

Sprott-D 不确定分数阶混沌系统的 自适应滑模同步

毛北行¹, 李德奎², 王东晓¹, 王建军¹

(1. 郑州航空工业管理学院 数学学院, 郑州 450046; 2. 甘肃中医药大学 公共卫生学院, 兰州 730000)

摘要: 基于非线性混沌系统滑模方法, 根据分数阶稳定性理论和同步控制方法研究 Sprott-D 不确定分数阶系统的滑模控制与同步, 并用 MATLAB 仿真程序对结果进行验证. 结果表明, 在一定的假设下, Sprott-D 不确定分数阶混沌系统对应的主从系统可取得自适应滑模同步.

关键词: 分数阶; Sprott-D 系统; 滑模; 同步

中图分类号: O482.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)05-1235-06

Adaptive Sliding Mode Synchronization of Sprott-D Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems

MAO Beixing¹, LI Dekui², WANG Dongxiao¹, WANG Jianjun¹

(1. School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China;
2. School of Public Health, Gansu University of Chinese Medicine, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Based on the sliding mode method of nonlinear chaotic systems, the sliding mode control and synchronization of Sprott-D uncertain fractional-order systems were studied according to the fractional-order stability theory and synchronous control method, and the results were verified by using MATLAB simulation program. The results show that the Sprott-D uncertain fractional-order chaotic systems corresponding to the master-slave systems can achieve adaptive sliding mode synchronization under certain assumptions.

Keywords: fractional-order; Sprott-D system; sliding mode; synchronization

目前, 混沌同步已引起人们广泛关注^[1-2]. 由于滑模控制具有良好的鲁棒性能, 因此其响应速度较快、动态性能较好^[3-4], 随着分数阶微分建模方法的发展, 分数阶系统的滑模控制研究已取得了较多成果^[5-16]; 如文献[10]研究了不确定分数阶混沌系统的自适应滑模同步, 设计了自适应律和控制输入, 使主从系统取得滑模同步; 文献[11]研究了不确定分数阶混沌系统的异结构滑模同步, 设计了分数阶滑模函数和控制器, 获得驱动响应系统异结构滑模同步的充分条件; 文献[12]通过滑动模态控制方法研究了分数阶混沌 Duffling 系统的终端滑模同步; 文献[13-14]分别基于自适应规则的设计研究了分数阶混沌及多混沌系统的自适应滑模同步; 文献[15-16]分别研究了分数阶不确定时滞金融混沌系统的滑模同步及分数阶 Bao 超混沌系统的比例积分滑模同步. 由于 Sprott 混沌系统代表一大类非线性控制系统且应用广泛, 因此已引起人们广泛关注; 文献[17]研究了 Sprott-I 混沌系统的动力学分析;

收稿日期: 2022-03-25.

第一作者简介: 毛北行(1976—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事分数阶混沌滑模同步的研究, E-mail: bxmao329@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(批准号: 12401655).

文献[18]研究了 Sprott 混沌系统的分析和控制；文献[19]研究了 Sprott-O 系统的延迟反馈控制；文献[20]研究了 Sprott-D 混沌系统的非线性 H_∞ 控制；文献[21]研究了非线性 Sprott 分数阶混沌系统的滑模同步. 此外, 系统的不确定性以及存在外部扰动, 使系统的稳定性受损, 且利用自适应滑模研究方法处理分数阶 Sprott-D 不确定混沌系统的自适应滑模同步问题目前文献报道较少. 基于此, 本文根据分数阶稳定性理论研究 Sprott-D 不确定分数阶系统的滑模控制与同步, 得到主从系统取得滑模同步的充分条件, 并用 MATLAB 数值仿真对结论进行验证.

1 主要结果

定义 1^[22] Caputo 分数阶导数定义为

$$D_t^q \mathbf{x}(t) = D_t^{-(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} \mathbf{x}^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < q < n \in \mathbb{Z}^+.$$

分数阶 Sprott-D 混沌系统^[21]为

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = -x_2, \\ D_t^q x_2 = ax_1 + x_3, \\ D_t^q x_3 = x_1 x_3 + bx_2^2. \end{cases} \quad (1)$$

当 $a = 1.1, b = 3, q = 0.995$, 系统初始值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-2, 0.2, 0.5)$, $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 1, 1)$ 时, 系统出现吸引子, 如图 1 所示.

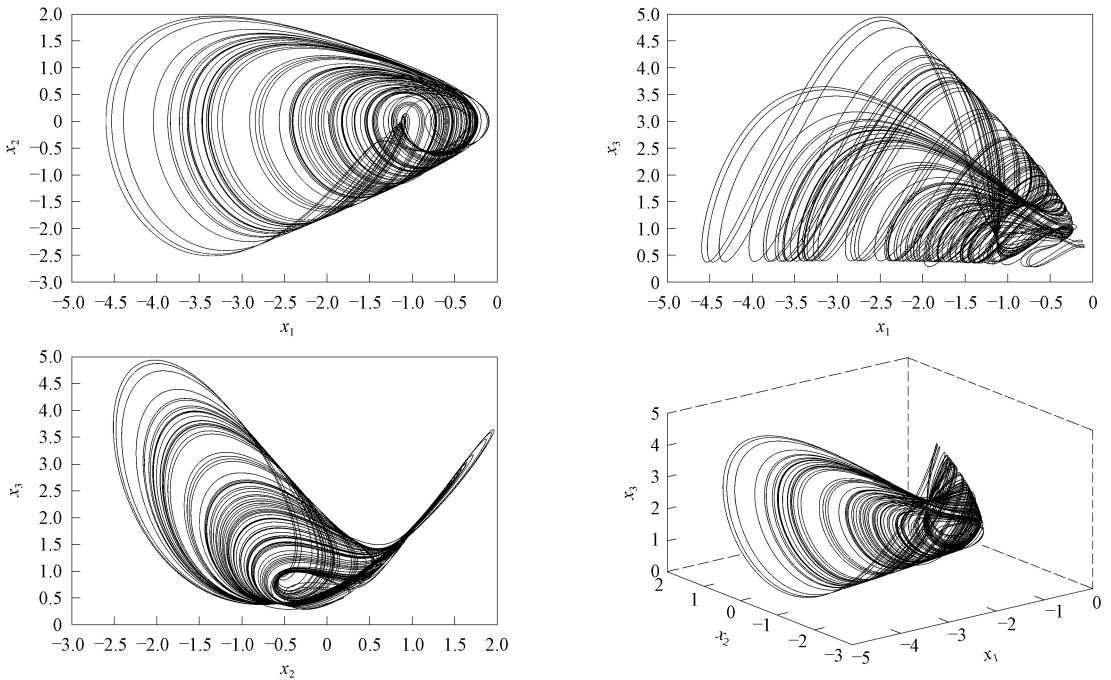


图 1 系统(1)的吸引子相图

Fig. 1 Phase diagram of attractors of system (1)

以式(1)为主系统, 设计从系统为

$$\begin{cases} D_t^q y_1 = -y_2, \\ D_t^q y_2 = ay_1 + y_3 + \Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) + u(t), \\ D_t^q y_3 = y_1 y_3 + by_2^2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ 为不确定项, $\boldsymbol{\varphi}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$, $d(t)$ 为系统外部扰动, $u(t)$ 为控制输入, 定义 $e_i = y_i - x_i (i=1, 2, 3)$, 得

$$\begin{cases} D_t^q e_1 = -e_2, \\ D_t^q e_2 = ae_1 + e_3 + \Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) + u(t), \\ D_t^q e_3 = y_1 y_3 - x_1 x_3 + by_2^2 - bx_2^2. \end{cases} \quad (3)$$

假设 1 $|\Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t))| \leq g, |d(t)| \leq h$, 其中未知参数 $g, h > 0$.

假设 2 $y_1 < 0$.

引理 1^[22-23] 若 $\mathbf{x}(t)$ 为连续可微函数, 则有 $\frac{1}{2}D_t^\alpha \mathbf{x}^2(t) \leq \mathbf{x}(t)^T D_t^\alpha \mathbf{x}(t), \forall \alpha \in (0, 1)$.

引理 2^[24] 设 $V(t) = \frac{1}{2}(z_1^2(t) + z_2^2(t))$, 若存在常数 $k > 0$, 使得 $D_t^\alpha V(t) \leq -kz_1^2(t)$, 则 $z_1^2(t) \leq 2V(0)E_{\alpha,1}(-2kt^\alpha)$. 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_1(t)\| = 0$.

定理 1 在假设 1, 2 条件下, 构造滑模面 $s(t) = e_2 - e_1$, 控制量为

$$u(t) = -e_2 - ae_1 - e_3 - (\hat{g} + \hat{h} + \delta|s|)\text{sgn } s. \quad (4)$$

自适应律为

$$\begin{cases} D_t^q \hat{g} = |s|, \hat{g}(0) = \hat{g}_0, \\ D_t^q \hat{h} = |s|, \hat{h}(0) = \hat{h}_0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 \hat{g}, \hat{h} 分别为 g, h 的估计值, $\delta > 0$, 则主从系统(1)和(2)自适应滑模同步.

证明: 当在滑模面上运动时, 满足 $s = 0$, 可得 $e_1 = e_2$, 由式(3)第 1 个方程 $D_t^q e_1 = -e_2$, 得 $D_t^q e_2 = -e_2 \Rightarrow e_2 \rightarrow 0$. 由 $D_t^q e_1 = -e_1 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0$, 根据式(3)第 3 个方程, 得

$$D_t^q e_3 = y_1 y_3 - x_1 x_3 + by_2^2 - bx_2^2, \quad (6)$$

由于 $by_2^2 - bx_2^2 = b(y_2 + x_2)e_2$, 且混沌系统轨迹有界, 因此 $(by_2^2 - bx_2^2) \rightarrow 0$. 式(6)可改写为

$$D_t^q e_3 = y_1 y_3 - x_1 x_3 = y_1 e_3 + x_3 e_1, \quad (7)$$

因 $e_1 \rightarrow 0$, 故式(7)变为 $D_t^q e_3 = y_1 e_3$, 由假设 2, 可得 $e_3 \rightarrow 0$.

当不在滑模面上运动时, 构造 $V(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}(\hat{g} - g)^2 + \frac{1}{2}(\hat{h} - h)^2$, 根据引理 1, 求分数阶导数可得

$$\begin{aligned} D_t^q V &\leq sD_t^q s + (\hat{g} - g)D_t^q \hat{g} + (\hat{h} - h)D_t^q \hat{h} \leq s[D_t^q e_2 - D_t^q e_1] + (\hat{g} - g)|s| + (\hat{h} - h)|s| = \\ &= s[e_2 + ae_1 + e_3 + \Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) + u(t)] + (\hat{g} - g)|s| + (\hat{h} - h)|s| \leq \\ &= |s|(g + h) - |s|(\hat{g} + \hat{h}) - \delta|s|^2 + (\hat{g} - g)|s| + (\hat{h} - h)|s| = -\delta|s|^2 < 0. \end{aligned}$$

根据引理 2 可知, $|s(t)|^2 \leq 2V(0)E_{q,1}(-2\eta kt^q)$, 从而 $s(t) \rightarrow 0$.

整数阶 Sprott-D 混沌系统^[20]为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + bx_2^2. \end{cases} \quad (8)$$

以式(8)为主系统, 设计从系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2, \\ \dot{y}_2 = ay_1 + y_3 + \Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) + u(t), \\ \dot{y}_3 = y_1 y_3 + by_2^2, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ 为不确定项, $\boldsymbol{\varphi}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T, d(t)$ 为系统外部扰动, $u(t)$ 为控制输入, 定义 $e_i = y_i - x_i (i=1, 2, 3)$, 得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_2, \\ \dot{e}_2 = ae_1 + e_3 + \Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) + u(t), \\ \dot{e}_3 = y_1 y_3 - x_1 x_3 + by_2^2 - bx_2^2. \end{cases} \quad (10)$$

引理 3^[25] 若函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 并且存在广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, 则有

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$

定理 2 在假设 1,2 条件下, 构造滑模面 $s(t) = e_2 - e_1$, 控制量为式(4). 自适应律为

$$\begin{cases} \dot{\hat{g}} = |s|, & \hat{g}(0) = \hat{g}_0, \\ \dot{\hat{h}} = |s|, & \hat{h}(0) = \hat{h}_0, \end{cases} \tag{11}$$

其中 \hat{g}, \hat{h} 分别为 g, h 的估计值, $\delta > 0$, 则主从系统(8)和(9)自适应滑模同步.

证明: 当在滑模面上运动时, 满足 $s = 0$, 可得 $e_1 = e_2$, 由式(10)第 1 个方程 $\dot{e}_1 = -e_2$, 得

$$\dot{e}_2 = -e_2 \Rightarrow e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{e}_1 = -e_1 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0,$$

根据式(10)第 3 个方程, 得

$$\dot{e}_3 = y_1 y_3 - x_1 x_3 + b y_2^2 - b x_2^2, \tag{12}$$

由于 $b y_2^2 - b x_2^2 = b(y_2 + x_2)e_2$, 且混沌系统轨迹有界, 因此 $(b y_2^2 - b x_2^2) \rightarrow 0$. 式(12)可改写为

$$\dot{e}_3 = y_1 y_3 - x_1 x_3 = y_1 e_3 + x_3 e_1, \tag{13}$$

因 $e_1 \rightarrow 0$, 故式(13)变为 $\dot{e}_3 = y_1 e_3$, 由假设 2, 可得 $e_3 \rightarrow 0$.

当不在滑模面上运动时, 设计 $V(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}(\hat{g} - g)^2 + \frac{1}{2}(\hat{h} - h)^2$, 求分数阶导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{s}s + (\hat{g} - g)\dot{\hat{g}} + (\hat{h} - h)\dot{\hat{h}} = s[\dot{e}_2 - \dot{e}_1] + (\hat{g} - g)|s| + (\hat{h} - h)|s| = \\ & s[e_2 + a e_1 + e_3 + \Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) + u(t)] + (\hat{g} - g)|s| + (\hat{h} - h)|s| \leq \\ & |s|(g + h) - |s|(\hat{g} + \hat{h} + \delta|s|) + (\hat{g} - g)|s| + (\hat{h} - h)|s| = -\delta|s|^2 < 0, \end{aligned}$$

两边积分可得 $\delta \int_0^t |s(\tau)|^2 d\tau \leq -\int_0^t \dot{V} dt < V(0) < +\infty$. 由引理 3, $s(t) \rightarrow 0$.

2 MATLAB 仿真

利用 MATLAB 仿真程序对上述两个定理中的系统误差进行数值仿真, 选取系统参数 $a = 1.1, b = 3, q = 0.995, \delta = 2, (\hat{m}(0), \hat{n}(0)) = (2, 1.5)$. 分数阶 Sprott-D 混沌系统对应的主从系统的状态初始值为

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-2, 0.2, 0.5), \quad (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 1, 1).$$

不确定项和外部扰动为 $\Delta f(\boldsymbol{\varphi}(t)) + d(t) = -0.1(\cos t)y_2 + 0.1\cos t$.

由定理 1 和定理 2 构造 $s(t) = e_2 - e_1$, 控制量为式(4), 定理 1 的自适应律为式(5), 定理 2 的自适应律为式(11). 定理 1 和定理 2 中的系统误差分别如图 2 和图 3 所示.

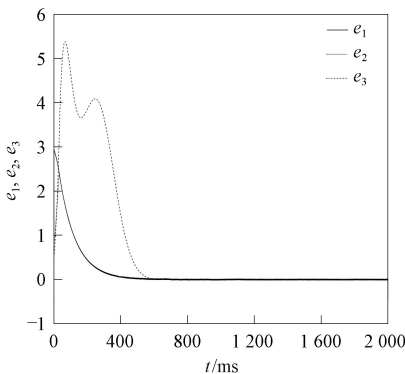


图 2 定理 1 的系统误差

Fig. 2 Systematic errors of theorem 1

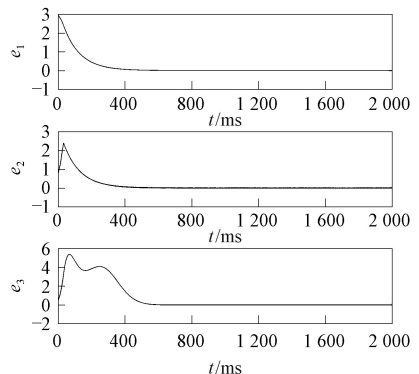


图 3 定理 2 的系统误差

Fig. 3 Systematic errors of theorem 2

由图 2 和图 3 可见, 误差随时间推移逐渐趋于一致并收敛到原点. 定理 1 比定理 2 达到同步所需的时间更短, 定理 1 中系统误差约在 0.224 s 后快速趋于坐标原点, 定理 2 中系统误差约在 0.276 s 后逐渐趋于坐标原点. 这是由于两个定理中虽然所设计的控制器和滑模函数相同, 但定理 1 中采用了分数阶自适应控制律, 从而优于整数阶自适应律. 与传统滑模面相比, 本文设计的滑模函数和控制器形

式更简洁, 因而控制代价小且更易实现.

针对分数阶非线性混沌系统一般采用滑模鲁棒控制方法, 本文借助分数阶微分性质和分数阶控制理论研究了 Sprott-D 分数阶不确定混沌系统的滑模同步, 通过构造合适的滑模函数、控制输入和自适应律得到了分数阶 Sprott-D 混沌系统对应的驱动响应系统滑模同步的充分条件.

参 考 文 献

- [1] CHEN C, LI L, PENG H, et al. Finite-Time Synchronization of Memristor-Based Neural Networks with Mixed Delays [J]. *Neurocomputing*, 2017, 235: 83-89.
- [2] ABDURAHMAN A, JIANG H, TENG Z. Finite-Time Synchronization for Memristor-Based Neural Network with Time-Varying Delays [J]. *Neural Networks*, 2015, 69(8): 20-28.
- [3] WANG W P, PENG H P, LI L X, et al. Finite-Time Function Projective Synchronization in Complex Multi-links Networks with Time-Varying Delay [J]. *Neural Processing Letters*, 2015, 41(1): 71-88.
- [4] HU C, YU J, JIANG H J. Finite-Time Synchronization of Delayed Neural Networks with Cohen-Grossberg Type Based on Delayed Feedback Control [J]. *Neurocomputing*, 2014, 143: 90-96.
- [5] JIANG M H, WANG S T, MEI J, et al. Finite-Time Synchronization Control of a Class of Memristor-Based Recurrent Neural Networks [J]. *Neural Networks*, 2015, 63: 133-140.
- [6] SONG S, ZHANG B Y, SONG X N, et al. Fractional-Order Adaptive Neuro-Fuzzy Sliding Mode H_∞ Control for Fuzzy Singularly Perturbed Systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(10): 5027-5048.
- [7] SONG S, ZHANG B Y, SONG X N, et al. Neuro-Fuzzy-Based Adaptive Dynamic Surface Control for Fractional-Order Nonlinear Strict-Feedback Systems with Input Constraint [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(6): 3575-3586.
- [8] 侯瑞茵, 李俨, 侯明善. 比例积分追踪制导方法研究 [J]. *西北工业大学学报*, 2014, 32(2): 303-308. (HOU R Y, LI Y, HOU M S. A Proportional Plus Integral Pursuit Guidance Law [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2014, 32(2): 303-308.)
- [9] 毛北行, 王东晓. 不确定分数阶高维混沌系统的自适应滑模同步 [J]. *电子学报*, 2021, 49(4): 775-780. (MAO B X, WANG D X. Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of Uncertain Fractional-Order High-Dimension Chaotic Systems [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(4): 775-780.)
- [10] 毛北行, 王东晓, 程春蕊. 一类不确定分数阶 Victor-Carmen 系统自适应滑模同步 [J]. *数学杂志*, 2019, 39(1): 128-136. (MAO B X, WANG D X, CHENG C R. Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of a Class of Uncertain Fractional-Order Victor-Carmen Systems [J]. *Journal of Mathematics*, 2019, 39(1): 128-136.)
- [11] 毛北行, 李巧利. 分数阶参数不确定系统的异结构混沌同步 [J]. *中国海洋大学学报(自然科学版)*, 2017, 47(7): 149-152. (MAO B X, LI Q L. Chaos Synchronization between Different Fractional Order System with Uncertain Parameters [J]. *Periodical of Ocean University of China*, 2017, 47(7): 149-152.)
- [12] 毛北行, 周长芹. 分数阶不确定 Duffling 混沌系统的终端滑模同步 [J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2018, 50(2): 47-50. (MAO B X, ZHOU C Q. Terminal Sliding Mode Synchronization of Fractional-Order Uncertain Duffling Chaotic Systems [J]. *Journal of Northeast Normal University (Natural Sciences)*, 2018, 50(2): 47-50.)
- [13] 毛北行, 王东晓. 具有外扰和不确定项的分数阶非线性混沌系统的自适应滑模同步 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2020, 58(5): 1237-1242. (MAO B X, WANG D X. Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of Fractional-Order Nonlinear Chaotic System with Outer Disturbance and Uncertainty [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2020, 58(5): 1237-1242.)
- [14] 毛北行. 分数阶多混沌系统滑模同步两种方法的比较 [J]. *电子学报*, 2020, 48(11): 2215-2219. (MAO B X. Two Methods Contrast of Sliding Mode Synchronization of Fractional-Order Multi-chaotic Systems [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2020, 48(11): 2215-2219.)
- [15] 朱涛, 张广军, 姚宏, 等. 滑模控制的时滞分数阶金融系统混沌同步 [J]. *深圳大学学报(理工版)*, 2014, 31(6): 626-629. (ZHU T, ZHANG G J, YAO H, et al. Chaos Synchronization of Fractional Order Financial Systems with Time-Delay Based on Sliding Control [J]. *Journal of Shenzhen University (Science and Engineering)*, 2014,

31(6): 626-629.)

- [16] 王东晓. 分数阶超混沌 Bao 系统的比例积分滑模同步 [J]. 内蒙古农业大学学报(自然科学版), 2018, 39(3): 83-89. (WANG D X. Proportional Integral Sliding Mode Synchronization for Fractional-Order Hyperchaotic Bao System [J]. Journal of Inner Mongolia Agricultural University (Natural Science Edition), 2018, 39(3): 83-89.)
- [17] 朱雷, 刘艳云, 周小勇, 等. 推广 Sprott-I 系统的动力学分析与离散化实现 [J]. 科学技术与工程, 2013, 13(5): 1123-1134. (ZHU L, LIU Y Y, ZHOU X Y, et al. Dynamic Analysis and Discretization Implementation of Extension Sprott-I System [J]. Science Technology and Engineering, 2013, 13(5): 1123-1134.)
- [18] 付景超, 孙敬, 李鹏松. 一类简单二次非线性 Sprott 混沌系统的分析与控制 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2015, 53(3): 395-400. (FU J C, SUN J, LI P S. Analysis and Control of a Class of Simple Quadratic Nonlinear Sprott Chaotic Systems [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2015, 53(3): 395-400.)
- [19] 闫丽宏. 含参 Sprott-O 混沌系统的直接延迟反馈控制 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2012, 40(6): 59-62. (YAN L H. Delayed Feedback Control the Chaos of the Sprott-O System with Parameters [J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition), 2012, 40(6): 59-62.)
- [20] 张中华, 付景超. Sprott-D 混沌系统的非线性 H_∞ 控制 [J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2017, 38(1): 84-87. (ZHANG Z H, FU J C. Nonlinear H_∞ Control of Sprott-D Chaotic System [J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science), 2017, 38(1): 84-87.)
- [21] 毛北行, 程春蕊. 分数阶二次非线性 Sprott 混沌系统的滑模同步控制 [J]. 数学杂志, 2018, 38(3): 490-496. (MAO B X, CHENG C R. Sliding Mode Synchronization of Fractional-Order Quadratic Nonlinearity Sprott Chaotic Systems [J]. Journal of Mathematics, 2018, 38(3): 490-496.)
- [22] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. New York: Academic Press, 1999: 1-96.
- [23] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2016: 12-15. (WU Q, HUANG J H. Fractional Calculus [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016: 12-15.)
- [24] 刘恒, 李生刚, 孙业国, 等. 带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统自适应模糊同步控制 [J]. 物理学报, 2015, 64(7): 070503-1-070503-9. (LIU H, LI S G, SUN Y G, et al. Adaptive Fuzzy Synchronization for Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems with Unknown Non-symmetrical Control Gain [J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(7): 070503-1-070503-9.)
- [25] 梅生伟, 申铁龙, 刘志康. 现代鲁棒控制理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 25-35. (MEI S W, SHEN T L, LIU Z K. Modern Robust Control Theory and Application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 25-35.)

(责任编辑: 王 健)