

高斯激光束在 Fraunhofer 圆孔衍射成像中的球差

夏雄平, 张 凯, 韦贵妹, 田恺婧

(桂林理工大学 物理与电子信息工程学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 基于标量衍射理论, 利用 Zernike 多项式法构建像差函数, 并将其应用到 ZEMAX 中, 研究高斯型激光束在透镜与圆孔距离较大时的 Fraunhofer 圆孔衍射成像中的球差. 实验和理论模拟结果表明, 透镜及圆孔和透镜距离对产生球差的影响较大, 当选择优化的非球面透镜、较高折射率的透镜材料和小视场时, 可有效降低由圆孔和透镜距离较大而产生的球差, 从而有效提升衍射成像质量.

关键词: Fraunhofer 圆孔衍射; 球差; 高斯激光束; Zernike 多项式

中图分类号: O436.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)01-0141-06

Spherical Aberrations of Gaussian Laser Beam in Fraunhofer Circular Aperture Diffraction Imaging

XIA Xiongping, ZHANG Kai, WEI Guimei, TIAN Kaijing

(College of Physics and Electronic Information Engineering, Guilin University of Technology,
Guilin 541004, Guangxi Zhuang Autonomous Region, China)

Abstract: Based on scalar diffraction theory, the aberration function was constructed by using Zernike polynomial method, and the aberration function was applied to ZEMAX to study the spherical aberration of Gaussian laser beam in Fraunhofer circular aperture diffraction imaging when the distance between lens and circular aperture was large. The experimental and theoretical simulation results show that the lens and the distance between lens and circular aperture have significant effects on spherical aberration. When selecting optimized aspheric lens, lens materials with higher refractive index and small field-of-view, it can effectively reduce the spherical aberration caused by large distance between lens and circular aperture, thereby effectively improving the diffraction imaging quality.

Keywords: Fraunhofer circular aperture diffraction; spherical aberration; Gaussian laser beam; Zernike polynomial

光衍射成像技术广泛应用于通信、生物医学和材料检测等领域^[1-2]. 由于光在衍射过程中受介质、元件尺寸和材料等因素影响, 因此产生各种像差, 其中球差是因为轴上单色同心光束经过光学系统后, 不同孔径光线相交光轴不同位置, 导致在成像面上形成了以高斯像点为中心的弥散斑, 从而成为影响成像清晰度和质量的重要因素^[3-5].

光学衍射成像的理论基础为 Huygens-Fresnel 原理和 Kirchoff 衍射积分, 其成像分析可分为标量

衍射和矢量衍射方法. 对大口径元件一般用标量衍射法^[6-8], 当微光学元件的尺寸接近或小于光波长时, 采用矢量衍射法^[9]. 像差研究方法包括几何方法^[10]、计算机模拟方法^[11]和 Zernike 函数法^[12-14]等. 由于 Zernike 多项式构建像差函数和光学检测中观测到的像差多项式形式一致, 因此 Zernike 多项式广泛应用于分析像差研究中; Wang 等^[15]利用 Zernike 多项式法提出了通过优化成像位置和增加相位补偿器, 可有效控制圆孔衍射波前畸变; Zhang 等^[16]基于 Zernike 多项式拟合的相位畸变方法, 提出了圆孔衍射波前畸变模型; Hsieh 等^[17]利用优化的 Zernike 函数, 提出了一种对像差分析和模式识别更有效的算法; Nemes-Czopf 等^[18]用参数建模和标量衍射在 ZEMAX 软件中模拟浮雕型衍射透镜.

对比一般 Fraunhofer 圆孔衍射中透镜紧贴圆孔的情形, 本文以广义 Huygens-Fresnel 衍射理论为基础, 采用标量衍射理论, 将通过 Zernike 多项式构建的像差函数应用到 ZEMAX 软件中, 并根据实验结果和利用 Zernike 多项式法分析实验出现的像差所对应的阶数, 实现激光衍射光斑通过 Z8 阶 Zernike 形变的像差透镜, 研究高斯激光束在圆孔与透镜距离较大时的 Fraunhofer 圆孔衍射成像中的球差, 并在此基础上提出有效控制球差的方法.

1 圆孔衍射成像机制

在圆孔衍射中, 从 Huygens-Fresnel 原理出发, 若点光源距离衍射屏足够远, 则其积分公式可写为

$$E(p) = \frac{A}{i\lambda z} \iint E(x_0, y_0, 0) \exp\{ikr\} d\sigma, \quad (1)$$

其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}$, $E(x_0, y_0, 0)$ 为 $z=0$ 处的初始波函数, 其表达式中可涵盖多种系数成分, 可通过迭代法程序的近似计算得到积分结果. 若满足 $z \gg (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, 则 $E(p)$ 满足 Fresnel 傍轴近似, 若继续满足远场条件 $z \gg k(x_0^2 + y_0^2)/2$, 则可得 Fraunhofer 衍射近似表达式

$$E(x, y, z) \simeq \frac{A}{i\lambda z} \exp\left\{ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right\} \iint E(x_0, y_0, 0) \exp\left\{-ik\left(\frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right\} dx_0 dy_0, \quad (2)$$

当采用极坐标时, 方程(2)可转换为

$$E(r, \varphi) \simeq \frac{\exp\{ikz\} \exp\{i(kr^2/(2z))\}}{i\lambda z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} E(\rho, \theta) \exp\{-i(kr\rho/z)\cos(\varphi - \theta)\} \rho d\rho d\theta, \quad (3)$$

利用 Bessel 函数的积分式和递推性质, 可得 x 处的光强分布为

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{-ix\cos\varphi\} d\varphi, \quad (4)$$

$$\frac{d[xJ_1(x)]}{dx} = xJ_0(x), \quad (5)$$

光强分布可进一步简化为

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(z)}{z} \right]^2, \quad (6)$$

其中 $I_0 = |\pi ca^2|^2$ 是衍射屏中心光强, J_0 和 J_1 分别为零阶 Bessel 函数和一阶 Bessel 函数. 根据圆孔衍射的定义可知, 在传播距离 $z=0$ 处, 光强最强, 当 z 满足 $J_1(z)=0$ 时, 光强有极小值 0, 这些 z 值取决于衍射暗环的位置. 相邻两个暗环之间出现一个明亮的条纹, 同理相邻条纹之间也会有一个暗环. 在方程(3)中引入 Zernike 函数, 利用迭代方法可得包含 Zernike 函数的衍射积分. 其中初始波函数 $E(\rho, \theta)$ 若为高斯型激光束, 在此取基模 TEM₀₀ 高斯光束, 则其表达式为

$$E(\rho, \theta) = C_{00} \exp\left\{-\frac{r^2}{r_{\max}^2}\right\} (\cos k + i \sin k) Z'_N(\rho, \theta), \quad (7)$$

其中 C_{00} 表示基模光束的系数, 指数部分表示光束呈高斯型分布, $Z'_N(\rho, \theta)$ 表示 Zernike 多项式函数的表达式, N 为阶数. 基于 Zernike 多项式函数本身的对称特性, 其表达式在单位圆上满足正交规律

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z'_N(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{n+1} \delta_{nm}. \quad (8)$$

Zernike 标准矢高表面类型可使用多达 231 个 Zernike 标准多项式定义表面矢量高, 其标准矢高

表面描述的是表面变形. “Extrapolate”用来指定在计算时使用的最大 Zernike 多项式项表面矢量, 该数字用来加速射线追踪计算, 可忽略超过该数字的项, 表面矢高的形式为

$$h = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k)c^2 r^2}} + \sum_{i=1}^8 \alpha_i r^{2i} + \sum_{i=1}^M A_i Z_i(\rho, \theta), \tag{9}$$

其中 M 为系列中 Zernike 系数的数量, A_i 为 Zernike 标准多项式上 i^{th} 的系数, r 为透镜单位的径向射线坐标, ρ 为归一化的径向射线坐标, φ 为角射线坐标.

2 实验与仿真模拟结果

在 Fraunhofer 圆孔衍射中, 采用波长为 641 nm 的激光作为点光源, 将点光源通过由双透镜构成的组合透镜 L_1 对基模高斯光束进行准直, 准直后的高斯光束通过圆孔和圆孔后方透镜 L_2 后, 在光屏上产生 Fraunhofer 圆孔衍射图像. 其中圆孔直径 $d=0.3$ mm, 透镜 L_2 焦距 $f=20$ mm, 透镜 L_2 与圆孔间距分别为 $C_1=100$ mm 和 $C_2=400$ mm, 圆孔与衍射光屏距离为 800 mm. 在实验开始前, 先理论模拟透镜 L_2 紧贴圆孔时无像差影响下的结果, 如图 1(A)所示, 再根据实验参量, 得到透镜 L_2 与圆孔距离较大时的实验结果, 分别如图 1(B)和(C)所示.

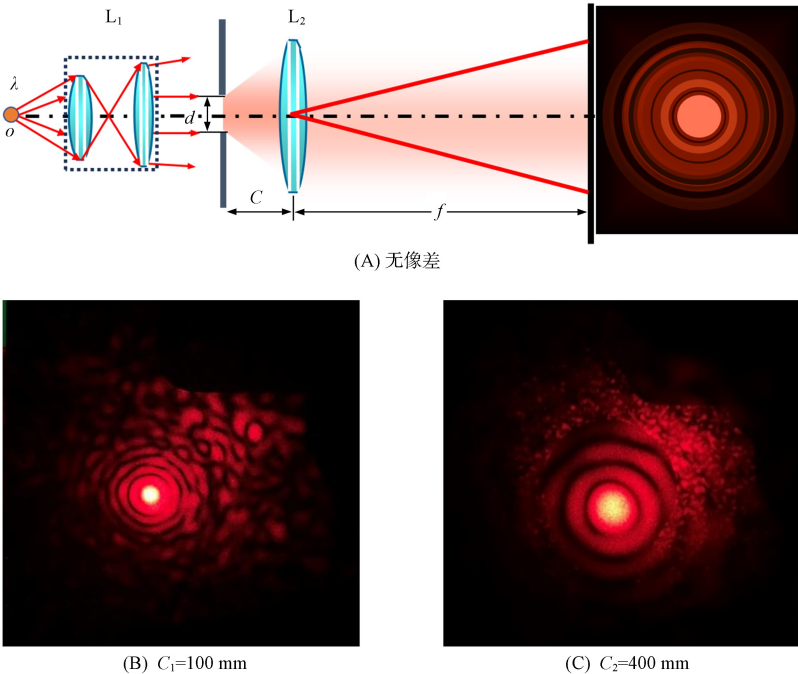


图 1 无像差影响下的理论模拟结果(A)和 Fraunhofer 圆孔衍射实验结果(B), (C)
Fig. 1 Theoretical simulation result without aberration influence (A) and Fraunhofer circular aperture diffraction experimental results (B), (C)

由图 1(A)可见, 理论模拟的衍射图像呈圆形, 条纹窄而清晰, 且分布范围较大. 由图 1(B)和(C)可见, 当透镜 L_2 与圆孔距离较大时, 除中心 Airy 斑和少数几个衍射环呈较好的圆形外, 其较高级数的衍射环连续性变差, 且在其垂直于轴向方向形成了较明显的弥散斑和垂轴球差, 其原因可能是透镜形状、折射率和焦距以及圆孔和透镜的距离等因素导致产生球差. 图 1(B)的衍射条纹分布较均匀且清晰度较高, 随着圆孔和透镜距离的增大, 图 1(C)中条纹分布的均匀度和清晰度均明显降低, 因此, 透镜和衍射孔之间的距离对圆孔衍射影响较大.

基于实验结果, 根据在极坐标形式下的 Fraunhofer 衍射公式中引入 Zernike 多项式所构建的圆孔衍射积分函数, 用 ZEMAX 软件仿真模拟对圆孔衍射中衍射成像的球差进行分析. 其中凸透镜曲率半径 $r=10.336$, 镜片厚度 2 mm, 镜片材质为常用玻璃材料 BK7, 采用中心视场(0,0.01,0.02)观测, 其他参量与实验一致. 在模拟过程中, 通过引入 Zernike 表面形变, 根据实验出现的垂轴球差现象, 对

应在 Zernike 多项式法研究像差在 Z8 时会产生球差与离焦现象,因此在 ZEMAX 软件仿真模拟中,采用的 Zernike 多项式为 Z8 阶,得到光斑强度晕染图和视场点列图如图 2 所示. 由图 2(A)和(B)可见,衍射图像呈椭圆状,产生了较明显的球差现象,其原因可能与透镜、激光或圆孔本身有关. 随着透镜与圆孔距离的增大,其球差变得更明显,表明透镜和圆孔距离对球差有直接影响. 由图 2(C)和(D)可见:在增大视场条件下,球差现象变得更明显;在相同视场条件下,当增大透镜和圆孔距离时,其球差也会变得更明显. 因此为有效调控球差,需采取小角度视场和适当的透镜和圆孔间距.

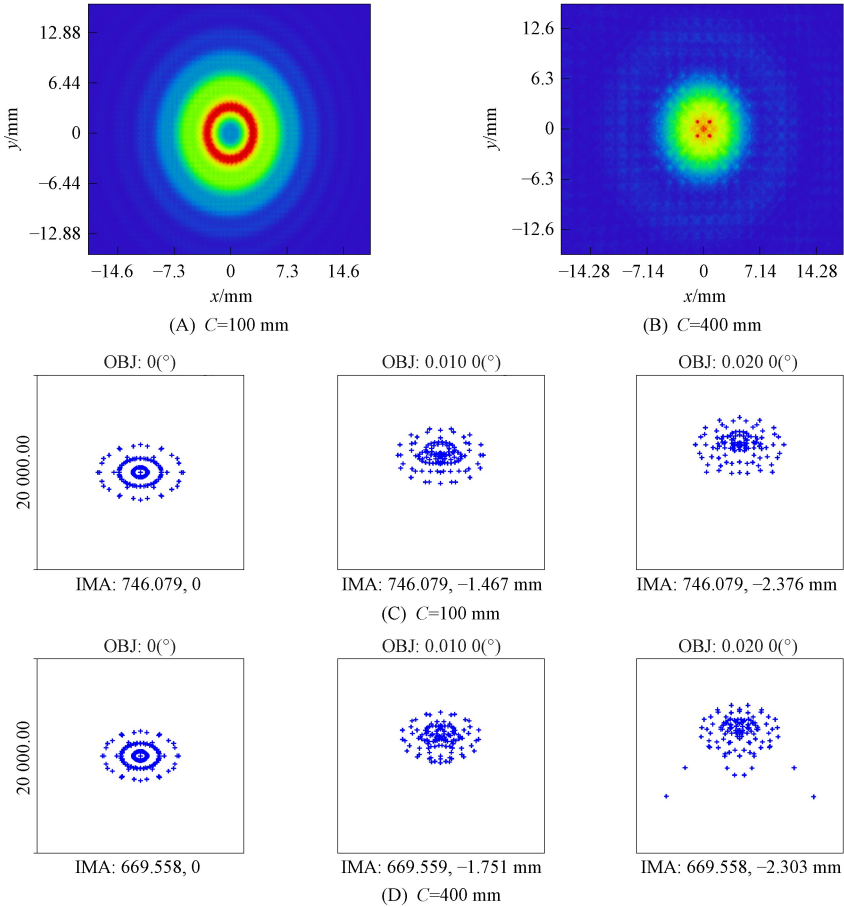


图 2 光斑强度晕染图(A),(B)和视场点列图(C),(D)

Fig. 2 Spot intensity blooming chart (A),(B) and spot diagram (C),(D)

针对实验和仿真模拟在衍射成像过程产生的球差,根据 ZEMAX 软件特点,通过添加评价函数优化镜片,利用优化圆锥系数将球面透镜转换成非球面透镜,优化后的曲率半径为 18.836 mm,此时有效焦距降低至 19.999 7 mm,圆锥系数为 25.696,透镜采用较高折射率的透镜材料(SF59)和小视场,从而从整体上有效调控球差,得到的仿真结果如图 3 所示. 对比系统未优化的结果(图 2),由图 3 可见,在小视场条件下,当采用优化的非球面透镜和较高折射率材料的透镜时,一方面其衍射图像从椭圆变成圆形,其中的球差现象几乎消失,其衍射圆环的分布与理想条件下的理论模拟结果相符,图像的清晰度和成像质量明显提升,此时透镜和圆孔距离对成像质量的影响变弱;另一方面,当 C=100 mm 和 C=400 mm 时,相比实验(图 1)和系统未优化的结果(图 2),光斑分布变得更均匀,光斑大小和性质受透镜和圆孔距离的影响减弱,进而提升了成像质量.

为分析图像的解像力,得到优化前后传递函数(MTF)随空间频率的变化关系,空间频率的单位为线对每毫米(lp/mm),结果如图 4 所示,其中 a 和 d 为优化前的 MTF 曲线, b 和 c 为优化后的 MTF 曲线,虚线和实线分别表示子午和弧矢面的不同成像质量,由于衍射极限的差异,因此曲线 b 略低于曲线 a,但 MTF 曲线均接近 Airy 斑. 由边缘视场 MTF 曲线 c 和 d 可见,优化后的 MTF 值明显优于未优化时的结果,其解像力更强,有利于降低衍射过程中球差和慧差的影响,其成像质量更好.

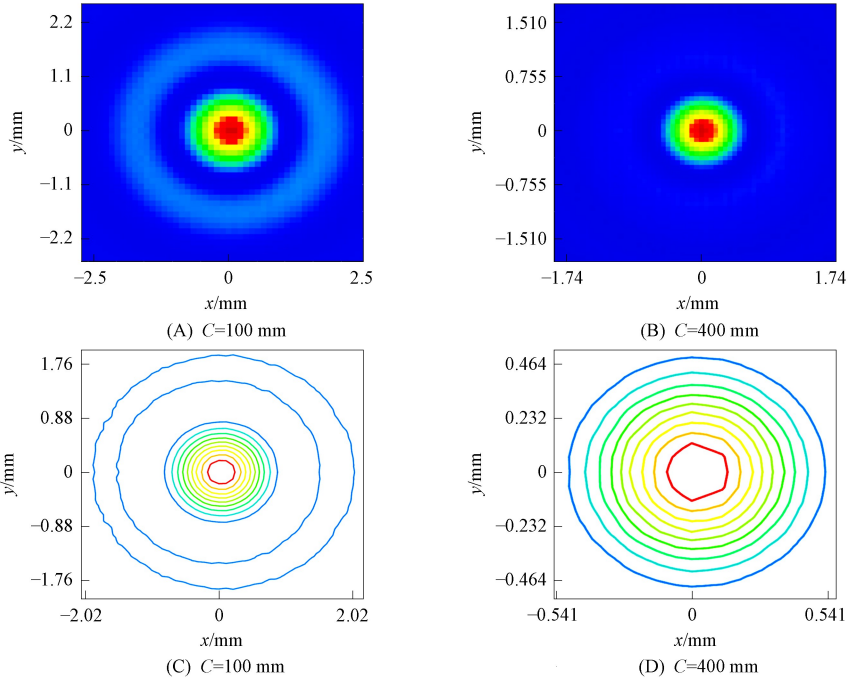


图 3 光斑强度晕染图(A),(B)和光斑强度局部放大线性图(C),(D)

Fig. 3 Spot intensity blooming chart (A),(B) and local magnification linear graph of spot intensity (C),(D)

综上, 本文将 Zernike 多项式法构建的像差函数应用到 ZEMAX 中, 并结合圆孔衍射实验结果, 对高斯型激光束在透镜和圆孔距离较大时的 Fraunhofer 圆孔衍射成像中的球差进行了研究. 首先, 通过实验分析了高斯型激光束在透镜与圆孔距离较大时的 Fraunhofer 圆孔衍射成像特点, 对衍射成像中出现的球差进行了分析; 其次, 利用 ZEMAX 仿真模拟对衍射成像中的球差进行了研究. 理论模拟和实验结果表明: 透镜及透镜和圆孔距离对产生球差影响较大, 当选择优化的非球面透镜、较高折射率的透镜材料和小视场时, 可有效降低圆孔和透镜距离较大时产生的球差, 从而有效提升衍射成像质量, 该研究结果可为实际衍射光学系统的透镜设计和制造提供理论指导.

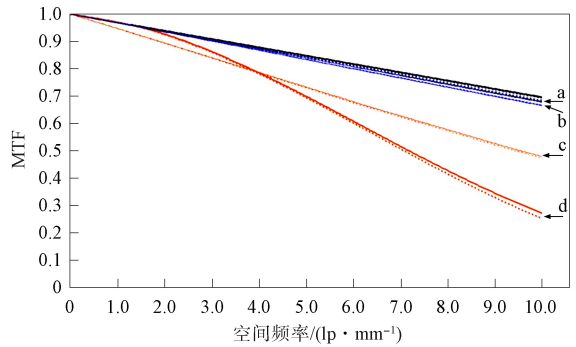


图 4 MTF 定量对比曲线

Fig. 4 MTF quantitative comparison curves

参 考 文 献

[1] LEE K, KIM K, KIM G, et al. Time-Multiplexed Structured Illumination Using a DMD for Optical Diffraction Tomography [J]. Optics Letters, 2017, 42(5): 999-1002.

[2] PHELAN C F, O'DWYER D P, RAKOVICH Y P, et al. Conical Diffraction and Bessel Beam Formation with a High Optical Quality Biaxial Crystal [J]. Optics Express, 2009, 17(15): 12891-12899.

[3] FENG P, TANG F, WANG X Z, et al. Dual-Fiber Point Diffraction Interferometer to Measure the Wavefront Aberration of an Imaging System [J]. Applied Optics, 2020, 59(10): 3093-3096.

[4] ZHAO L, DONG L J, YU X F, et al. Active Lens for Thermal Aberration Compensation in Lithography Lens [J]. Applied Optics, 2018, 57(29): 8654-8663.

[5] ANITA G T, MILTON A. Focusing of Tightly Focused Azimuthally Polarized Double Ring Beam by a Lens in the Presence of Coma Aberration [J]. Optik, 2019, 192: 162924-1-162924-5.

[6] SUGISAKA J, YASUI T, HIRAYAMA K. Profile Reconstruction of a Local Defect in a Groove Structure and

- the Theoretical Limit under the Vector Diffraction Theory [J]. *Optics Express*, 2020, 28(21): 30908-30927.
- [7] HAN P, HWANG H E, YANG G H. Fraunhofer and Fresnel Diffraction Characteristics of a Time Dependent Gaussian-Shaped Pulsed Beam from an Infinite Edge [J]. *Chinese Journal of Physics*, 2003, 41(4): 372-382.
- [8] BOFFI P, OSMOND J, PICCININ D, et al. Diffraction of Optical Communication Gaussian Beams by Volume Gratings: Comparison of Simulations and Experimental Results [J]. *Applied Optics*, 2004, 43(19): 3854-3865.
- [9] ZHANG F, WANG C, YIN K, et al. Underwater Giant Enhancement of Broadband Diffraction Efficiency of Surface Diffraction Gratings Fabricated by Femtosecond Laser [J]. *Journal of Applied Physics*, 2017, 121(24): 243102-1-243102-6.
- [10] MALACARA-DOBLADO D, MALACARA-HERNANDEZ Z, GOMEZ-VIEYRA A. Primary Wavefront Aberrations Calculation from a Defocused Image or a Hartmanngram [J]. *Applied Optics*, 2010, 49(12): 2302-2308.
- [11] SU W C, ZHOU S K, LIN B S, et al. Simplified Aberration Analysis Method of Holographic Waveguide Combiner [J]. *Photonics*, 2020, 7(3): 71-1-71-12.
- [12] LIU D, WU S B, YANG W, et al. Effects of Mask-Alignment Error on Point Spread Function for Multi-level Fresnel Diffractive Lenses [J]. *Chinese Optics Letters*, 2018, 16(9): 090501-1-090501-6.
- [13] ROSEN J, HAI N, RAI M R. Recent Progress in Digital Holography with Dynamic Diffractive Phase Apertures [J]. *Applied Optics*, 2022, 61(5): B171-B180.
- [14] YU H H, CHANG J, LIU X, et al. Novel Asymmetric Cryptosystem Based on Distorted Wavefront Beam Illumination and Double-Random Phase Encoding [J]. *Optics Express*, 2017, 25(8): 8860-8871.
- [15] WANG Q Z, XIA X P. Abnormal Distortion and Control of a Gaussian Beam in Circular Aperture Diffraction [J]. *Applied Optics*, 2021, 60(32): 10035-10041.
- [16] ZHANG S Z, LI X B, JEONG H. Analytical Diffraction Corrections for Circular Focused Transducers Expressed Using the Multi-Gaussian Beam Model [J]. *Acta Acustica United with Acustica*, 2017, 103(5): 717-720.
- [17] HSIEH Y H, YU Y T, LAI Y H, et al. Integral-Based Parallel Algorithm for the Fast Generation of the Zernike Polynomials [J]. *Optics Express*, 2020, 28(2): 936-947.
- [18] NEMES-CZOPF A, BERCSÉNYI D, ERDEI G. Simulation of Relief-Type Diffractive Lenses in ZEMAX Using Parametric Modelling and Scalar Diffraction [J]. *Applied Optics*, 2019, 58(32): 8931-8942.

(责任编辑:王 健)