \left(\frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right). \quad (3)$$

由上述可知,结构边界的动态更新可表述为求解一阶哈·密顿-雅克比方程。由于水平集函数是隐式的,因此针对水平集函数的偏微分方程并未存在一个显式的表述形式。在数学上,水平集函数的零水平面演化对应哈·密顿-雅克比方程的稳态解,一般可采用有限差分法实现对偏微分方程的求解。

1.2 基于径向基函数的参数化水平集方法

1.2.1 水平集方程参数化

径向基函数(Radial Basis Function, RBF)是一种利用一元函数表述多元函数的有效工具,常用于拟合或重构大规模散乱标量数据的几何形状。RBF 插值方法具有计算简洁、储存简便、效率高等优点,近十几年来获得了广泛的关注,并且 RBF 插值方法可确保近似曲面或超曲面的光滑性,因此,该方法与水平集方法结合以后,能够快捷地逼近任何可能的形状与拓扑,并保持了水平集方法隐式边界描述的优点。

径向基函数插值矩阵是以特定参考点为中心的径向对称矩阵,可如式(4)表示:

$$\varphi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|), \quad x_i \in D. \quad (4)$$

本文使用 MQ(MultiQuadratics)样条函数建立径向基函数在水平集方程中的插值模型。MQ 样条函数的计算公式如下:

$$\varphi_i(x) = \sqrt{(x - x_i)^2 + c^2}, \quad x_i \in D, \quad (5)$$

其中, c 为曲线的曲率因子,一般设定为固定的常数。从方程(5)可以看出,高次插值曲线是无限平滑和连续可微的^[13]。常数 c 的大小和曲线的曲率有关, c 越大,曲线的曲率越小; c 越小,曲线的曲率越大。

选用 n 个不同参考点的基函数矩阵来拟合水平集方程在 n 个单元节点处的值 $\Phi(x, t)$, 可以写成:

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \alpha_i(t) + p(x), \quad (6)$$

其中, $\alpha_i(t)$ 为第 i 个参考点上径向基函数处的扩展系数, 为了保证方程的可解性, 引入一个一阶多项式 $p(x)$ 作为方程的线性和常数项部分。 $p(x)$ 可以表述为

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2y + p_3z, \quad (7)$$

其中, p_0, p_1, p_2 和 p_3 分别为多项式 $p(x)$ 的系数, $p(x)$ 的引入是为了确保水平集方程解的正定性。为了保证解的唯一性^[16], 还需满足以下约束条件:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 0; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i &= 0; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

结合公式(7)和公式(8), 将公式(6)重写为向量的形式:

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) \alpha(t), \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = \\ [\Phi_1(t) \quad \Phi_1(t) \quad \cdots \quad \Phi_1(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \end{aligned} \quad (10)$$

$\varphi(x) =$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_n) & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_n) & 1 & x_n & y_n & z_n \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & \cdots & z_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\alpha(t) = [\alpha_1(t) \quad \cdots \quad \alpha_n(t) \quad p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T. \quad (12)$$

1.2.2 算法求解

由于公式(9)中 $\Phi(x)$ 与 t 相互独立, 因此, 时间因子 t 仅与扩展系数 $\alpha(t)$ 有关。将公式(9)代到 Hamilton-Jacobi 方程中, 得到关于扩展系数 $\alpha(t)$ 对虚拟时间因子 t 的支配方程:

$$\varphi(x) \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} - v_n |(\nabla \varphi(x)) \alpha(t)| = 0, \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} |(\nabla \varphi(x)) \alpha(t)| = \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \alpha(t)\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial y} \alpha(t)\right)^2 +} \\ \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial z} \alpha(t)\right)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \\ \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial y} = \\ \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial y} \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial z} = \\ \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial z} \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial z} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T. \end{aligned} \quad (17)$$

为了求解扩展系数和保持矩阵的正定性, 必须引入以下侧面约束条件^[17]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i &= 0; \quad \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i y_i &= 0; \quad \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i z_i = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

在基函数种类和初始水平集方程 $\Phi(x, t_0)$ 已知的条件下, 结合公式(9)可求得初始的设计变量 $\alpha(t_0)$:

$$\alpha(t_0) = \varphi(x)^{-1} \Phi(x, t_0). \quad (19)$$

此时, 最初的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程被离散化为一个耦合的常微分方程组。而对于常规的常微分方程而言, 一般运用一阶欧拉法进行求解, 并且可以通过以下公式给出近似解:

$$\alpha(t_{i+1}) = \alpha(t_i) + \Delta t \varphi(x)^{-1} v_n |(\nabla \varphi(x)) \alpha(t_i)|, \quad (20)$$

其中, $\alpha(t_i)$ 为第 i 次迭代时设计变量的大小, t 为时间步长。

为防止 $|\nabla \Phi|$ 边界周围过大或过小, 通过以下近似重新初始化方案, 将整个设计域中的水平集函数 Φ 更新为 Φ^u :

$$\Phi^u = \frac{\Phi}{\text{mean}(|\nabla \Phi_1^0|, |\nabla \Phi_2^0|, \dots, |\nabla \Phi_r^0|)}, \quad (21)$$

其中, Φ_r^0 和 $\nabla\Phi_r^0$ 分别是零水平集周围的第 r 点上的水平集值和梯度, $|\cdot|$ 表示 l^2 范数, $mean(f_1, f_2, \dots, f_r)$ 表示 $f_i (i=1, 2, \dots, r)$ 的平均值。公式(21)中的分母表示 $|\nabla\Phi|$ 结构边界周围, 即零水平集。由于 Φ 和 α 之间的关系是线性的, 可以将公式(21)重写为从 α 到 α^u 的更新方案:

$$\alpha^u = \frac{\alpha}{mean(|\nabla\Phi_1^0|, |\nabla\Phi_2^0|, \dots, |\nabla\Phi_r^0|)} \quad (22)$$

为了避免水平集方程值在进行欧拉求解时无限增大, 可以运用狄拉克方程 $\delta(\Phi)$ 进行约束^[18]:

$$\delta(\Phi) = \begin{cases} 0, & \Phi \leq -\Delta, \\ \frac{3}{4\Delta} \left(1 - \frac{\Phi^2}{\Delta^2}\right), & -\Delta < \Phi < \Delta, \\ 0, & \Phi \geq \Delta. \end{cases} \quad (23)$$

公式(20)结合公式(22), 再加入狄拉克方程 $\delta(\Phi)$ 进行约束, 得到:

$$\alpha(t_{i+1}) = \alpha(t_i) + \Delta t \varphi(\mathbf{x})^{-1} v_n \delta(\Phi(\mathbf{x}, \alpha^u(t_i))), \quad (24)$$

其中, $\varphi(\mathbf{x})^{-1}$ 为径向基函数矩阵 $\varphi(\mathbf{x})$ 的逆矩阵, $\Phi(\mathbf{x}, \alpha^u(t_i))$ 为水平集方程在各个节点上的值矩阵。

2 拓扑结果的特殊处理与拓扑构型的表达

点云技术为激光雷达技术中的点云数据显示, 该技术通过激光雷达进行数据采集, 使用算法将数据在保留三维坐标信息的基础上进行 0/1 二值化处理, 将目标数据处理成表达为 1 的有效数据, 非目标数据转化成表达为 0 的无效数据。对采集的数据进行点云滤波和平面检测, 以滤除干扰信息和非目标信息^[19], 并通过点集的形式表达目标的形状。

根据水平集函数的定义, 水平集值大于零为实域, 小于零为空域。在二维问题上, 只需要引入三维水平集函数, 再使用零水平集面表达拓扑构型即可。当遇到三维问题时, 需要引入更高维度的表达水平集函数, 但是四维水平集函数难以进行图像展示。基于此, 本文在点云表达的基础上使用材料的属性取代第四个维度, 进行类似于点云数据的 0/1 二值化处理, 实域部分对应有效数据的 1, 空域部分对应无效数据的 0。经此二值化

处理后的数据转换成点集的形式, 即可得到结构的拓扑构型。

以一个网络划分为 $60 * 30$ 的二维悬臂梁为例, 右端施加一个向下的集中力 $F=1$, 实相部分的弹性模量 $E_0=1$, 空相部分的弹性模量 $E_{min}=1 * e^{-9}$, 材料的泊松比 $\nu=0.3$, 体积分数 $Volfrac$ 设定为 0.5。使用 MATLAB 进行优化编程。使用点集的形式得到的拓扑构型如图 1(a) 所示。

为了使拓扑构型具有连续性, 把每一个点变成一个矩形单元, 即可得到连续且清晰的构型, 如图 1(b) 所示。

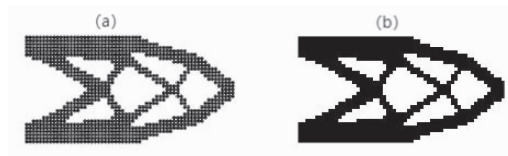


图 1 拓扑构型表达

Fig. 1 Topological conformation expression

3 三维算例验证

对于三维拓扑优化, Liu 等^[12] 总结并推导了三维 SIMP 方法, 算例中使用推导出的三维水平集与该方法进行对比验证。

3.1 三维悬臂梁

以一个网络划分为 $60 * 30 * 3$ 的三维悬臂梁为例, 左端为固定约束, 右端添加的为一个方向向下的均布荷载 $F=1$, 如图 2 所示, 实相部分的弹性模量 $E_0=1$, 空相部分的弹性模量 $E_{min}=1 * e^{-9}$, 材料泊松比 $\nu=0.3$, 体积分数 $Volfrac$ 为 0.5, SIMP 法的惩罚因子 $penal=3$, 敏度过滤半径 $r_{min}=1.5$ 。使用 MATLAB 进行优化编程。

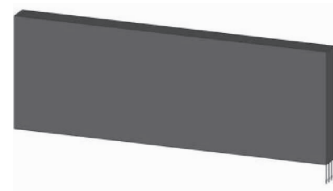


图 2 初始设计域

Fig. 2 Initial design domain

三维参数化水平集拓扑构型如图 3(a) 所示, SIMP 法拓扑构型如图 3(b) 所示, 两种优化方法都得到了约束条件下合理的拓扑构型, 两种方法的

目标函数收敛曲线如图 4 所示。

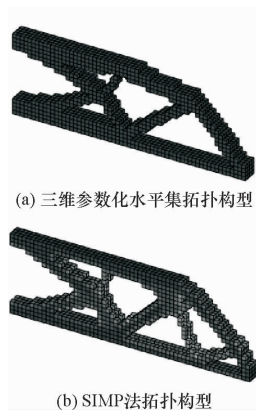


图 3 拓扑结果

Fig. 3 Topology results

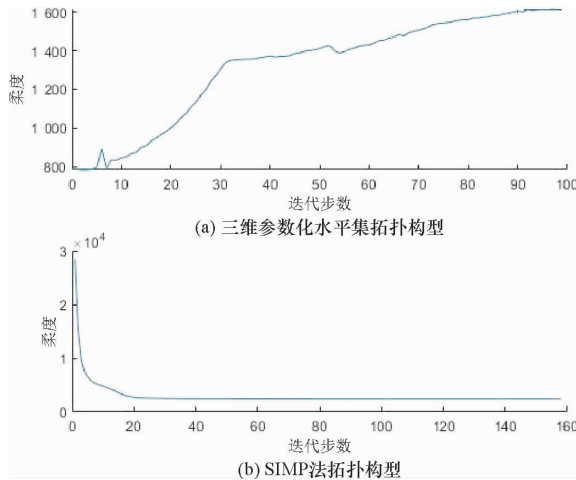


图 4 柔度收敛曲线

Fig. 4 Compliance convergence curves

3.2 三维简支梁算例

以一个网格划分为 $60 \times 30 \times 3$ 的简支梁为例,约束条件为组合简支约束,中间施加一个向下的均布荷载 $F = 1$ 。如图 5 所示,实相部分弹性模量 $E_0 = 1$,空相部分弹性模量 $E_{\min} = 1 * e^{-9}$,材料泊松比 $\nu = 0.3$,体积分数 $Volfrac$ 为 0.5 ,SIMP 法的惩罚因子 $penal = 3$,敏度过滤半径 $r_{\min} = 1.5$ 。使用 MATLAB 进行优化编程。

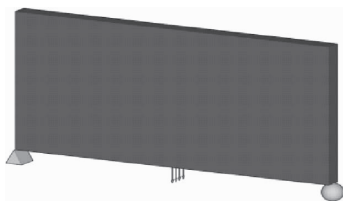


图 5 初始设计域

Fig. 5 Initial design domain

三维参数化水平集拓扑构型如图 6(a) 所示, SIMP 法拓扑构型如图 6(b) 所示,两种优化方法均得到了约束条件下合理的拓扑构型。两种方法的目标函数收敛曲线如图 7 所示。



图 6 拓扑结果

Fig. 6 Topology results

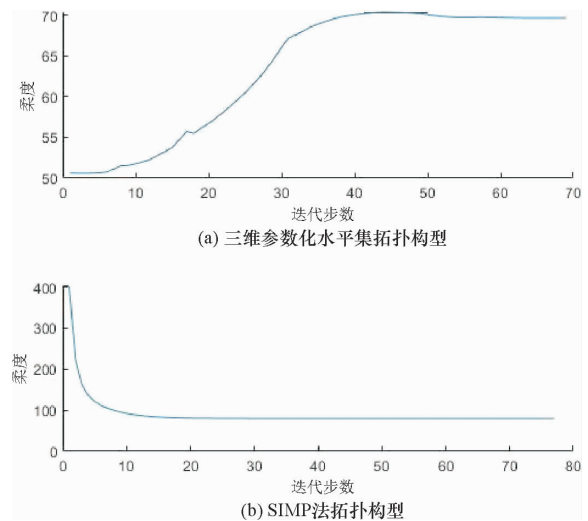


图 7 柔度收敛曲线

Fig. 7 Compliance convergence curves

4 多相材料拓扑优化

传统拓扑优化问题通常聚焦于单一材料的优化问题,但在机械制造中需要使用多种材料。基于此,本文提出了一种多相材料的拓扑优化方法。该方法在参数化水平集拓扑优化方法得到最优结构的基础上,引入 SIMP 插值模型对结构的材料分布进行优化,得到了由多种材料组成的拓扑结构。

多相材料拓扑本质上是多种材料的合理分配问题,该优化问题可等同为一个设计域内的材料分布问题,即通过确定设计域中各点是否存在材料以及存在何种材料,以实现多种材料在结构中的最优分配。

以两相材料为例,在水平集优化结果的基础上引入 SIMP 两相材料插值模型^[20]进行优化,即可得到所求的最优两相优化结果。SIMP 两相材料插值模型如下:

$$E(x_{e1}, x_{e2}) = x_{e1} [x_{e2} E_1 + (1 - x_{e2}) E_2], \quad (25)$$

$$(x_{e1}, x_{e2}) = \begin{cases} (0, 0), & \text{void,} \\ (1, 0), & \text{材料 1,} \\ (1, 1), & \text{材料 2.} \end{cases} \quad (26)$$

以结构最小柔顺度作为目标函数,建立具有体积约束的水平集拓扑优化数学模型,具体表示如下:

$$\begin{aligned} \text{Min: } J(\Phi) &= \int_D \varepsilon_{ij}(u) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) H(\Phi) d\Omega, \\ \text{s. t. : } \int_D H(\Phi) d\Omega - V_{\max} &< 0, \end{aligned} \quad (27)$$

其中, E 为弹性模量,此处用两相材料插值模型代替, ε 为应变张量, $H(\Phi)$ 为 Heaviside 方程, V_{\max} 为设定的提及约束最大值。

采用基于梯度的方法,将约束条件与目标函数相结合,建立了如下的拉格朗日方程:

$$\begin{aligned} L(u, \Phi) &= \\ &\int_D \varepsilon_{ij}(u) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) H(\Phi) d\Omega + \\ &\lambda \left(\int_D H(\Phi) d\Omega - V_{\max} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

建立目标函数对虚拟时间因子 t 的拓扑导数:

$$\frac{\partial L(u, \Phi)}{\partial t} = \int_D (\lambda - \varepsilon_{ij}(u) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u)) \delta(\Phi) \nabla \Phi d\Omega, \quad (29)$$

其中, λ 为拉格朗日乘子,其值恒为正,是一个用于处理体积分数的约束,一般运用二分算法求得。

由于公式(29)的面积分仅受水平集方程曲线变化的影响,将拓扑导数方程转化为线积分的形式,得到:

$$\frac{\partial L(u, \Phi)}{\partial t} = \int_D (\lambda - \varepsilon_{ij}(u) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u)) \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} ds, \quad (30)$$

其中,

$$ds = \delta(\Phi) |\nabla \Phi| d\Omega. \quad (31)$$

式(30)中, s 为水平集方程的曲线,将式(3)带入,得

$$\frac{\partial L(u, \Phi)}{\partial t} = \int_D (\lambda - \varepsilon_{ij}(u) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u)) v_n ds. \quad (32)$$

若要使目标函数的值沿着最快的速度下降,只需使法向速度场 v_n 满足以下条件:

$$v_n = \varepsilon_{ij}(u) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) - \lambda. \quad (33)$$

将式(33)带入式(24)以更新设计变量 α ,并结合式(9)即可对水平集函数 Φ 进行更新。

以一个网格划分为 $60 * 30$ 的二维悬臂梁为例,右端施加一个方向向下的集中力 $F = 1$,实体部分由两种材料组成。材料 1 的弹性模量 $E_1 = 1.25$,材料 2 的弹性模量 $E_2 = 0.75$ 。材料 1 和材料 2 使用比例为 1:1,空相部分的弹性模量 $E_{\min} = 1 * e^{-9}$,两种材料的泊松比 $\nu = 0.3$,体积分数 Volfrac 为 0.5。使用 MATLAB 进行优化编程。

图 8(a)为水平集拓扑的拓扑构型,图 8(b)为基于水平集拓扑后的两相材料拓扑优化构型,其中紫色部分为材料 1,蓝色部分为材料 2。可以较为清晰地看出,弹性模量较大的材料大多分布在支座部分和受力端,其余部分沿着传力路径分布。这样的材料分布符合力学理论的合理分布。

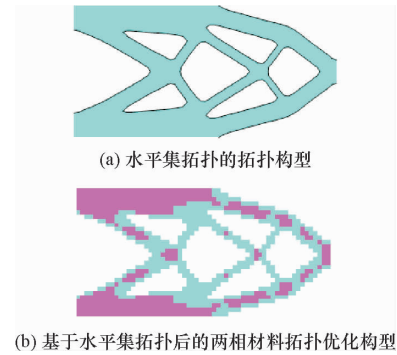


图 8 拓扑结果

Fig. 8 Topology results

5 结 论

本文在二维参数化水平集拓扑优化的基础上讨论了三维问题,使用点云数据表达的思想解决了三维水平集图形表达问题,并分析了该方法在三维悬臂梁和简支梁模型上的适用性。结果表

明,该方法可以有效地解决水平集需要引入更高维度而无法进行图形表达的问题。

本文还对参数化水平集拓扑后的结果进行了

进一步的材料分布优化。在拓扑构型中引入 SIMP 多材料插值模型进行优化,得到了两相材料的优化结果,以供多相材料拓扑优化研究参考。

参考文献:

- [1] 周克民,李俊峰,李霞. 结构拓扑优化研究方法综述[J]. 力学进展,2005,35(1):69-76.
- [2] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1988,71(2):197-224.
- [3] Rozvany G I N, Zhou M, Birker T. Generalized shape optimization without homogenization[J]. Structural Optimization, 1992,4(3):250-252.
- [4] Bendsoe M P, Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999,69(9):635-654.
- [5] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & Structures, 1993,49(5):885-896.
- [6] Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm[J]. Engineering Computations (Swansea Wales),1998,15(8):1031-1048.
- [7] Allaire G, Jouve F, Toader A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. Journal of Computational Physics,2004,194(1):363-393.
- [8] Wang M Y, Wang X M, Guo D M. A level set method for structural topology optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2003,192(1/2):227-246.
- [9] Sui Y K, Yang D Q. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model[J]. Acta Mechanica Sinica,1998,14(2):179-185.
- [10] Zhang W S, Yuan J, Zhang J, et al. A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model[J]. Structural Multidisciplinary Optimization,2016,53(6):1243-1260.
- [11] Andreassen E, Clausen A, Schevenels M, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011,43(1):1-16.
- [12] Liu J K, Tovar A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab[J]. Structural Multidisciplinary Optimization,2014,50(6):1175-1196.
- [13] Wei P, Li Z Y, Li X P, et al. An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018,58(2):831-849.
- [14] Huang X, Xie Y M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials [J]. Computational Mechanics,2009,43(3):393-401.
- [15] 魏鹏,蒋子润. 引入水平集带的参数化水平集结构拓扑优化方法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版),2021,49(10):87-94.
- [16] Morse B S, Yoo T S, Rheingans P, et al. Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Application, May 07-11, 2001[C]. Piscataway: IEEE, 2001.
- [17] Wang S Y, Lim K M, Khoo B C, et al. An extended level set method for shape and topology optimization[J]. Journal of Computational Physics,2007,221(1):395-421.
- [18] Wei P, Wang W W, Yang Y, et al. Level set band method: A combination of density-based and level set methods for the topology optimization of continuums[J]. Frontiers of Mechanical Engineering,2020,15(3):390-405.
- [19] 赵丽娜,李晶,翟美珠. 基于激光三维点云技术的3D景观建模设计[J]. 应用激光,2022,42(4):167-172.
- [20] Bendsoe M P, Sigmund O. Topology optimization: Theory, methods and applications[M]. Berlin: Springer,2003.

【责任编辑:孙向荣】