第 23 卷　第 6 期　　广州大学学报(自然科学版)　　Vol. 23　No. 6
2024 年　12 月　　Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)　　Dec.　2024

文章编号:1671-4229(2024)06-0058-08

环反同态同构定理

张雷铃，孟凡宁*，周启深
(广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州　510006)

摘　要：反同态映射是使运算反序的映射，与同态映射扮演着相同的角色，在代数体系的结构和性质研究中极其重要。文章根据环同态映射的同构定理将反同态映射平行到环理论的结构中，给出了环反同态同构定理，以便能够挖掘出更多关于环的结构和性质的一些结论。

关键词：同态；反同态；商环；反商环；同构定理
中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A

The isomorphism theorems under anti-homomorphism in rings

ZHANG Lei-ling, *MENG Fan-ning**, *ZHOU Qi-shen*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Anti-homomorphism is the map reversing operation which plays the same role with homomorphism, it is essential in the study of structures and properties of algebraic systems. According to the isomorphism theorems of homomorphism in rings, this paper parallels the anti-homomorphism to the structure of ring theory and gives isomorphism theorems under anti-homomorphism in order to characterize more results about the structure and properties of rings.

Key words: homomorphism; anti-homomorphism; quotient ring; anti-quotient ring; isomorphism theorem

群论中，有了商群的定义才有了群论中的 3 个同构定理，而商群又建立在正规子群的基础上，因此，正规子群与群论中的 3 个同构定理密切相关。而环论中，理想的概念正是对应于群论中的正规子群，环论中 3 个同构定理正是源于群论中的 3 个同构定理。环同构定理在环论中的研究非常重要，它有助于理解不同环之间的关系，简化了环的研究和分类，也为解决一些具体问题提供了方便。通过环同构定理，可以将一个复杂的环转化为一个已知性质的简单环，从而更好地理解和研究环的性质和结构。环同构定理是一种强大的数学工具，它在多个学科和领域中都有重要的应用，帮助人们理解和解决各种复杂的问题。文献[1]基于信号的时域空间和频域空间是环同构，同构映射是傅里叶变换，根据希尔伯特空间性质和环同构，得出了傅里叶变换的一些性质；文献[2]研究对合三元半群的幂半环的性质与结构，给出了两个对合三元半群的幂半环同构的一个充分条件；文献[3]给出 JSL 代数上环同构的刻画；文献[4]通过环同构用矩阵 $\boldsymbol{\theta}(a)$ 表示 $C\ell_{1,2}$ 中的元素 a，并引入 $C\ell_{1,2}$ 中元素 Moore-Penrose 逆的概念。

环同态映射满足条件 $f(ab)=f(a)f(b)$，它在

收稿日期：2024－07－05；**修回日期**：2024－09－05
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11701111)；广东省自然科学基金资助项目(2016A030310257)
作者简介：张雷铃(1999—)，女，硕士研究生. E-mail:1562824360@qq.com
*通信作者. E-mail:mfnfdbx@163.com
引文格式：张雷铃，孟凡宁，周启深. 环反同态同构定理[J]. 广州大学学报(自然科学版)，2024，23(6):58-65.

环同构定理中扮演着重要角色。反同态映射是使运算反序的映射,它也是代数学的重要概念,它为代数体系的研究提供了另一种途径。反同态映射是研究代数体系结构的重要方法。当两个代数体系之间具有反同态关系时,就可以利用已知代数体系的结构和性质来了解未知代数体系的结构和性质,这为研究抽象的代数体系带来了极大的方便。那么对于反同态映射,环是否具有同样平行的同构定理?

文献[5-9]研究群论中反同态和反同构的一些性质,给出了与群同态定理、同构定理相平行的群反同态、反同构定理。而环同构定理又源于群同构定理,自然地要考虑与环同态定理、同构定理相平行的环反同态定理、环反同构定理。鉴于此,文献[10-11]研究环的反同态所具有的传递性质;文献[12]提出了反商环的概念,并利用反商环给出了环反同态基本定理以及与环同态结构平行的一些性质;文献[13-15]进一步运用反同态给出了两个环的代数结构和性质之间的异同;文献[16]研究了素数环的偏导对非零理想的同态或反同态的作用,并在半素数的情况下举例说明;文献[17]分别证明了逆导数在素环 R 的非零右理想 U 上是同态或反同态的情况;文献[18]将反同态与同态推广到李理想,并通过研究在更一般情况下的素环,推广了 Rehman 的一个定理;文献[19]讨论了半素环的非零左理想中同态与反同态的广义导数;文献[20]研究了在素环中同态或反同态的导数。由于环同态与环反同态、商环与反商环在环中扮演的角色相似,本文将环同态的相关同构定理平行到环反同态上,得到了环反同态第一、第二、第三同构定理,并且得出环反同态第三同构定理的一般形式,使得在反同态的条件下也可得出环之间的同构关系或反同构关系,完善了代数体系的结构和性质。定理 6 将同态映射变换为反同态映射,可以得到反商环 $I/_{反}(I\cap J)$ 与反商环 $(I+J)/_{反}J$ 之间的同构关系;定理 10 若将同态映射变换为反同态映射,则可以得出反商环 $A/_{反}J$ 与商环 A/I 的商环 $(A/I)/(J/I)$ 之间的反同构关系。

1　预备知识

定义 1[11]　一个环 R 到环 $\bar{R}$ 的映射 ϕ 称为环 R 到环 $\bar{R}$ 的反同态映射,如果对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 有

(1) $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$;

(2) $\phi(xy)=\phi(y)\phi(x)$。

进一步地,当 ϕ 为反同态满射时,称环 R 与 $\bar{R}$ 反同态满射;当 ϕ 为反同态双射时,称环 R 与 $\bar{R}$ 反同构,记为 $R\overset{反}{\cong}\bar{R}$。

定义 2[21]　设 R 是一个环,I 是 R 的一个理想,R 关于 I 的商集 $R/I=\{\bar{x}\mid\bar{x}=x+I,x\in\mathbf{R}\}$ 对加法运算 $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$(i. e. $(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$)和乘法运算 $\bar{x}\bar{y}=\overline{xy}$(i. e. $(x+I)(y+I)=xy+I$)构成的环,称为 R 关于 I 的商环。

定义 3[12]　一个环 R 关于其理想 N 的陪集对于以下运算构成的环叫做 R 关于 N 的反商环,记作 $R/_{反}N$。

(1) 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,$(a+N)+(b+N)=(a+b)+N$;

(2) 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,$(a+N)(b+N)=ba+N$。

引理 1[22]　设 $\mathrm{Hom}_*[A,B]$ 为环 A 到环 B 的所有同态映射的集合,$\mathrm{Hom}^*[A,B]$ 为环 A 到环 B 的所有反同态映射的集合,则有

(1) 若 $\phi\in\mathrm{Hom}_*[A,B]$,$\psi\in\mathrm{Hom}_*[B,C]$,则 $\psi\circ\phi\in\mathrm{Hom}_*[A,C]$;

(2) 若 $\phi\in\mathrm{Hom}_*[A,B]$,$\psi\in\mathrm{Hom}^*[B,C]$,则 $\psi\circ\phi\in\mathrm{Hom}^*[A,C]$;

(3) 若 $\phi\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$,$\psi\in\mathrm{Hom}^*[B,C]$,则 $\psi\circ\phi\in\mathrm{Hom}_*[A,C]$;

(4) 若 $\phi\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$,$\psi\in\mathrm{Hom}_*[B,C]$,则 $\psi\circ\phi\in\mathrm{Hom}^*[A,C]$。

引理 2[21]　假定 R 和 $\bar{R}$ 是两个环,ϕ 是 R 到 $\bar{R}$ 的满同态映射,那么同态核 $I=\ker\phi=\{a\in\mathbf{R}\mid\phi(a)=0\}$ 是 R 的理想,并且 $R/I\cong\bar{R}$。

引理 3[13]　假定 R 和 $\bar{R}$ 是两个环,ϕ 是 R 到 $\bar{R}$ 的反同态满射,那么反同态核 $I=\ker\phi=\{a\in\mathbf{R}\mid\phi(a)=0\}$ 是 R 的理想,并且 $R/I\overset{反}{\cong}\bar{R}$。

引理 4[12]　假定 R 和 $\bar{R}$ 是两个环,ϕ 是 R 到 $\bar{R}$ 的反同态满射,那么反同态核 $I=\ker\phi=\{a\in\mathbf{R}\mid\phi(a)=0\}$ 是 R 的理想,并且 $R/_{反}I\cong\bar{R}$。

2　环反同态同构定理

2.1　环反同态第一同构定理

环同态第一同构定理是在同态映射 $\phi:A\to B$

与同态映射$\pi:A\to A/I$的基础上给出的同构定理,若将同态映射$\pi:A\to A/I$变换为反同态映射$\pi:A\to A/_{反}I$,则可以得出反同构定理;若将同态映射$\phi:A\to B$变换为反同态映射,则可以得出同构定理或反同构定理。

定理1[23](环同态第一同构定理) 若$\phi:A\to B$是环同态,$I=\ker\phi$,则$A/I\cong\phi(A)$。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \phi(a) \\ A/I \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

环同态第一同构定理中$\phi:A\to B$,$\pi:A\to A/I$均为同态映射,若ϕ、π其中之一为反同态或ϕ、π同时为反同态,则可以得出环反同态第一同构定理,其中,若ϕ为反同态,π为同态时,由文献[13]得出;若ϕ、π同时为反同态时,由文献[12]得出。

定理2(文献[13]的定理10) 设A和B是两个环,$\phi\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$为满射,反同态核$\ker\phi=:I$,则存在反同构$\psi:A/I\to B$,使得$\psi\circ\pi=\phi$,其中,$\pi:A\to A/I$为自然满同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/I \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

定理3(文献[12]的定理3) 设A和B是两个环,$\phi\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$为满射,反同态核$\ker\phi=:I$,则存在同构$\psi:A/_{反}I\to B$,使得$\psi\circ\pi=\phi$,其中,$\pi:A\to A/_{反}I$为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/_{反}I \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

若ϕ为满同态,π为反同态时,得出以下结论。

定理4 设A和B是两个环,$\phi\in\mathrm{Hom}_*[A,B]$为满射,$C$为$A$的一个理想且$C\subseteq\ker\phi$,则存在唯一一个$\psi\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}C,B]$,使得$\phi=\psi\circ\pi$。另外,当且仅当$C=\ker\phi$时,$A/_{反}C\overset{反}{\cong}B$,即$\psi$是反同构映射,其中,$\pi:A\to A/_{反}C$为自然反同态。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/_{反}C \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

证明 定义映射$\psi:A/_{反}C\to B$,$a+C\mapsto\phi(a)$,$a\in A$,则ψ是良性的。实际上,对任意$x,y\in A$,

$x+C,y+C\in A/_{反}C$,有

$x+C=y+C\Rightarrow x-y\in C\Rightarrow\phi(x-y)=0\Rightarrow\phi(x)=\phi(y)\Rightarrow\psi(x+C)=\psi(y+C)$。

因此,ψ是良性的。

下证$\psi\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}C,B]$。对任意$x+C$,$y+C\in A/_{反}C$,有

$$\psi((x+C)+(y+C))=\psi(x+y+C)=\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)=\psi(x+C)+\psi(y+C);$$
$$\psi((x+C)(y+C))=\psi(yx+C)=\phi(yx)=\phi(y)\phi(x)=\psi(y+C)\psi(x+C)。$$

因此,存在$\psi\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}C,B]$,使得对任意$x\in A$,$(\psi\circ\pi)(x)=\psi(x+C)=\phi(x)$,其中,$\pi:A\to A/_{反}C$,$x\mapsto x+C$,$x\in A$。从而有$\phi=\psi\circ\pi$。

再证$\psi\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}C,B]$的唯一性。假设存在另外一个$f\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}C,B]$,使得$\phi=f\circ\pi$且$f\neq\psi$,则存在$x+C\in A/_{反}C$使得$f(x+C)\neq\psi(x+C)$,即$f(x+C)\neq\phi(x)$,与$\phi=f\circ\pi$矛盾,故而$\psi$是唯一的。

最后证明当且仅当$C=\ker\phi$时,$A/_{反}C\overset{反}{\cong}B$。

先证明充分性。当$C=\ker\phi$时,$\phi(x)=\phi(0)\Leftrightarrow x\in C$。又因为

$$\ker\psi=\{x+C\mid\psi(x+C)=\phi(x)=\phi(0)=\psi(0+C)\},$$

从而$\ker\psi=\{0+C\}$,即ψ是单射。显然ψ是一个满射。故ψ是双射且为反同态,因此$A/_{反}C\overset{反}{\cong}B$。

再证明必要性。若$A/_{反}C\overset{反}{\cong}B$,则对任意$y\in\ker\phi$,$\phi(y)=\psi(y+C)=\phi(0)=\psi(0+C)$,从而有$y+C=0+C$,即$y\in C$。又由于$C\subseteq\ker\phi$,可得$C=\ker\phi$。

2.2 环反同态第二同构定理

环同态第二同构定理是在同态映射的基础上给出的商环$I/(I\cap J)$与商环$(I+J)/J$之间的同构关系,若将同态映射变换为反同态映射,则可以得到反商环$I/_{反}(I\cap J)$与反商环$(I+J)/_{反}J$之间的同构关系、商环$I/(I\cap J)$与反商环$(I+J)/_{反}J$,以及反商环$I/_{反}(I\cap J)$与商环$(I+J)/J$之间的反同构关系。

定理5[23](环同态第二同构定理) 若I、J为环A的理想,则$I/(I\cap J)\cong(I+J)/J$。

$$\begin{tikzcd} I+J \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & I/(I\cap J) \\ (I+J)/J \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

环同态第二同构定理中 $f:I+J\to I/(I\cap J)$,$\pi:I+J\to(I+J)/J$ 均为同态映射,若 f、π 其中之一为反同态或 f、π 同时为反同态,则可以得出环反同态第二同构定理。

若 f、π 同时为反同态, 则有如下结果。

定理 6　设 I 和 J 为环 A 的理想,则存在 $f\in \mathrm{Hom}^*[I+J,I/_{反}(I\cap J)]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}_*[(I+J)/_{反}J,I/_{反}(I\cap J)]$ 使得 $(I+J)/_{反}J\cong I/_{反}(I\cap J)$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:I+J\to(I+J)/_{反}J$ 为自然反同态。

$$\begin{tikzcd} I+J \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & I/_{反}(I\cap J) \\ (I+J)/_{反}J \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

证明　易知,$I+J$ 及 $I\cap J$ 为 A 的理想,而且 J 是 $I+J$ 的理想,$I\cap J$ 为 I 的理想。由于 $I+J=\{a+b\mid a\in I,b\in J\}$,即对任意 $x\in I+J$,存在 $a\in I,b\in J$,使得 $x=a+b$,因而可定义映射 $f:I+J\to I/_{反}(I\cap J)$,$x\mapsto a+I\cap J$,则 f 为良性。实际上,若 $x=a+b=a_1+b_1$,其中,$a,a_1\in I,b,b_1\in J$,则 $a-a_1=b_1-b\in I\cap J$。从而有 $a+I\cap J=a_1+I\cap J$,这样 f 是良性的。

另外,对任意的 $x,y\in I+J$,存在 $a_1,a_2\in I,b_1,b_2\in J$,使得 $x=a_1+b_1,y=a_2+b_2$,且

$$f(x+y)=(a_1+a_2)+I\cap J=[a_1+I\cap J]+[a_2+I\cap J]=f(x)+f(y),$$

$$f(xy)=a_1a_2+I\cap J=[a_2+I\cap J][a_1+I\cap J]=f(y)f(x)。$$

因此, $f\in\mathrm{Hom}^*[I+J,I/_{反}(I\cap J)]$。

下证 $J=\ker f$。一方面,对任意 $x\in J\subset I+J$,有 $f(x)=f(0+x)=0+I\cap J$,因此 $x\in\ker f$;另一方面,对任意 $x\in\ker f$,存在 $a\in I,b\in J$,使得 $x=a+b$,且 $f(x)=a+I\cap J=0+I\cap J$,即 $a\in I\cap J$,从而 $x=a+b\in J$,这样 $J=\ker f$。另外,对任意 $a+I\cap J\in I/_{反}(I\cap J)$,任取 $b\in J$,令 $x=a+b$,则 $x\in I+J$ 且满足 $f(x)=a+(I\cap J)$,即 f 为满射。根据引理 4 可知,存在 $g\in\mathrm{Hom}_*[(I+J)/_{反}J,I/_{反}(I\cap J)]$ 使得 $(I+J)/_{反}J\cong I/_{反}(I\cap J)$。

定义映射 $g:(I+J)/_{反}J\to I/_{反}(I\cap J)$,$x+J\mapsto f(x)$,$x\in I+J$,对任意 $x+J,y+J\in(I+J)/_{反}J$,有

$$x+J=y+J\Leftrightarrow x-y\in J\Leftrightarrow f(x-y)=f(x)-f(y)=\bar{0}\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow g(x+J)=g(y+J),$$

因此 g 是良性的。易知 g 为同构映射。又因为对任意 $x\in I+J$,存在 $a\in I,b\in J$,使得 $x=a+b$,且 $g\circ\pi(x)=g(x+J)=f(x)$,因此 $g\circ\pi=f$。

最后证明 g 的唯一性。假设存在 $h\in\mathrm{Hom}_*[(I+J)/_{反}J,I/_{反}(I\cap J)]$ 使得 $f=h\circ\pi$ 且 $h\neq g$,则存在 $x+J\in(I+J)/_{反}J$,使得 $h(x+J)=(h\circ\pi)(x)\neq f(x)=g(x+J)$,这与 $f=h\circ\pi$ 矛盾,故而满足上述性质的 g 是唯一的。

若 f、π 其中之一为反同态,由定理 4 和定理 6 的证明,易得出如下结果。

定理 7　设 I 和 J 为环 A 的理想,则存在 $f\in\mathrm{Hom}_*[I+J,I/(I\cap J)]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[(I+J)/_{反}J,I/(I\cap J)]$ 使得 $(I+J)/_{反}J\overset{反}{\cong}I/(I\cap J)$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:I+J\to(I+J)/_{反}J$ 为自然反同态。

$$\begin{tikzcd} I+J \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & I/(I\cap J) \\ (I+J)/_{反}J \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

定理 8　设 I 和 J 为环 A 的理想,那么存在 $f\in\mathrm{Hom}^*[I+J,I/_{反}(I\cap J)]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[(I+J)/J,I/_{反}(I\cap J)]$ 使得 $(I+J)/J\overset{反}{\cong}I/_{反}(I\cap J)$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:I+J\to(I+J)/J$ 为自然同态。

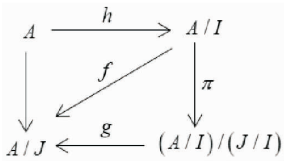
$$\begin{tikzcd} I+J \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & I/_{反}(I\cap J) \\ (I+J)/J \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2.3　环反同态第三同构定理

环同态第三同构定理均是在同态映射的基础上给出的商环 A/J 与商环 A/I 的商环 $(A/I)/(J/I)$ 之间的同构关系,若将同态映射变换为反同态映射,则可以得出反商环 $A/_{反}J$ 与商环 A/I 的商环 $(A/I)/(J/I)$ 之间的反同构关系、商环 A/J 与商环 A/I 的反商环 $(A/I)/_{反}(J/I)$ 之间的反同构关系、反商环 $A/_{反}J$ 与商环 A/I 的反商环 $(A/I)/_{反}(J/I)$

之间的同构关系、反商环 $A/_{反}J$ 与反商环 $A/_{反}I$ 的商环 $(A/_{反}I)/(J/_{反}I)$ 之间的同构关系、反商环 $A/_{反}J$ 与反商环 $A/_{反}I$ 的反商环 $(A/_{反}I)/_{反}(J/_{反}I)$ 之间的反同构关系、商环 A/J 与反商环 $A/_{反}I$ 的商环 $(A/_{反}I)/(J/_{反}I)$ 之间的反同构关系以及商环 A/J 与反商环 $A/_{反}I$ 的反商环 $(A/_{反}I)/_{反}(J/_{反}I)$ 之间的同构关系。

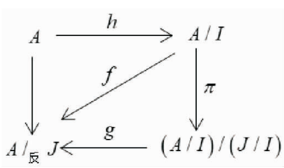
定理 9[23](环同态第三同构定理) 若 I、J 为环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则 $(A/I)/(J/I)\cong A/J$。



环同态第三同构定理中 $h:A\to A/I$,$f:A/I\to A/J$,$\pi:A/I\to(A/I)/(J/I)$ 均为同态映射,若 h 为同态映射,f、π 其中之一为反同态或 f、π 同时为反同态,则可以得出环反同态第三同构定理;若 h 为反同态映射,f、π 同时为同态映射,或者 f、π 其中之一为反同态或 f、π 同时为反同态,则同样可以得出环反同态第三同构定理。

若 h 为同态映射,f 为反同态映射,π 为同态映射,则根据引理3可得以下结果。

定理 10 设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则存在 $f\in\mathrm{Hom}^*[A/I,A/_{反}J]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[(A/I)/(J/I),A/_{反}J]$,使得 $(A/I)/(J/I)\overset{反}{\cong}A/_{反}J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A/I\to(A/I)/(J/I)$ 为自然同态映射。



证明 易证 J/I 是 A/I 的一个理想。构造映射 $f:A/I\to A/_{反}J$,$a+I\mapsto a+J$,$a\in A$,显然 f 是良性的且为满射。另外,$f\in\mathrm{Hom}^*[A/I,A/_{反}J]$。

易证 $J/I=\ker f$。根据引理3可知,存在一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[(A/I)/(J/I),A/_{反}J]$ 使得

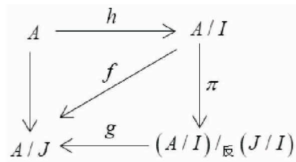
$$(A/I)/(J/I)\overset{反}{\cong}A/_{反}J。$$

构造映射 $g:(A/I)/(J/I)\to A/_{反}J$,$(a+I)+J/I\mapsto f(a+I)$,则 g 是良性的且为单射。又因为对任意 $a+I\in A/I$,有 $g\circ\pi(a+I)=g((a+I)+J/I)=f(a+I)$,因而 $f=g\circ\pi$。

最后证明 g 的唯一性。假设存在 $h\in\mathrm{Hom}^*[(A/I)/(J/I),A/_{反}J]$,且 $h\circ\pi=f$,$h\neq g$,则 $h(a+I+(J/I))\neq f(a+I)$,这与 $h\circ\pi=f$ 矛盾,故满足上述性质的 g 是唯一的。

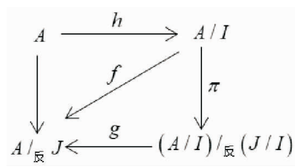
若 h 为同态映射,f 为同态映射,π 为反同态映射,则由定理4和定理10的证明,可得如下结论。

定理 11 设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则存在 $f\in\mathrm{Hom}_*[A/I,A/J]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[(A/I)/_{反}(J/I),A/J]$ 使得 $(A/I)/_{反}(J/I)\overset{反}{\cong}A/J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A/I\to(A/I)/_{反}(J/I)$ 为自然反同态映射。



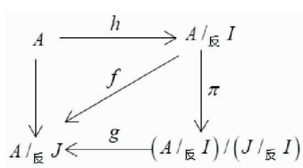
若 h 为同态映射,f 为反同态映射,π 也为反同态映射,则根据引理4和定理10的证明,可得如下结果。

定理 12 设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,那么存在 $f\in\mathrm{Hom}^*[A/I,A/_{反}J]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}_*[(A/I)/_{反}(J/I),A/_{反}J]$ 使得 $(A/I)/_{反}(J/I)\cong A/_{反}J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A/I\to(A/I)/_{反}(J/I)$ 为自然反同态映射。



若 h 为反同态映射,f 为同态映射,π 为同态映射,则根据引理2可得如下结果。

定理 13 设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则存在 $f\in\mathrm{Hom}_*[A/_{反}I,A/_{反}J]$ 和唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}_*[(A/_{反}I)/(J/_{反}I),A/_{反}J]$ 使得 $(A/_{反}I)/(J/_{反}I)\cong A/_{反}J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A/_{反}I\to(A/_{反}I)/(J/_{反}I)$ 为自然同态映射。



证明 根据理想的定义和定义3,易证 $J/_{反}I$ 是 $A/_{反}I$ 的一个理想。构造映射 $f:A/_{反}I\to A/_{反}J$,

$a+I\mapsto a+J, a\in A$。显然 f 是良性的且为满射,并且 $f\in \mathrm{Hom}_*[A/_{\text{反}} I, A/_{\text{反}} J]$。

易证 $\ker f = J/_{\text{反}} I$。根据引理 2 可知,存在 $g\in \mathrm{Hom}_*[(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I), A/_{\text{反}} I]$ 使得 $(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I)\cong A/_{\text{反}} I$。

构造映射 $g:(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I)\to A/_{\text{反}} J, (a+I)+J/_{\text{反}} I\mapsto f(a+I)$,则 g 是良性的且为单射。易证 $f=g\circ\pi$。

最后证明 g 的唯一性。假设存在 $h\in \mathrm{Hom}_*[(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I), A/_{\text{反}} J]$,且满足 $h\circ\pi=f, h\neq g$,那么存在 $(a+I)+J/_{\text{反}} I\in (A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I)$ 使得

$$h((a+I)+J/_{\text{反}} I)\neq g((a+I)+J/_{\text{反}} I),$$

即 $h((a+I)+J/_{\text{反}} I)\neq f(a+I)$,这与 $h\circ\pi=f$ 矛盾,故满足上述性质的 g 是唯一的。

若 h 为反同态映射,f 为同态映射,π 为反同态映射,则根据定理 4 和定理 13 的证明,得出如下结果。

定理 14　设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则存在 $f\in \mathrm{Hom}_*[A/_{\text{反}} I, A/_{\text{反}} J]$ 和唯一一个 $g\in \mathrm{Hom}^*[(A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I), A/_{\text{反}} J]$ 使得 $(A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I)\overset{\text{反}}{\cong} A/_{\text{反}} J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi: A/_{\text{反}} I\to (A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I)$ 为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d] & A/_{\text{反}} I \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi"] \\
A/_{\text{反}} J & (A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I) \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

若 h 为反同态映射,f 为反同态映射,π 为同态映射,则根据引理 3 和定理 13 的证明,有如下结果。

定理 15　设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则存在 $f\in \mathrm{Hom}^*[A/_{\text{反}} I, A/J]$ 和唯一一个 $g\in \mathrm{Hom}^*[(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I), A/J]$ 使得 $(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I)\overset{\text{反}}{\cong} A/J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi: A/_{\text{反}} I\to (A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I)$ 为自然反同态。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d] & A/_{\text{反}} I \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi"] \\
A/J & (A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I) \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

若 h 为反同态映射,f 为反同态映射,π 也为反同态映射,则根据引理 4 和定理 13 的证明,有如下结果。

定理 16　设 I 和 J 是环 A 的理想,且 $I\subseteq J$,则存在 $f\in \mathrm{Hom}^*[A/_{\text{反}} I, A/J]$ 和唯一一个 $g\in \mathrm{Hom}_*[(A/_{\text{反}} I)/(J/_{\text{反}} I), A/J]$ 使得 $(A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I)\cong A/J$ 且满足 $f=g\circ\pi$,其中,$\pi: A/_{\text{反}} I\to (A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I)$ 为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d] & A/_{\text{反}} I \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi"] \\
A/J & (A/_{\text{反}} I)/_{\text{反}}(J/_{\text{反}} I) \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

2.4　环反同态第三同构定理的一般形式

环同态第三同构定理是在同态映射 $h: A\to A/I$ 的基础上给出的同构定理,若将同态映射 $h: A\to A/I$ 改成一般同态或反同态映射 $f: A\to B$,可以得出同构定理或反同构定理。

定理 17[21]　设 A 和 B 是两个环,$f\in \mathrm{Hom}_*[A, B]$ 为满射,$\bar{I}$ 是 B 的理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,则 $A/I\cong B/\bar{I}$。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\
A/I \arrow[r, "g"] & B/\bar{I}
\end{tikzcd}$$

定理 17 中 $f: A\to B, \pi: A\to A/I, \tau: B\to B/\bar{I}$ 均为同态映射,若 f 为同态映射,π、τ 其中之一为反同态映射或 π、τ 同时为反同态映射时,则有 A/I 与 $B/\bar{I}$ 同构或反同构;若 f 为反同态映射,π、τ 同时为同态映射,或 π、τ 其中之一为反同态映射或 π、τ 同时为反同态映射时,则有 A/I 与 $B/\bar{I}$ 同构或反同构。

若 f 为反同态映射,π、τ 同时为同态映射时,根据引理 1 可得如下结论。

定理 18　设 A 和 B 是两个环,$f\in \mathrm{Hom}^*[A, B]$ 为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in \mathrm{Hom}^*[A/I, B/\bar{I}]$ 使得 $A/I\overset{\text{反}}{\cong} B/\bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi: A\to A/I, \tau: B\to B/\bar{I}$ 为自然同态映射。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\
A/I \arrow[r, "g"] & B/\bar{I}
\end{tikzcd}$$

证明　由于 $f\in \mathrm{Hom}^*[A, B]$ 为满射,$\tau\in$

$\mathrm{Hom}_*[B,B/\bar{I}]$ 为满射,根据引理 1 知,$\tau\circ f\in\mathrm{Hom}^*[A,B/\bar{I}]$为满射。又因为

$a\in\ker(\tau\circ f)\Leftrightarrow(\tau\circ f)(a)=\tau(f(a))=f(a)+\bar{I}=0+\bar{I}\Leftrightarrow f(a)\in\bar{I}\Leftrightarrow a\in I$,

因此,$I=\ker(\tau\circ f)$. 根据引理 3 可知,存在 $g\in\mathrm{Hom}^*[A/I,B/\bar{I}]$,使得 $A/I\overset{反}{\cong}B/\bar{I}$。定义映射

$g:A/I\to B/\bar{I},a+I\mapsto f(a)+\bar{I},a\in A$,则对任意 $a+I,b+I\in A/I$,有

$a+I=b+I\Leftrightarrow a-b\in I\Leftrightarrow(\tau\circ f)(a-b)=0+\bar{I}\Leftrightarrow\tau(f(a-b))=\tau(f(a)-f(b))=(f(a)-f(b))+\bar{I}$

$\Leftrightarrow(f(a)+\bar{I})-(f(b)+\bar{I})=0+\bar{I}$

$\Leftrightarrow f(a)+\bar{I}=f(b)+\bar{I}\Leftrightarrow g(a+I)=g(b+I)$,

因此,g 是良性的且为单射。又因为对任意 $a\in A$,有

$$\tau\circ f(a)=\tau(f(a))=f(a)+\bar{I}=g(a+I)=g\circ\pi(a)。$$

因此,$\tau\circ f=g\circ\pi$。

最后证明 g 的唯一性。假设存在 $h\in\mathrm{Hom}^*[A/I,B/\bar{I}]$,使得 $\tau\circ f=h\circ\pi$ 且 $h\neq g$,则存在 $a+I\in A/I$ 使得 $h(a+I)\neq g(a+I)$,即 $h(a+I)\neq f(a)+\bar{I}$,这与 $\tau\circ f=h\circ\pi$ 矛盾,故而 g 是唯一的。

若 f 为反同态映射,π 为同态映射,τ 为反同态映射,根据引理 2 和定理 18 的证明,可得如下结果。

定理 19　设 A 和 B 是两个环,$f\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}_*[A/I,B/_{反}\bar{I}]$使得 $A/I\cong B/_{反}\bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A\to A/I$ 为自然同态映射,$\tau:B\to B/_{反}\bar{I}$ 为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A/I \arrow[r, "g"] & B/_{反}\bar{I} \end{tikzcd}$$

若 f 为反同态映射,π 为反同态映射,τ 为同态映射,根据引理 4 和定理 18 的证明,可得如下结果。

定理 20　设 A 和 B 是两个环,$f\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}_*[A/_{反}I,B/\bar{I}]$使得 $A/_{反}I\cong B/\bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A\to A/_{反}I$ 为自然反同态映射,$\tau:B\to B/\bar{I}$ 为自然同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A/_{反}I \arrow[r, "g"] & B/\bar{I} \end{tikzcd}$$

若 f 为反同态映射,π 为反同态映射,τ 为反同态映射,根据定理 4 和定理 18 的证明,可得如下结果。

定理 21　设 A 和 B 是两个环,$f\in\mathrm{Hom}^*[A,B]$为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}I,B/_{反}\bar{I}]$使得 $A/_{反}I\overset{反}{\cong}B/_{反}\bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A\to A/_{反}I$, $\tau:B\to B/_{反}\bar{I}$ 为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A/_{反}I \arrow[r, "g"] & B/_{反}\bar{I} \end{tikzcd}$$

若 f 为同态映射,π 为同态映射,τ 为反同态映射,根据引理 3 和定理 18 的证明,可得如下结果。

定理 22　设 A 和 B 是两个环,$f\in\mathrm{Hom}_*[A,B]$为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[A/I,B/_{反}\bar{I}]$使得 $A/I\overset{反}{\cong}B/_{反}\bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A\to A/I$ 为自然同态映射,$\tau:B\to B/_{反}\bar{I}$ 为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A/I \arrow[r, "g"] & B/_{反}\bar{I} \end{tikzcd}$$

若 f 为同态映射,π 为反同态映射,τ 为同态映射,根据定理 4 和定理 18 的证明,可得如下结果。

定理 23　设 A 和 B 是两个环,$f\in\mathrm{Hom}_*[A,B]$为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in\mathrm{Hom}^*[A/_{反}I,B/\bar{I}]$使得 $A/_{反}I\overset{反}{\cong}B/\bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A\to A/_{反}I$ 为自然反同态映射,$\tau:B\to B/\bar{I}$ 为自然同态映射。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A/_{反}I \arrow[r, "g"] & B/\bar{I} \end{tikzcd}$$

若 f 为同态映射,π 为反同态映射,τ 为反同

态映射,根据引理 4 和定理 18 的证明,可得如下结果。

定理 24　设 A 和 B 是两个环,$f\in \mathrm{Hom}_*[A,B]$为满射,$\bar{I}$ 是 B 的一个理想,I 是 $\bar{I}$ 的原像,那么存在唯一一个 $g\in \mathrm{Hom}_*[A/_{反} I,B/_{反} \bar{I}]$使得 $A/_{反} I\cong B/_{反} \bar{I}$ 且满足 $\tau\circ f=g\circ\pi$,其中,$\pi:A\to A/_{反} I$ 为自然反同态,$\tau:B\to B/_{反} \bar{I}$ 为自然反同态映射。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau\circ f"] & B \arrow[d, "\tau"] \\
A/_{反} I \arrow[r, "g"] & B/_{反} \bar{I}
\end{tikzcd}$$

参考文献:

[1]　卫延,郑晶晶,余晶晶,等.与傅里叶变换有关的线性空间和代数[J].电气电子教学学报,2021,43(3):91-95.

[2]　冯军庆,梁国宏,徐慧.对合三元半群的幂半环[J].河北师范大学学报(自然科学版),2021,45(2):109-111.

[3]　黄蓓蕾.算子代数上环同构与可导映射的研究[D].西安:西安建筑科技大学,2023.

[4]　郑荣兰.Clifford 代数 Cl_2 和 $Cl_{(1,2)}$ 相关性质的研究[D].江门:五邑大学,2023.

[5]　申志荣.群论中的反同态与反同构[J].宁夏大学学报(自然科学版),1987(3):7-12,6.

[6]　李月芬.群的反同态与反同构的性质[J].内蒙古师大学学报(自然科学汉文版),1998(1):18-19.

[7]　李月芬,赵英.反商群与反同态[J].包头钢铁学院学报,1998(4):81-84.

[8]　张隆辉,赵凤鸣.群论中的逆同态与逆同构[J].四川职业技术学院学报,2014,24(1):138-140.

[9]　李立.反商群性质的研究[J].高师理科学刊,2015,35(1):5-6,21.

[10]　王春艳,李立.环反同态保持的几个重要性质[J].哈尔滨师范大学自然科学学报,2010,26(2):25-26.

[11]　王春艳.环的反同态性质的研究[J].齐齐哈尔大学学报(自然科学版),2010,26(2):86-88.

[12]　李立,魏连锁.反同态与反商环[J].哈尔滨商业大学学报(自然科学版),2010,26(5):628-629,640.

[13]　代国江,郭继东.环上的反同态[J].合肥学院学报(自然科学版),2011,21(4):16-18.

[14]　Dale T B. Anti-homomorphism in rings[J]. International Journal of All Research Education and Scientific Methods, 2021, 9(1): 447-452.

[15]　孙秀娟,王红丽.环的反同态满射的性质[J].唐山师范学院学报,2022,44(3):11-13.

[16]　Raza M A, Rehman N ur, Huang S L. On skew derivations as homomorphisms or anti-homomorphisms[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 2016, 57(3): 271-278.

[17]　Reddy C J S. Homomorphism and anti homomorphism of reverse derivations on prime rings[J]. International Journal of Scientific & Engineering Research, 2015, 6(9):74-76.

[18]　Sandhu G S, Kumar D. Generalized derivations acting as homomorphisms or anti-homomorphisms on Lie ideals[J]. Palestine Journal of Mathematics, 2018, 7(1): 137-142.

[19]　Dhara B. Generalized derivations acting as a homomorphism or anti-homomorphism in semiprime rings[J]. Beiträge Zur Algebra Und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 2012, 53(1):203-209.

[20]　Ali A, Kumar D. Derivation which acts as a homomorphism or as an anti-homomorphism in a prime ring[J]. International Mathematical Forum, 2007, 2: 1105-1110.

[21]　裴定一,郭华光.近世代数[M].北京:高等教育出版社, 2009.

[22]　Pursell L E. Anti-isomorphisms *vs.* isomorphism[J]. Mathematics Magazine, 1971, 44(2): 102-103.

[23]　Hungerford T W. Algebra[M]. Berlin: Springer, 1974.

【责任编辑:卓祯雨】