

文章编号:1671-4229(2025)01-0050-06

离散时间量子随机行走搜索算法在无向图上的应用

濮荣强, 黄 玮, 居水荣

(江苏信息职业技术学院 微电子学院, 江苏 无锡 214153)

摘要: 量子行走得益于概率幅的叠加特性,可同时出现在多条路径中,使其能以平方式乃至指数级别的速度加速扩散所携带的量子信息。文章基于无向图 $G=(V,E)$ 结构,从离散时间量子随机行走(Discrete Time Quantum Walk, DTQW)搜索算法特性出发,运用幺正变换的硬币算符与迁移算符,构建了DTQW搜索算法步骤框图,在此基础上,应用SKW搜索算法对4节点无向图中的标记节点态进行搜索,通过态塌缩的观测,实现以1/4概率化读取目标节点。研究表明,当有 n 个足够大的量子系统,并保持彼此之间的强纠缠性时,量子随机行走可以过渡到经典随机行走。文章还详细讨论了DTQW搜索算法实现左右同移的二次加速搜索机制。

关键词: 量子信息; 离散型量子随机行走; 无向图; 量子算法

中图分类号: TP311 **文献标志码:** A

Studies of DTQW search algorithm in undirected graph

PU Rong-qiang, HUANG Wei, JU Shui-rong

(School of Microelectronics, Jiangsu Vocational College of Information Technology, Wuxi 214153, China)

Abstract: Quantum walks benefit from the superposition property of probability amplitudes, allowing them to appear on multiple paths simultaneously, thereby achieving quadratic or even exponential acceleration in the diffusion of quantum information. This study focuses on the discrete-time quantum walk (DTQW) search algorithm within the framework of an undirected graph $G=(V,E)$. By employing unitary transformations of coin and shift operators, a stepwise framework for the DTQW search algorithm is constructed. The SKW search algorithm of DTQW is specifically applied to searching for the marked node states in a 4-node undirected graph. Through state collapse observation, the target node is retrieved probabilistically with a success rate of 1/4. Results indicate that when n sufficiently large quantum systems maintain strong entanglement, quantum walks can transition to classical random walks. The paper further elaborates on the quadratic speedup mechanism of the DTQW search algorithm under bidirectional migration conditions.

Key words: quantum information; discrete-time quantum random walk; undirected graph; quantum algorithm

经典随机行走通常被描述为 Markov 过程,行走者的下一个状态只取决于它当前的位置,不依赖于行走者之前时刻的任何信息。而量子行走属于真·随机行走,受益于概率幅的叠加性,可同时出现在多条路径中,使量子随机行走能以平方式

乃至指数级别的速度加速扩散所携带的量子信息。量子随机行走搜索算法是实现量子模拟与通用计算的有力手段,通过对彼此纠缠的叠加态进行系列酉变换,从而实现并行化处理的加速量子计算。目前,研究量子随机行走算法机制与应用

收稿日期: 2024-01-03; 修回日期: 2024-04-18

基金项目: 江苏省高校优秀科技创新团队——高频集成电路开发及应用资助项目(苏教科(2021)1号)

作者简介: 濮荣强(1962—),男,教授, E-mail:2562373416@qq.com

引文格式: 濮荣强, 黄玮, 居水荣. 离散时间量子随机行走搜索算法在无向图上的应用[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2025, 24(1): 50-55.

已成为普遍关注的焦点^[1-5]。

量子行走分为连续时间量子行走(Continuous Time Quantum Walk, CTQW)与离散时间量子行走 DTQW,任意有限维 Hilbert 空间的演化过程都可理解为 CTQW,而 DTQW 犹如飞行棋游戏,由行走者抛硬币决定行走的方向。

DTQW 的硬币态量子行走(coined quantum walk)是通过增加硬币空间使得行走过程可逆,从而保存了从哪个状态转移至当前状态的信息,由于采用 Hadamard 算符作为 DTQW 的硬币算符,也被称为 Hadamard 量子随机行走。量子随机行走不同于经典随机行走,它能以一定的概率同时向两个方向行走,可实现普适的量子计算,因此,DTQW 在量子计算的算法领域具有特色优势^[6-7]。

DTQW 搜索算法具有并行处理、非结构化搜索及存储容量巨大等优点,相对于经典搜索算法具有二次加速作用。本应用研究结合无向图 $G=(V,E)$ 结构,从 DTQW 搜索算法特征出发,在给出 DTQW 搜索算法的步骤框图基础上,采用么正变换的硬币算符与迁移算符,应用 DTQW 的 SKW 搜索算法对 4 节点无向图中的被标记节点进行搜索,研究指出,由于波函数的叠加特性,当有 n 个足够大的量子系统时,通过保持彼此之间的强纠缠性,量子随机行走可以过渡到经典随机行走,同时还讨论了 DTQW 搜索算法如何实现左右同移的二次加速搜索机制。

1 DTQW 搜索算法的特征

DTQW 搜索算法由行走者、硬币与演化算符

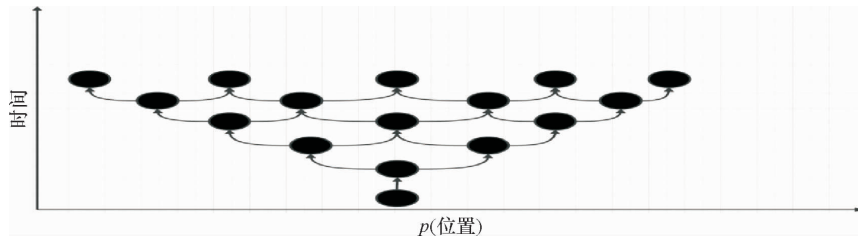


图 1 DTQW 左右同移的搜索特征

Fig. 1 Search characteristics of the left and right co-shift of DTQW

采用 $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Hadamard 么正变换作为硬币算符 C , 则可以将硬币态转为叠加态:

$$H|0\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_c + |1\rangle_c), \quad (1)$$

$$H|1\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_c - |1\rangle_c). \quad (2)$$

组成,每步之间都保持了位置的量子纠缠且彼此相干,可使量子随机行走的特征多样化。

如在一维直线上行走,按离散型量子随机行走,这里定义 Hilbert 空间: $H = H_c \otimes H_p$, 其中, H_p 、 H_c 分别是位置态(position state space)与硬币态(coin state space),有如下形式:

$$H_p = \text{span} \{ |\nu\rangle : \nu \in Z \}, H_c = \text{span} \{ |0\rangle, |1\rangle \}.$$

在位置空间 H_p : $|\nu\rangle$ 代表位置态,在硬币空间 H_c : $|1\rangle$ 是右平移指令, $|0\rangle$ 是左平移指令,叠加系数满足归一化条件。

令 p 为动量算符,左平移或右平移距离 l 的迁移算符 S :

$$S_L = e^{-i\frac{p}{\hbar}}, S_R = e^{i\frac{p}{\hbar}} = S_L^+,$$

则硬币态的离散型量子随机行走迁移算符: $S = S_L \otimes |0\rangle\langle 0| + S_R \otimes |1\rangle\langle 1|$ 。

DTQW 搜索算法建立在无向图 $G=(V,E)$ 基础上,共有 $N=2^n$ 个节点,代表了被搜索的数据库大小,每个节点由一个 n 比特的二进制串来标记,两个节点当且仅当 Hamming 距离为 1 时是相连的。

记位置态 $H_p = \{ |\nu\rangle : \nu = 1, 2, \dots, n \}$, 图中每节点 $|\nu\rangle$ 用 $1, 2, \dots, n$ 标号。

硬币态 $H_c = \{ |e\rangle : e = 1, 2, \dots, k \}$, 图中每边矢 $|e\rangle$ 用 $1, 2, \dots, k$ 标号,按 $|e\rangle$ 的边矢方向,从

ν 到 $\nu + \nu_e$ 的位置偏移算符: $S = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{\nu} |\nu \otimes \nu_e, e\rangle \otimes \langle \nu, e|$ 。DTQW 搜索算法通过么正变换 $U = S \cdot (I \otimes C)$ 实现左右同移,从而加速扩散所携带的量子信息(图 1),体现了彼此纠缠的叠加态特性。

基于硬币态条件的量子行走算符 $S = \sum_x |x-1, 0\rangle\langle x, 0| + |x+1, 1\rangle\langle x, 1|$:

$$S_L(|0\rangle_c \otimes |x\rangle_p) = |0\rangle_c \otimes |x-1\rangle_p,$$

$$S_R(|1\rangle_c \otimes |x\rangle_p) = |1\rangle_c \otimes |x+1\rangle_p.$$

量子行走保持叠加态又存在纠缠性,但 Hadamard 么正变换使硬币算符 C 的式(2)与式(1)比

较却存在相位反转,使向右行走的概率幅相消,向左行走的概率幅相长,从而产生了彼此干涉效果,使得 DTQW 位置有多个振荡峰值,服从不对称的分布图样,这与经典随机行走服从 Gauss 分布完全不同^[6]。

一维直线 DTQW 的标准偏差 $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot N$ 与行走步数 N 成线性关系,而经典随机行走 $\sigma \sim \sqrt{N}$,这意味着 DTQW 的速度比经典行走更快。

DTQW 搜索算法的特征,即叠加的量子比特以一定概率同时向两个方向行走,并保持纠缠性,通过幺正变换的硬币算符与迁移算符的系列变换,而加速产生了图样的干涉分布,直至最终观测态塌缩而被读出;而经典行走搜索算法只朝一个方向行走,边行走、边观测,属于 Gauss 分布的确定态被读出。

2 DTQW 搜索算法的应用

无向图 $G=(V,E)$ 属于 d 维正则图,正则图由 N 个节点 V 组成节点集,与节点 V 相连边的个数

$d=N-1$ 称为正则图维度,此图共有 $\frac{N(N-1)}{2}$ 条边,对应 $N(N-1)$ 状态。这里 $\Omega=\{v_1, v_2 \cdots v_N\}$ 的标记节点 $v=1$ 有 M 个,节点 v 状态对应 H_p 的基矢 $|v\rangle$,而 H_e 的 E 边矢 $|e\rangle$ 表示允许的转移方向,离散时间量子行走发生在 Hilbert 空间 $H=H_p \otimes H_e$ 。

这里引入邻接矩阵(adjacency matrix) A 的定义,该矩阵的行、列表示节点的序号,矩阵的元素 A_{ij} 表示两个节点之间是否有边连接: $A_{ij}=0$ 表示没有边连接, $A_{ij}=1$ 表示有边连接。如不考虑连接两个节点的边方向,则无向图的邻接矩阵是 Hermitian 对称矩阵。

2.1 DTQW 搜索算法的流程图

设系统状态为 $|v\rangle \otimes |e\rangle = |v, e\rangle$,即位置态是节点 $|v\rangle$,而硬币态为边矢 $|e\rangle$,DTQW 发生在 Hilbert 空间 $H=H_e \otimes H_p$ 上。

硬币态变换 C ,即 $C|v, e\rangle \rightarrow p_i |v, e'\rangle$,其中, $p_i \in C$ 是选择标号为 $|e'\rangle$ 边矢的概率,这里令所有的 p_i 都相等;

迁移态变换 S ,即 $S|v, e\rangle \rightarrow |v', \pi(e)\rangle$,其中, $v \rightarrow v'$ 边矢为 $|e\rangle$, v' 硬币态为 $|\pi(e)\rangle$ 。幺正变换为 $U=S \cdot (I \otimes C)$,所构成的 DTQW 搜索算法按流程图(图 2)执行。

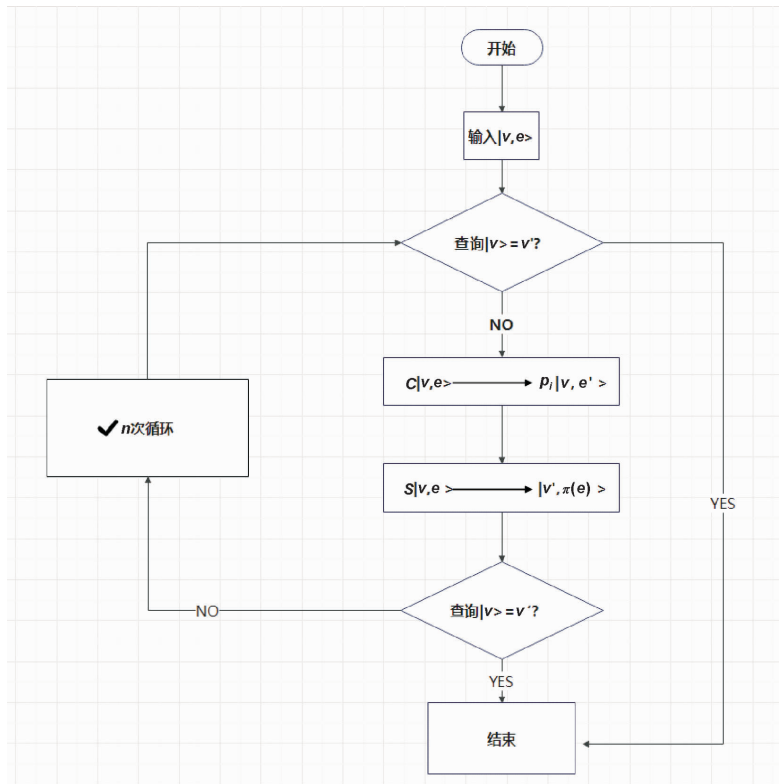


图 2 DTQW 搜索算法的流程图

Fig. 2 Flowchart of the DTQW search algorithm

系统状态表示为 ν , 其中, $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ 表示节点标号, $e \in \{1, 2, \dots, k\}$ 表示边矢的编号。首先, 产生量子叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2^n n}} \sum_{\nu, e} |\nu\rangle \otimes |e\rangle$, 然后按以下 5 个步骤:

(1) 查询当前 ν 节点状态 ν' 对应的顶点 ν 是否是被标记的目标节点 ν' ;

(2) 若节点不是目标节点, 则进行硬币状态变换, 以等概率幅随机选择与 ν 相邻的边矢 e' , 进入新的叠加态, 即 $C|\nu, e\rangle \rightarrow p_i|\nu, e'\rangle$;

(3) 查询节点 ν , 如果是目标节点, 则不改变硬币状态, 否则按硬币态 e' 变换;

(4) 迁移态变换 S , 即 $S|\nu, e\rangle \rightarrow |v', \pi(e)\rangle$;

(5) 按流程执行 \sqrt{n} 次后, 再观测系统状态 $|v', e'\rangle$ 。

如所有节点 ν 都没有被标记, 则系统态仍然停留在 $\frac{1}{\sqrt{2^n n}} \sum_{\nu, e} |\nu\rangle \otimes |e\rangle$; 如有目标节点 ν' 被标记, 则系统将以大概率停留在某个被标记的节点 ν' 上, DTQW 搜索算法的复杂度为 $O(\sqrt{n})$ 。

因此, 无向图 $G=(V, E)$ 上带有搜索目标的量子随机行走, 是按一定的概率走向它的邻近节点, 进行一段时间 T 后, 当对某个目标点进行观测, 发现它的概率接近 1, 则称时间 T 为搜索此目标节点的抵达时间 (hitting time), 抵达时间 T 属随机变量。

2.2 无向图的 DTQW 搜索算法实现

当无向图 $G=(V, E)$ 满足正则性及对称性, DTQW 搜索算法在总元素个数为 N 的 d 维网格中可以搜索出包含一个目标元素的集合。DTQW 搜索特征是始终保持量子比特的叠加态, 通过彼此的纠缠性而加速产生了干涉图样, 以更快的速度来扩散所携带的量子信息, 直到目标节点的抵达时间 T 后再进行观测, 并最终读出目标元素^[8-9]。

图 3 是节点 $N=4$ 的三维无向图, 每个 ν 节点和另外其他 3 个节点相连, 被标记的搜寻点 v_i 用矩框注出, 未被标记的点用椭圆框注出 v_j 。DTQW 搜索算法是研究如何用最短的抵达时间 T 来找到被标记的顶点 v_i 。

$G=(V, E)$ 是节点 $N=4$ 的无向图, 左右同移的迁移算符 $S = \sum_{e=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 |\nu, e\rangle \otimes \langle \nu, e|$, SKW 搜索算法以 DTQW 搜索算法作为基本框架, 将量子

行走算法中的硬币算符替换为 Oracle 算符, SKW 搜索算法具体实现如图 3 所示^[10-12]。

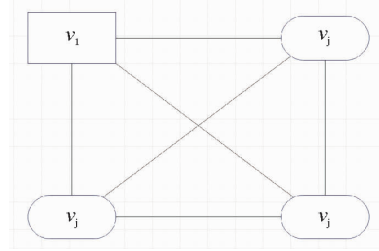


图 3 节点 $N=4$ 的 3 维无向图

Fig. 3 3-dimensional undirected graph with node $N=4$

标记节点 v_i 使用算符 $C_1 = -C_0$, 其他非标记节点 v_j 使用 Oracle 硬币算符 $C_0 = I - 2|\nu_i\rangle\langle\nu_i|$, 则 SKW 搜索算符为 $U = S \cdot (C_0 \otimes I - (C_0 - C_1) \otimes |\nu_i\rangle\langle\nu_i|) = S \cdot C_0 \otimes (I - 2|\nu_i\rangle\langle\nu_i|) = S \cdot C_0 \otimes I - 2S \cdot C_0 |\nu_i\rangle\langle\nu_i|$ 。

从上式可见, 在初始化叠加态上去搜索被标记的 ν_i 节点, 使 SKW 搜索算法限制在 $|\nu_i, e_i\rangle, |\nu_j, e_i\rangle, |\nu_j, e_j\rangle$ 三维空间里进行演化。SKW 搜索算法其实就是带扰动的 DTQW 搜索算法, 同样采用 Oracle 算符去识别问题解, 具备了与 Grover 搜索算法相同的特征, 因此, 可实现二次加速。

将图 3 位置态节点 ν 与硬币态 e 的并矢 $|\nu\rangle \otimes |e\rangle = |\nu, e\rangle$ 作为状态基矢:

$$|\nu_i, e_j\rangle = |\nu_i\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{e_i \neq e_j} |\nu_i, \nu_j\rangle,$$

$$|\nu_j, e_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\nu_j} |\nu_j\rangle \otimes |\nu_j \rightarrow \nu_i\rangle,$$

$$|\nu_j, e_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\nu_j} |\nu_j\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{N-2}} \sum_{e_j \neq e_j} |\nu_j \rightarrow \nu_j'\rangle,$$

以 $\{|\nu_i, e_j\rangle, |\nu_j, e_i\rangle, |\nu_j, e_j\rangle\}$ 为状态基矢, 按 SKW 搜索算法在三维空间里演化:

$$\begin{bmatrix} |\nu_i, e_j\rangle \\ |\nu_j, e_i\rangle \\ |\nu_j, e_j\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\nu_i, e_j\rangle' \\ |\nu_j, e_i\rangle' \\ |\nu_j, e_j\rangle' \end{bmatrix},$$

则初始态 $|\psi\rangle_0$ 演化变为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{N}} (|\nu_i, e_j\rangle' + |\nu_j, e_i\rangle' + \sqrt{N-2} |\nu_j, e_j\rangle') \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} [-|\nu_i, e_j\rangle' + (\sin\theta - \cos\theta) |\nu_j, e_i\rangle' \\ &\quad + \sqrt{N-2} (\cos\theta + \sin\theta) |\nu_j, e_j\rangle']. \end{aligned}$$

在抵达时间 $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{2^n}$, 观测演化后的塌缩态基矢得

$$\begin{aligned} |\nu_i, e_j\rangle \text{ 状态概率为 } P_1 &= \frac{(-1)^2}{N}, \\ |\nu_j, e_i\rangle \text{ 状态概率为 } P_2 &= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)^2}{N}, \\ |\nu_j, e_j\rangle \text{ 状态概率为 } P_3 &= \frac{(N-2)(\cos\theta + \sin\theta)^2}{N}. \end{aligned}$$

这里 $N=4$, $\cos\theta = \frac{N-3}{N-1}$, 而 $\sin\theta = \frac{2\sqrt{N-2}}{N-1}$ 。

使用 SKW 算符迭代 $O(\sqrt{N})$ 次, 在 $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{2^n}$, 通过观测可见, SKW 搜索算法在节点 $N=4$ 无向图状态基矢概率分布(图 4), 具有多个峰值振荡, 叠加态的纠缠性使其呈现出平方式增长而产生了彼此干涉的不对称概率分布图样, 完全不同于经典随机行走的 Gaussian 型概率分布。

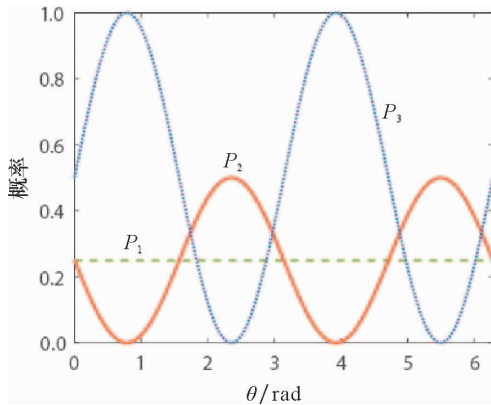


图 4 节点 $N=4$ 无向图 SKW 搜索算法的状态基矢概率分布
Fig. 4 Probability distribution of state base vectors of the SKW search algorithm for the undirected graph with node $N=4$

在实验中, 通过改变两束圆偏振光的相差, 使中性原子内部状态的原子核自旋 $|\uparrow\rangle$ 与 $|\downarrow\rangle$ 同时右移与左移, 每隔一段时间, 对核自旋 $|\uparrow\rangle$ 与 $|\downarrow\rangle$ 应用 Hadamard 变换产生量子随机行走, 而激光 σ^+ 、 σ^- 使中性原子发出荧光可以被观测, 最终得到原子行走的随机分布概率^[13]。

尽管输入是叠加态, 但量子行走的左右纠缠特征, 把 DTQW 搜索算法应用到叠加态上, 通过态塌缩的观测, 能以 1/4 概率化读出目标节点, 体现了 DTQW 搜索算法在平行处理非结构化数据与实现巨大容量信息存储方面的优势。针对以上 DTQW 搜索算法的应用特征, 这里具体讨论如下:

(1) DTQW 搜索算法是 Grover 搜索算法的变体, 即首先通过么正变换 $U = S \cdot (I \otimes C)$ 增大 Hilbert 空间的态矢量幅度, 然后通过 U 迭代演化, 跟踪态矢量的变化。因 DTQW 搜索算法按概率幅叠加, 彼此纠缠而产生加速的相干行走, 将该态矢量投影到一组标准基上观测, 最终可读出各基矢以不同概率方式的塌缩态;

(2) 被标记状态 $|\nu_i, e_j\rangle$ 可以一次性读出概率 P_1 始终保持 1/4, 而未被标记状态 $|\nu_j, e_j\rangle$ 、 $|\nu_j, e_i\rangle$ 的读出概率 P_2 、 P_3 却反相呈周期性变化, 使态塌缩能以 1/4 的大概率读出目标节点, 且量子随机行走的标准差与步数成正比, 这意味着 DTQW 的速度比经典行走更快;

(3) DTQW 算法只能局限在对称图形上搜索一个目标节点, 但具有指数加速特性认定无向图 $G=(V, E)$ 上顶点 S 与 T 的连通性, 而在超立方体上找到标记顶点也有多项式加速特性, 如实现元素区别、图形相似性搜索;

(4) Grover 搜索算法的时间复杂度是指 Oracle 算符被调用的次数。DTQW 算法也可在 $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{2^n}$ 多项式的抵达时间内, 以 $\frac{1}{2} - O(\frac{1}{n})$ 概率实现相对经典行走算法的多项式加速, 重复有限次数即可以接近于 1 的概率得到目标顶点, 这与 Grover 量子搜索算法具有相当的时间复杂度;

(5) 在搜索算法中加入 DTQW 可以减少迭代次数, 提高搜索效率, 因此, DTQW 搜索算法在直线、图及超立方体上的演化都可在安全、可扩展、易实现的物理框架内实现, 解决了计算时间不断增长的问题, 这也是量子计算的研究发展方向。

3 总 结

经典随机行走与量子随机行走的分布差异是物质波粒二象性, 经典行走属粒子化, 尽管从原点出发, 但向左、向右概率各 1/2, 它会有更大概率返回原点, 因此, 走向远方的概率比较小, 行走特性呈现 Gauss 分布。而量子随机行走存在叠加态与纠缠性, 纠缠性与相干时间成反比, 在原点位置纠缠性较强, 因此, 较近的地方易发生消相干, 而离原点较远的地方, 消相干较小而更易彼此叠加干涉, 有较大概率出现波的涟漪。因此, 如有 n 个足够大的量子系统, 保持彼此之间的强纠缠性, 量子

随机行走可以过渡到经典随机行走。

(1)复杂度反映了计算量与系统变量数 N 之间的关系,时间复杂度是指所需计算时间 T 与系统变量数 N 之间的关系,而空间复杂度是指所需比特数 B 与系统变量数 N 之间的关系。不是对于所有的计算问题,量子算法都有指数加速。量子计算的相干叠加提供了原理上并行处理的能力,但仍需要通过量子干涉的算法设计,把指数多的输出量子态通过干涉增强,得到有意义的结果。它最有价值的应用是针对部分高复杂度的 NP 问题;

(2)计算复杂性是研究如何把计算时间呈指数上升的 NP 问题简化成按幂次上升的 P 问题。由于 NP 问题可以分解为一个多项式时间可解的判定问题和一个指数级时间可解的无结构化数据库搜索问题,而加速无结构化数据库搜索速度是

加速 NP 问题算法的关键所在,如所需的计算步数为问题输入规模的多项式量级,P 问题就可能被图灵机有效解决。扩展的丘奇-图灵论题(extended Church-Turing thesis)认为量子计算也能有效地模拟自然界中发生的任何过程;

(3)量子计算的特征是通过量子门线路一次性地计算出函数在不同变量处的全体函数值,使其具备超强并行处理特性,在观测时间 $\leq 10^{-4}$ 的相干时间内,从叠加态中按概率分布读出函数各值,在执行如量子随机行走、Boson 采样等特定类型算法上,其突出的量子优越性(quantum supremacy)已被应用到机器学习、图形处理等领域。量子计算尽管存在量子比特纠错与容错困难,但其仍具有巨大的潜在价值,是一个极具颠覆性的发展方向。

参考文献:

- [1] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks[J]. Physical Review A, 1993, 48: 1687-1690.
- [2] Childs A M. Universal computation by quantum walk[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(18):180501.
- [3] Lovett N B, Cooper S, Everitt M, et al. Universal quantum computation using the discrete-time quantum walks[J]. Physical Review A, 2010, 81(4): 042330.
- [4] Ambainis A, Kempe J, Rivosh A, et al. Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, January 23-25, 2005[C]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [5] Ambainis A, Bach E, Nayak A, et al. Proceedings of the Thirty-third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, July 06-08, 2001[C]. New York: ACM, 2001.
- [6] 李敏. 量子随机行走的基本性质及应用研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2013.
- [7] Ambainis A. Quantum walks and their algorithmic applications[J]. International Journal of Quantum Information, 2003, 1(4): 507-518.
- [8] Aharonov D, Ambainis A, Kempe J, et al. Proceedings of the Thirty-third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, July 06-08, 2001[C]. New York: ACM, 2001.
- [9] Reitzner D, Hillery M, Feldman E, et al. Quantum searches on highly symmetric graphs[J]. Physical Review A, 2009, 79: 012323.
- [10] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B. Quantum random-walk search algorithm[J]. Physical Review A, 2003, 67: 052307.
- [11] 陈汉武, 李科, 赵生妹. 基于相位匹配的量子行走搜索算法及电路实现[J]. 物理学报, 2015, 64(24): 29-39.
- [12] 石雨豪. 量子行走搜索算法在计算科学中的应用研究[D]. 南京: 东南大学, 2019.
- [13] Karski M, Förster L, Choi J M, et al. Quantum walk in position space with single optically trapped atoms[J]. Science, 2009, 325(5937): 174-177.

【责任编辑: 卓祯雨】