

路与星图的强乘积图的容错直径

岳宇翔^{1,2,3}, 李 峰¹

(1. 青海师范大学 计算机学院, 西宁 810008; 2. 藏文信息处理教育部重点实验室, 西宁 810008;
3. 信阳艺术职业学院 信息工程学院, 河南 信阳 464007)

摘要: 设路 P_m 与星图 $S_{1,n-1}$ 的强乘积图为 $G=P_m \boxtimes S_{1,n-1}$. 首先, 通过归纳假设和构造内点或边不交路的方法, 结合星图的中心性, 给出图 G 的点容错直径 $D_w(G)$ 和边容错直径 $D'_i(G)$. 结果表明, 对图 G 中发生的任意点或边故障, 都有 $D_w(G) \leq d(G) + 2$, $D'_i(G) \leq d(G) + 1$. 其次, 通过顶点数和边数构造的不等关系, 给出两个极大连通图的强乘积图的点容错直径的上界, 以及两个非平凡连通图的强乘积图的边容错直径的上界.

关键词: 路; 星图; 强乘积图; 点容错直径; 边容错直径

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0487-10

Fault Diameter of Strong Product Graph of Path and Star Graph

YUE Yuxiang^{1,2,3}, LI Feng¹

(1. College of Computer, Qinghai Normal University, Xining 810008, China;
2. The State Key Laboratory of Tibetan Intelligent Information Processing and Application, Xining 810008, China;
3. College of Information Engineering, Xinyang Vocational College of Art, Xinyang 464007, Henan Province, China)

Abstract: Let the strong product graph of path P_m and star graph $S_{1,n-1}$ be $G=P_m \boxtimes S_{1,n-1}$. Firstly, by inducing assumptions and constructing internally vertex or edge disjoint paths, combined with the centrality of star graph, the vertex fault diameter $D_w(G)$ and edge fault diameter $D'_i(G)$ of the graph G were given. The results show that for any vertex or edge fault in the graph G , there holds $D_w(G) \leq d(G) + 2$ and $D'_i(G) \leq d(G) + 1$. Secondly, through the unequal relation between the number of vertices and the number of edges, the upper bound of the vertex fault diameter of the strong product graph of two maximally connected graphs and the upper bound of the edge fault diameter of the strong product graph of two nontrivial connected graph were given.

Keywords: path; star graph; strong product graph; vertex fault diameter; edge fault diameter

1 引言与预备知识

强乘积的概念最早由 Sabidussi^[1]提出, 是一种高效由小图构造大图的图乘积方法, 并且构造出的强乘积图保留了许多子图所具有的理想属性. 目前, 关于强乘积图的研究已有很多结果^[1-8]. Sun 等^[3]首先给出了任意两个连通图的强乘积图的连通度下界; Yang 等^[4]在文献[3]的基础上对其下界进行改善, 确定了两个极大连通图的强乘积图的连通度与两个非平凡连通图的强乘积图的边连通度;

收稿日期: 2023-04-17.

第一作者简介: 岳宇翔(1994—), 男, 汉族, 硕士, 从事组合网络理论及优化的研究, E-mail: yueyuxiang21@126.com. **通信作者简介:** 李 峰(1981—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事图与网络优化设计的研究, E-mail: li2006369@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11551002)和青海省自然科学基金(批准号: 2019-ZJ-2093).

Špacapan^[5] 确定了两个任意连通图的强乘积图的连通度. 除强乘积外, 图乘积领域对其他乘积的研究也取得了很多结果, 主要涉及可迁性和嵌入等^[9-11].

容错直径是 Krishnamoorthy 等^[12] 提出用于衡量网络发生故障后, 对整个网络信息传输效率影响的概念. 但由于故障的随机性, 确定实际网络中的容错直径仍很困难. 文献[13-14]给出了连通图的点容错直径与边容错直径的上界; 文献[15]得到了点容错直径与边容错直径之间的关系. 对一些著名网络, 其容错直径的值能通过特定的构造方法被确定. Esfahanian 等^[16] 首先得到了无向 de Bruijn 网络的点容错直径; Krishnamoorthy 等^[12] 给出了超立方体、立方连通圈和 Petersen 图的点容错直径, Latifi^[17] 得到了星图的点容错直径; Du 等^[18] 确定了有向 Kautz 网络的点容错直径; Chen^[19] 给出了超立方体网络的边容错直径. 最近关于容错直径的研究主要集中在变形超立方体网络上, Ma 等^[20] 给出了增强超立方体的点容错直径, Qi 等^[21] 给出了扭曲超立方体的点容错直径.

图乘积作为一种重要的网络拓扑结构构造方法, 对乘积图容错直径的研究备受关注, 但目前大部分结论都是关于笛卡尔乘积图的容错直径^[22-23], 对强乘积图容错直径的研究报道较少. 为进一步拓展乘积图容错直径的研究, 并寻找新的具有高可靠性的网络拓扑结构, 本文研究强乘积图的容错直径. 首先, 通过归纳假设和构造内点或边不交路的方法, 结合星图的中心性, 给出路与星图的强乘积图的点容错直径和边容错直径. 其次, 通过顶点数和边数构造的不等关系, 给出两个极大连通图的强乘积图的点容错直径的上界, 以及两个非平凡连通图的强乘积图的边容错直径的上界.

设 $G=(V(G),E(G))$ 是简单无向图, 其中 $V(G)$ 是顶点集, $E(G)$ 是边集. 设 R 是图 G 中的一条路径, 其顶点集为 $V(R)$, 则路径 R 的长度为 $|V(R)|-1$, 表示为 $L(R)$. 令 x 和 y 是图 G 中两个不同的顶点, 用 (x,y) 表示图 G 中连接 x 和 y 的边. 图 G 中 x 和 y 之间的最短路长度为 x 与 y 之间的距离, 记为 $d(G;x,y)$. 图 G 的直径即为在图 G 中任意两个顶点之间的最大距离, 记为 $d(G)$. 如果连接 x 和 y 有两条及以上的路径, 且除端点 x 和端点 y 外, 这些路内部顶点都不相同, 则称这些路是内点不交的. 图 G 中 x 和 y 之间的内点不交路的最大条数记为 $\zeta(G;x,y)$. 如果连接 x 和 y 有两条及以上的路径, 且这些路中所有边都不相同, 则称这些路是边不交的. 图 G 中 x 和 y 之间的边不交路的最大条数记为 $\eta(G;x,y)$.

仅含有一个顶点的图称为平凡图. 若在图 G 中删除一部分顶点子集或边子集, 使得被删除后的图 G 成为非连通图或者平凡图, 则称该子集为图 G 的顶点分离集或边分离集. 图的连通度指图 G 中最小顶点分离集的基数, 记为 $\kappa(G)$. 若存在正整数 k 使得 $\kappa(G)\geq k$, 则称图 G 为 k -连通的. 同理, 图的边连通度是指图 G 中最小边分离集的基数, 记为 $\lambda(G)$. 若存在正整数 k 使得 $\lambda(G)\geq k$, 则称图 G 为 k -边连通的. 图 G 的最小度表示为 $\delta(G)$. 如果一个连通图 G 满足 $\kappa(G)=\delta(G)$, 则图 G 称为极大连通图. 本文讨论的路和星图都是极大连通图.

强乘积是广泛使用的一种图乘积运算, 下面给出强乘积的定义及相关性质.

定义 1 令 $G_1=(V(G_1),E(G_1))$ 和 $G_2=(V(G_2),E(G_2))$ 是任意两个连通图, 则将 G_1 和 G_2 的强乘积记为 $G_1 \boxtimes G_2$, 定义其顶点集为 $V(G_1) \times V(G_2)$. 若任意两个不同的顶点 x_1y_1 和 x_2y_2 在 $G_1 \boxtimes G_2$ 中相邻, 则当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $(y_1,y_2) \in E(G_2)$ 或者 $y_1=y_2$ 且 $(x_1,x_2) \in E(G_1)$ 或者 $(x_1,x_2) \in E(G_1)$ 且 $(y_1,y_2) \in E(G_2)$.

根据强乘积的定义及文献[1]的结论知, 对任意两个连通图 G_1 和 G_2 , 其强乘积 $G=G_1 \boxtimes G_2$ 是可交换的、可结合的:

$$G_1 \boxtimes G_1 \cong G_2 \boxtimes G_1,$$

$$G_1 \boxtimes (G_2 \boxtimes G_3) \cong (G_1 \boxtimes G_2) \boxtimes G_3.$$

强乘积 G 的顶点数为

$$|V(G)| = |V(G_1)| |V(G_2)|,$$

强乘积 G 的边数为

$$|E(G)| = |V(G_1)| |E(G_2)| + |V(G_2)| |E(G_1)| + 2 |E(G_1)| |E(G_2)|,$$

强乘积 G 的最小度为

$$\delta(G) = \delta(G_1) + \delta(G_2) + \delta(G_1)\delta(G_2).$$

将 m 阶路与 n 阶星图的强乘积图表示为 $G = P_m \boxtimes S_{1,n-1}$, 在强乘积图 G 中有 4 类顶点, 分别为 3 度点、5 度点、 $(2n-1)$ 度点和 $(3n-1)$ 度点. 易知 $(3n-1)$ 度点是图 G 中的最大度顶点, 仍然与同层顶点和上下层顶点邻接, 起到中心控制的作用. 3 度点是图 G 中的最小度顶点, 考虑图 G 的容错直径基于这类顶点. 若令 $x_a y_u$ 和 $x_b y_v$ 是 G 中任意不同两个顶点, 且 $x_a, x_b \in V(P_m)$, $y_u, y_v \in V(S_{1,n-1})$, 则 $x_a y_u$ 和 $x_b y_v$ 邻接当且仅当 $x_a = x_b$ 且 y_u 和 y_v 中至少有一个中心点或 $y_u = y_v$ 且 $|b-a| = 1$ 或 $|b-a| = 1$ 且 y_u 和 y_v 中至少有一个中心点. 图 1 为 3 阶路与 4 阶星图的强乘积图 $P_3 \boxtimes S_{1,3}$, 其中标注了 4 类顶点在图中的位置.

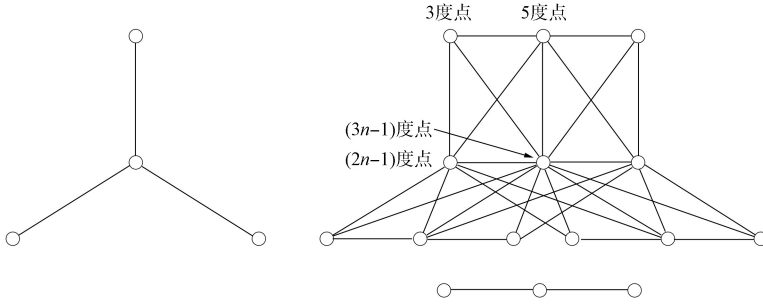


图 1 强乘积图 $P_3 \boxtimes S_{1,3}$

Fig. 1 Strong product graph $P_3 \boxtimes S_{1,3}$

容错直径根据点故障或边故障的不同情形可分为点容错直径和边容错直径.

定义 2^[24] 令 G 是一个 w -连通图, 定义 G 的故障点集为 F , 且 $|F| < w$, 则图 G 的 $(w-1)$ -点容错直径定义为

$$D_w(G) = \max\{d(G - F) : F \subset V(G), |F| < w\}.$$

在最差情况下, 只讨论 $|F| = w-1$ 的情形. 所以对任何的 w -连通图 G , 直径和点容错直径都满足

$$d(G) = D_1(G) \leq D_2(G) \leq \dots \leq D_{w-1}(G) \leq D_w(G).$$

定义 3^[24] 令 G 是一个 t -边连通图, 定义 G 的故障边集为 F , 且 $|F| < t$, 则图 G 的 $(t-1)$ -边容错直径定义为

$$D'_t(G) = \max\{d(G - F) : F \subset E(G), |F| < t\}.$$

在最差情况下, 只讨论 $|F| = t-1$ 的情形. 所以对任何的 t -边连通图 G , 直径和边容错直径的关系均为

$$d(G) = D'_1(G) \leq D'_2(G) \leq \dots \leq D'_{t-1}(G) \leq D'_t(G).$$

2 主要结果

引理 1^[4] 设 G_1 和 G_2 是两个极大连通图, G_1 的阶数为 n_1 , G_2 的阶数为 n_2 , 则 G_1 和 G_2 的强乘积图的连通度为

$$\kappa(G_1 \boxtimes G_2) = \min\{\delta_1 n_2, \delta_2 n_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2\}. \tag{1}$$

推论 1 设 $G = P_m \boxtimes S_{1,n-1}$ 是 P_m 和 $S_{1,n-1}$ 的强乘积图, P_m 和 $S_{1,n-1}$ 分别是 $m (\geq 2)$ 阶路和 $n (\geq 3)$ 阶星图, 则 G 的连通度为

$$\kappa(G) = \begin{cases} 2, & m = 2, \\ 3, & m \geq 3. \end{cases} \tag{2}$$

证明: 由于 $\delta(P_m) = \delta(S_{1,n-1}) = 1$, 故根据引理 1 可得 $\kappa(G) = \min\{n, m, 3\}$. 根据 m 值的分类有以下两种情形.

情形 1) $m = 2$. 此时有 $m < n$ 和 $m < 3$, 故有 $\kappa(G) = 2$.

情形 2) $m \geq 3$. 此时有 $3 \leq m$ 且 $3 \leq n$, 故有 $\kappa(G) = 3$. 证毕.

引理 2^[2] 设 G_1 和 G_2 是两个任意连通图, $x_a y_u$ 和 $x_b y_v$ 是 G_1 和 G_2 的强乘积图 $G = G_1 \boxtimes G_2$ 中

任意两个不同顶点, 且有 $x_a, x_b \in V(G_1)$ 和 $y_u, y_v \in V(G_2)$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间的距离为

$$d(G; x_a y_u, x_b y_v) = \max\{d(G_1; x_a, x_b), d(G_2; y_u, y_v)\}. \tag{3}$$

推论 2 设 $G = P_m \boxtimes S_{1,n-1}$ 是 P_m 和 $S_{1,n-1}$ 的强乘积图, P_m 和 $S_{1,n-1}$ 分别是 $m (\geq 2)$ 阶路和 $n (\geq 3)$ 阶星图, 则 G 的直径为

$$d(G) = \begin{cases} 2, & m = 2, \\ m - 1, & m \geq 3. \end{cases} \tag{4}$$

证明: 令路 P_m 的顶点集为 $V(P_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 星图 $S_{1,n-1}$ 的顶点集为 $V(S_{1,n-1}) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. 令 $x_a y_u$ 和 $x_b y_v$ 是 G 中任意不同两个顶点, 且 $x_a, x_b \in V(P_m)$, $y_u, y_v \in V(S_{1,n-1})$. 若 $m = 2$, 则 $G = P_2 \boxtimes S_{1,n-1}$, 易得此时图 G 的直径为 $d(G) = 2$. 若 $m \geq 3$, 则由引理 2 可得

$$d(G; x_a y_u, x_b y_v) = \max\{d(P_m; x_a, x_b), d(S_{1,n-1}; y_u, y_v)\} \leq \max\{m - 1, 2\} = m - 1. \tag{5}$$

当 $a = 1$ 且 $b = m$ 时, $d(G; x_a y_u, x_b y_v) = m - 1$, 式(5)的不等式可取等号. 又因为 $d(G)$ 是在图 G 中任意两个顶点之间的最大距离, 故可得此时图 G 的直径为 $d(G) = m - 1$. 证毕.

定理 1 设 $G = P_m \boxtimes S_{1,n-1}$ 是 P_m 和 $S_{1,n-1}$ 的强乘积图, P_m 和 $S_{1,n-1}$ 分别是 $m (\geq 2)$ 阶路和 $n (\geq 3)$ 阶星图, 则对任何 $1 \leq w \leq 3$, 图 G 的点容错直径为

$$D_w(G) = \begin{cases} d(G) + 1, & w = 2, \\ d(G) + 2, & w = 3. \end{cases} \tag{6}$$

证明: 令路 P_m 的顶点集为 $V(P_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 星图 $S_{1,n-1}$ 的顶点集为 $V(S_{1,n-1}) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. 令 $x_a y_u$ 和 $x_b y_v$ 是 G 中任意不同两个顶点, 且 $x_a, x_b \in V(P_m)$, $y_u, y_v \in V(S_{1,n-1})$. 不失一般性, 不妨设 $a \leq b$, $u \leq v$, 星图 $S_{1,n-1}$ 的中心点为 y_1 . 因为星图 $S_{1,n-1}$ 的阶数最少为 3, 故如果 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 则不妨设星图 $S_{1,n-1}$ 中至少还存在顶点 y_2 . 如果 y_u 和 y_v 都是中心点, 则不妨设星图 $S_{1,n-1}$ 中至少还存在顶点 y_2 和顶点 y_3 . 此外, 在证明过程中还将列举出相邻两点的内点不交路, 这是为方便后续结果转化为边不交路的情形.

情形 1) $m = 2$.

不失一般性, 不妨设 $V(P_m) \supseteq \{x_a, x_b\}$. 由推论 1 和推论 2 可知, 此情形下图 G 的连通度为 2, 直径为 2.

① $x_a = x_b$.

此时, 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 不妨设 $y_u = y_1$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间构造 2 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_1: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_a y_v, \\ R_2: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_v \rightarrow x_a y_v, \end{aligned} \tag{7}$$

这 2 条内点不交路的长度为 $2 = d(G)$. 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间构造 2 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_3: & x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_a y_v, \\ R_4: & x_a y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_a y_v, \end{aligned} \tag{8}$$

这 2 条内点不交路的长度为 $2 = d(G)$.

② $y_u = y_v$.

此时, 若 y_u 和 y_v 都是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_1$ 之间构造 2 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_5: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_2 \rightarrow x_b y_1, \\ R_6: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_3 \rightarrow x_b y_1, \end{aligned} \tag{9}$$

这 2 条内点不交路的长度为 $2 = d(G)$. 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_u$ 之间构造 2 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_7: & x_a y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_u, \\ R_8: & x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_b y_u, \end{aligned} \tag{10}$$

这 2 条内点不交路的长度为 $2=d(G)$.

③ $x_a \neq x_b$ 且 $y_u \neq y_v$.

此时, 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 不妨设 $y_u = y_1$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间构造 2 条内点不交路:

$$\begin{aligned}
 R_9 &: x_a y_1 \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v, \\
 R_{10} &: x_a y_1 \rightarrow x_a y_v \rightarrow x_b y_v,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

这 2 条内点不交路的长度为 $2=d(G)$. 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间构造 2 条内点不交路:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &: x_a y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v, \\
 R_{12} &: x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_b y_v,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

这 2 条内点不交路的长度为 $2=d(G)$.

综上所述在此情形下, 图 G 中任意两个顶点之间至少存在 2 条长度不超过 $d(G)$ 的内点不交路, 故对任意的 $1 \leq w \leq 2$, 都有 $D_w(G) = d(G)$.

情形 2) $m > 3$.

同理可得此情形下图 G 的连通度为 3 和直径 $d(G) \geq 3$. 根据顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_v$ 的位置关系有以下 3 种情形.

① $x_a = x_b$.

当 $w=3, |F|=2$ 时, 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则若 $a=1$ 或 n , 不妨设 $a=1$, 在图 G 中顶点 $x_1 y_u$ 和顶点 $x_1 y_v$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned}
 R_{13} &: x_1 y_u \rightarrow x_1 y_1 \rightarrow x_1 y_v, \\
 R_{14} &: x_1 y_u \rightarrow x_2 y_1 \rightarrow x_1 y_v, \\
 R_{15} &: x_1 y_u \rightarrow x_2 y_u \rightarrow x_3 y_1 \rightarrow x_2 y_v \rightarrow x_1 y_v,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $4 \leq d(G) + 1$. 若 $1 < a < n$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned}
 R_{16} &: x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_a y_v, \\
 R_{17} &: x_a y_u \rightarrow x_{a-1} y_1 \rightarrow x_a y_v, \\
 R_{18} &: x_a y_u \rightarrow x_{a+1} y_1 \rightarrow x_a y_v,
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $2 < d(G)$.

当 $w=2, |F|=1$ 时, 则在以上情形中, 图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间可构造 2 条长度不超过 $2 < d(G)$ 的内点不交路 R_{13} 和 R_{14} .

当 $w=3, |F|=2$ 时, 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 不妨设 $y_u = y_1$, 则若 $a=1$ 或 n , 不妨设 $a=1$, 在图 G 中顶点 $x_1 y_1$ 和顶点 $x_1 y_v$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned}
 R_{19} &: x_1 y_1 \rightarrow x_1 y_v, \\
 R_{20} &: x_1 y_1 \rightarrow x_2 y_1 \rightarrow x_1 y_v, \\
 R_{21} &: x_1 y_1 \rightarrow x_2 y_v \rightarrow x_1 y_v,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $2 < d(G)$. 若 $1 < a < n$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned}
 R_{22} &: x_a y_1 \rightarrow x_a y_v, \\
 R_{23} &: x_a y_1 \rightarrow x_{a-1} y_1 \rightarrow x_a y_v, \\
 R_{24} &: x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_1 \rightarrow x_a y_v,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $2 < d(G)$.

当 $w=2, |F|=1$ 时, 则在以上情形中, 显然图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间也可构造 2 条长度不超过 $2 < d(G)$ 的内点不交路.

② $y_u = y_v$.

当 $\omega=3, |F|=2$ 时, 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 且 $u \neq 2$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_u$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_{25}: & x_a y_u \rightarrow \cdots \rightarrow x_b y_u, \\ R_{26}: & x_a y_u \rightarrow x_{a+1} y_1 \rightarrow x_{a+2} y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_2 \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_u, \\ R_{27}: & x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_2 \rightarrow x_{a+2} y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_1 \rightarrow x_b y_u, \end{aligned} \tag{17}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $b-a+1 \leq d(G)+1$. 若 y_u 和 y_v 都是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_1$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_{28}: & x_a y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_b y_1, \\ R_{29}: & x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_2 \rightarrow x_b y_1, \\ R_{30}: & x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_3 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_3 \rightarrow x_b y_1, \end{aligned} \tag{18}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $b-a \leq d(G)$.

当 $\omega=2, |F|=1$ 时, 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则只需将 R_{29} 中的 y_1 用 y_u 替代, y_2 用 y_1 替代, 结合 R_{25} , 即可得到在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_u$ 之间的 2 条长度不超过 $b-a \leq d(G)$ 的内点不交路. 若 y_u 和 y_v 都是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_1$ 之间可构造 2 条长度不超过 $b-a \leq d(G)$ 的内点不交路 R_{28} 和 R_{29} .

综上可得此情形下满足 $D_2(G) \leq d(G)$.

③ $x_a \neq x_b$ 且 $y_u \neq y_v$.

当 $\omega=3, |F|=2$ 时, 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_{31}: & x_a y_u \rightarrow x_{a+1} y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_1 \rightarrow x_b y_v, \\ R_{32}: & x_a y_u \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v, \\ R_{33}: & x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_v \rightarrow \cdots \rightarrow x_b y_v, \end{aligned} \tag{19}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $b-a+1 \leq d(G)+1$. 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 不妨设 $y_u = y_1$, 且 $v \neq 2$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间构造 3 条内点不交路:

$$\begin{aligned} R_{34}: & x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_v \rightarrow \cdots \rightarrow x_b y_v, \\ R_{35}: & x_a y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_1 \rightarrow x_b y_v, \\ R_{36}: & x_a y_1 \rightarrow x_{a+1} y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{b-1} y_2 \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v, \end{aligned} \tag{20}$$

这 3 条内点不交路的长度不超过 $b-a+1 \leq d(G)+1$.

当 $\omega=2, |F|=1$ 时, 若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则只需将 R_{32} 中的 $x_{b-1} y_u$ 用 $x_{b-2} y_u$ 替代及 $x_b y_1$ 用 $x_{b-1} y_1$ 替代, 将 R_{33} 中的 $x_a y_1$ 用 $x_{a+1} y_1$ 替代及 $x_{a+1} y_v$ 用 $x_{a+2} y_v$ 替代, 即可得到在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间的 2 条长度不超过 $b-a \leq d(G)$ 的内点不交路. 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间可构造 2 条长度不超过 $b-a \leq d(G)$ 的内点不交路 R_{34} 和 R_{35} .

综上所述可得

$$D_2(G) = d(G), \quad D_3(G) \leq d(G) + 1.$$

下面讨论下界, 考虑图 G 中的两个顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_m y_2$. 若未发生故障, 则图 G 中两点之间的距离为 $d(G; x_1 y_2, x_m y_2) = d(G)$. 若令故障点集 $F = \{x_2 y_1, x_2 y_2\}$, 则在 $G - F$ 中顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_m y_2$ 之间的距离为

$$d(G - F; x_1 y_2, x_m y_2) = d(G) + 1,$$

故可得 $D_3(G) \geq d(G) + 1$.

情形 3) $m=3$.

此情形下图 G 的连通度为 3, 直径为 2. 当 $\omega=2, |F|=1$ 时, 由情形 2) 易得此情形下 $D_2(G) \leq d(G) + 1$, 若令故障点集 $F = \{x_2 y_1\}$, 则在 $G - F$ 中顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_3 y_3$ 之间的距离为

$$d(G - F; x_1 y_2, x_3 y_3) = 3 = d(G) + 1,$$

故可得 $D_2(G) \geq d(G) + 1$. 当 $\omega=3, |F|=2$ 时, 构造内点不交路的方法如情形 2), 但由于直径不同,

式(13)中的 R_{15} 长度变为 $4 \leq d(G) + 2$, 于是可得 $D_3(G) \leq d(G) + 2$. 若令故障点集 $F = \{x_1 y_1, x_2 y_1\}$, 则在 $G - F$ 中顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_1 y_3$ 之间的距离为

$$d(G - F; x_1 y_2, x_1 y_3) = 4 = d(G) + 2,$$

故可得 $D_3(G) \geq d(G) + 2$. 证毕.

引理 3^[5] 设 G_1 和 G_2 是非平凡连通图, G_1 和 G_2 的阶数分别为 n_1 和 n_2 , G_1 和 G_2 的边数分别为 c_1 和 c_2 , 则 G_1 和 G_2 的强乘积图边连通度为

$$\lambda(G_1 \boxtimes G_2) = \min\{\lambda_1(n_2 + 2c_2), \lambda_2(n_1 + 2c_1), \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2\}. \tag{21}$$

推论 3 设 $G = P_m \boxtimes S_{1,n-1}$ 是 P_m 和 $S_{1,n-1}$ 的强乘积图, P_m 和 $S_{1,n-1}$ 分别是 $m (\geq 2)$ 阶路和 $n (\geq 3)$ 阶星图, 则 G 的边连通度为

$$\lambda(G) = 3. \tag{22}$$

证明: 因为 $\lambda(P_m) = \lambda(S_{1,n-1}) = 1$, 故由引理 3 可得 $\lambda(G) = \min\{3n - 2, 3m - 2, 3\}$. 又因为 $3n - 2 \geq 7$ 且 $3m - 2 \geq 4$, 故得 $\lambda(G) = 3$. 证毕.

定理 2 设 $G = P_m \boxtimes S_{1,n-1}$ 是 P_m 和 $S_{1,n-1}$ 的强乘积图, P_m 和 $S_{1,n-1}$ 分别是 $m (\geq 2)$ 阶路和 $n (\geq 3)$ 阶星图, 则对任何 $2 \leq t \leq 3$, G 的边容错直径为

$$D'_t(G) = d(G) + 1. \tag{23}$$

证明: 设路 P_m 的顶点集为 $V(P_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 星图 $S_{1,n-1}$ 的顶点集为 $V(S_{1,n-1}) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. 令 $x_a y_u$ 和 $x_b y_v$ 是 G 中任意不同两个顶点, 且 $x_a, x_b \in V(P_m)$, $y_u, y_v \in V(S_{1,n-1})$. 不失一般性, 不妨设 $a < b$, $u < v$, 设星图 $S_{1,n-1}$ 的中心点为 y_1 . 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 则设星图 $S_{1,n-1}$ 中至少存在中心点 y_1 、顶点 y_2 和顶点 y_u 或 y_v . 若 y_u 和 y_v 都是中心点, 则设星图 $S_{1,n-1}$ 中至少存在中心点 y_1 、顶点 y_2 和顶点 y_3 .

情形 1) $m = 2$.

不失一般性, 令路 P_m 的顶点集为 $V(P_m) = \{x_a, x_b\}$. 由推论 2 和推论 3 可知在此情形下, 图 G 的直径为 2, 边连通度为 3.

① $x_a = x_b$.

若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间构造 3 条边不交路:

$$\begin{aligned} R'_1: & x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_a y_v, \\ R'_2: & x_a y_u \rightarrow x_b y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_a y_v, \\ R'_3: & x_a y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v \rightarrow x_a y_v, \end{aligned} \tag{24}$$

这 3 条边不交路的长度不超过 $3 = d(G) + 1$. 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 不妨设 $y_u = y_1$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_a y_v$ 之间构造 3 条边不交路:

$$\begin{aligned} R'_4: & x_a y_1 \rightarrow x_a y_v, \\ R'_5: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_a y_v, \\ R'_6: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_v \rightarrow x_a y_v, \end{aligned} \tag{25}$$

这 3 条边不交路的长度不超过 $2 = d(G)$.

② $y_u = y_v$.

若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_u$ 之间构造 3 条边不交路:

$$\begin{aligned} R'_7: & x_a y_u \rightarrow x_b y_u, \\ R'_8: & x_a y_u \rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_b y_u, \\ R'_9: & x_a y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_u, \end{aligned} \tag{26}$$

这 3 条边不交路的长度不超过 $2 = d(G)$. 若 y_u 和 y_v 都是中心点, 则可在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_1$ 之间构造 3 条边不交路:

$$\begin{aligned} R'_{10}: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_1, \\ R'_{11}: & x_a y_1 \rightarrow x_b y_2 \rightarrow x_b y_1, \end{aligned}$$

$$R'_{12}: x_a y_1 \rightarrow x_b y_3 \rightarrow x_b y_1, \tag{27}$$

这 3 条边不交路的长度不超过 $2=d(G)$.

③ $x_a \neq x_b$ 且 $y_u \neq y_v$.

若 y_u 和 y_v 都不是中心点, 则在图 G 中顶点 $x_a y_u$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间构造 3 条边不交路:

$$\begin{aligned} R'_{13}: x_a y_u &\rightarrow x_a y_1 \rightarrow x_b y_v, \\ R'_{14}: x_a y_u &\rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_a y_v \rightarrow x_b y_v, \\ R'_{15}: x_a y_u &\rightarrow x_b y_u \rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v, \end{aligned} \tag{28}$$

这 3 条边不交路的长度不超过 $3=d(G)+1$. 若 y_u 和 y_v 中有一个顶点是中心点, 不妨设 $y_u = y_1$, 则在图 G 中顶点 $x_a y_1$ 和顶点 $x_b y_v$ 之间构造 3 条边不交路:

$$\begin{aligned} R'_{16}: x_a y_1 &\rightarrow x_b y_v, \\ R'_{17}: x_a y_1 &\rightarrow x_b y_1 \rightarrow x_b y_v, \\ R'_{18}: x_a y_1 &\rightarrow x_a y_v \rightarrow x_b y_v, \end{aligned} \tag{29}$$

这 3 条边不交路的长度不超过 $2=d(G)$.

在此情形下, $D'_3(G) \leq d(G)+1$. 考虑图 G 中的两个顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_2 y_3$. 若令故障边集 $F = \{(x_1 y_2, x_1 y_1), (x_1 y_2, x_2 y_1)\}$, 则在 $G-F$ 中顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_2 y_3$ 之间的距离为

$$d(G-F; x_1 y_2, x_2 y_3) = 3 = d(G) + 1,$$

易验证这也是 $G-F$ 的直径, 故可得 $D'_3(G) \geq d(G)+1$. 因为内点不交也是边不交, 故由定理 1 中的情形 1) 可得 $D'_2(G) = d(G)$.

情形 2) $m > 3$.

由定理 1 中情形 2) 可得此情形下, 图 G 中任意两个顶点之间都至少存在 2 条长度不超过 $d(G)$ 的边不交路或 3 条长度不超过 $d(G)+1$ 的边不交路, 则可得 $D'_3(G) \leq d(G)+1, D'_2(G) = d(G)$.

下面讨论下界, 考虑图 G 中的两个顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_m y_3$. 若令故障边集 $F = \{(x_1 y_2, x_2 y_2), (x_1 y_2, x_2 y_1)\}$, 则在 $G-F$ 中顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_m y_3$ 之间的距离为 $d(G-F; x_1 y_2, x_m y_3) = d(G)+1$, 易验证这也是 $G-F$ 的直径, 故可得 $D'_3(G) \geq d(G)+1$.

情形 3) $m = 3$.

当 $t = 2, |F| = 1$ 时, 由定理 1 中情形 2) 易得 $D'_2(G) \leq d(G)+1$, 若令故障边集 $F = \{(x_1 y_2, x_2 y_1)\}$, 则在 $G-F$ 中顶点 $x_1 y_2$ 和 $x_3 y_3$ 之间的距离为

$$d(G-F; x_1 y_2, x_3 y_3) = 3 = d(G) + 1,$$

故可得 $D'_2(G) \geq d(G)+1$. 当 $t = 3, |F| = 2$ 时, 参照定理 1 中情形 2), 将式(13)中长度不超过 4 的 3 条内点不交路 R_{13}, R_{14} 和 R_{15} 用式(24)中的 3 条长度不超过 3 的边不交路 R'_1, R'_2 和 R'_3 替代, 则可得此情形下, 图 G 中任意两个顶点之间都至少存在 3 条长度不超过 $d(G)+1$ 的边不交路, 故有 $D'_3(G) \leq d(G)+1$. 又因为 $D'_3(G) \geq D'_2(G) \geq d(G)+1$, 所以可得 $D'_3(G) = d(G)+1$. 证毕.

引理 4(Menger 定理)^[24] 设 G 是连通无向图, x 和 y 是 G 中不同的两个顶点, 令 $\kappa(G; x, y)$ 表示 x 与 y 之间的连通度, 令 $\lambda(G; x, y)$ 表示 x 与 y 之间的边连通度, 则有

$$\begin{aligned} \zeta(G; x, y) &= \kappa(G; x, y), \quad (x, y) \notin E(G), \\ \eta(G; x, y) &= \lambda(G; x, y). \end{aligned} \tag{30}$$

容错直径是一种特殊的直径, 通过直径的定义和 Menger 定理, 再利用故障后的顶点数与边数构造的不等关系, 可给出关于强乘积图的点容错直径和边容错直径的两个上界.

定理 3 设 G_1 和 G_2 是两个极大连通图, 阶数分别为 n_1 和 n_2 , 最小度分别为 δ_1 和 δ_2 . 则对任何 $1 \leq \omega \leq \kappa(G)$, G_1 和 G_2 的强乘积图 $G = G_1 \boxtimes G_2$ 的点容错直径满足:

$$D_\omega(G) \leq \max \left\{ \lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\delta_1 n_2 - \omega + 1} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\delta_2 n_1 - \omega + 1} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 - \omega + 1} \rfloor + 1 \right\}. \tag{31}$$

证明: 设 F 为故障点集, 且有 $|F| = \omega - 1$. 不失一般性, 不妨设 $d(G-F) = h$. 则当 $h \leq 1$ 时, $G-F$ 是完全图, 从而在 $G-F$ 中 x 和 y 之间的距离为 1. 当 $h \geq 2$ 时, 设 x 和 y 是 $G-F$ 中任意两个不

同顶点, 且使得 x 和 y 之间的距离为 $d(G-F; x, y) = h$.

由 Menger 定理可知, 在 $G-F$ 中 x 和 y 之间至少存在 $(\kappa(G) - \omega + 1)$ 条内点不交路, 且每条路的内点数至少为 $h - 1$. 又因为强乘积图 G 的顶点数满足 $|V(G)| = n_1 n_2$, 故可得图 G 发生点故障后, 顶点总数与 x 和 y 之间的内点不交路的顶点数满足如下关系:

$$n_1 n_2 - \omega + 1 \geq (\min\{\delta_1 n_2, \delta_2 n_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2\} - \omega + 1)(h - 1) + 2,$$

$$h \leq \lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\min\{\delta_1 n_2, \delta_2 n_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2\} - \omega + 1} \rfloor + 1 =$$

$$\max\left\{\lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\delta_1 n_2 - \omega + 1} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\delta_2 n_1 - \omega + 1} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1 n_2 - \omega - 1}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 - \omega + 1} \rfloor + 1\right\}. \quad (32)$$

证毕.

定理 4 设 G_1 和 G_2 是两个非平凡连通图, 阶数分别为 n_1 和 n_2 , 边连通度分别为 λ_1 和 λ_2 , 最小度分别为 δ_1 和 δ_2 , 边数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 . 则对任何 $1 \leq t \leq \lambda(G)$, G_1 和 G_2 的强乘积图 $G = G_1 \boxtimes G_2$ 的边容错直径满足:

$$D'_t(G) \leq \max\left\{\lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\lambda_1 n_2 + 2\lambda_1 \epsilon_2 - t + 1} \rfloor, \lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\lambda_2 n_1 + 2\lambda_2 \epsilon_1 - t + 1} \rfloor, \right.$$

$$\left. \lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 - t + 1} \rfloor\right\}. \quad (33)$$

证明: 设 F 为故障边集, 且有 $|F| = t - 1$. 不失一般性, 不妨设 $d(G-F) = h$. 设 x 和 y 是 $G-F$ 中任意两个不同顶点, 且使得 x 和 y 之间的距离为 $d(G-F; x, y) = h$.

由 Menger 定理可知, 在 $G-F$ 中 x 和 y 之间至少存在 $(\lambda(G) - t + 1)$ 条边不交路, 且每条路的边数至少为 h . 又因为强乘积图 G 的边数满足

$$|E(G)| = n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2,$$

故可得图 G 发生边故障后, 边总数与 x 和 y 之间的边不交路的边数满足如下关系:

$$n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1 \geq (\min\{\lambda_1 n_2 + 2\lambda_1 \epsilon_2, \lambda_2 n_1 + 2\lambda_2 \epsilon_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2\} - t + 1)h,$$

$$h \leq \lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\min\{\lambda_1 n_2 + 2\lambda_1 \epsilon_2, \lambda_2 n_1 + 2\lambda_2 \epsilon_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2\} - t + 1} \rfloor =$$

$$\max\left\{\lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\lambda_1 n_2 + 2\lambda_1 \epsilon_2 - t + 1} \rfloor, \lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\lambda_2 n_1 + 2\lambda_2 \epsilon_1 - t + 1} \rfloor, \right.$$

$$\left. \lfloor \frac{n_1 \epsilon_2 + n_2 \epsilon_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - t + 1}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 - t + 1} \rfloor\right\}. \quad (34)$$

证毕.

综上所述, 本文首先通过归纳假设和构造内点或边不交路的方法, 再结合星图的中心性, 给出了路与星图的强乘积图的点容错直径和边容错直径. 结果表明, 路与星图的强乘积图拥有较小的点容错直径和边容错直径, 特别对于边容错直径, 即使在最差边故障情形下, 其最大传输延迟也只有 $d(G) + 1$, 是一种适用于高可靠性集中控制系统的拓扑结构. 其次, 通过顶点数和边数构造的不等关系, 给出了两个极大连通图的强乘积图的点容错直径的上界及两个非平凡连通图的强乘积图的边容错直径的上界, 拓展了关于强乘积图的容错直径的一般性结论.

参 考 文 献

[1] SABIDUSSI G. Graph Multiplication [J]. Mathematische Zeitschrift, 1959, 72(1): 446-457.
 [2] HAMMACK R, IMRICH W, KLAUVŽAR S, et al. Handbook of Product Graphs [M]. Boca Raton: CRC Press, 2011: 1-533.
 [3] SUN L, XU J M. Connectivity of Strong Product Graphs [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(3): 241-243.
 [4] YANG C, XU J M. Connectivity and Edge-Connectivity of Strong Product Graphs [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(5): 449-455.

- [5] ŠPACAPAN S. Connectivity of Strong Products of Graphs [J]. *Graphs and Combinatorics*, 2010, 26(3): 457-467.
- [6] BERMUDO S, HERNÁNDEZ-GÓMEZ J C, SIGARRETA J M. Total k -Domination in Strong Product Graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2019, 263(C): 51-58.
- [7] GOLOGRANC T, REPOLUSK P. Toll Number of the Strong Product of Graphs [J]. *Discrete Mathematics*, 2019, 342(3): 807-814.
- [8] ANANTHARAMAN S. Adjacent Vertex-Distinguishing Proper Edge-Coloring of Strong Product of Graphs [J]. *Applications and Applied Mathematics*, 2019, 14(2): 1169-1187.
- [9] SHARIFI S, IRANMANESH M A. Adjacency and Shift-Transitivity in Graph Products [J]. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 2017, 41(3): 707-711.
- [10] DARA S, MISHRA S, NARAYANAN N, et al. Strong Edge Coloring of Cayley Graphs and Some Product Graphs [J]. *Graphs and Combinatorics*, 2022, 38(2): 51-1-51-20.
- [11] ZARIBAFIYAN A, MARCHAND D J J, CHANGIZ REZAEI S S. Systematic and Deterministic Graph Minor Embedding for Cartesian Products of Graphs [J]. *Quantum Information Processing*, 2017, 16(5): 136-1-136-26.
- [12] KRISHNAMOORTHY M S, KRISHNAMURTHY B. Fault Diameter of Interconnection Networks [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 1987, 13(5/6): 577-582.
- [13] CHUNG F R K, GAREY M R. Diameter Bounds for Altered Graphs [J]. *Journal of Graph Theory*, 1984, 8(4): 511-534.
- [14] DANKELMANN P. Bounds on the Fault-Diameter of Graphs [J]. *Networks*, 2017, 70(2): 132-140.
- [15] BANIČ I, ERVEŠ R, ŽEROVNIK J. Edge, Vertex and Mixed Fault Diameters [J]. *Advances in Applied Mathematics*, 2009, 43(3): 231-238.
- [16] ESFAHANIAN A H, HAKIMI S L. Fault-Tolerant Routing in DeBruijn Communication Networks [J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1985, 34(9): 777-788.
- [17] LATIFI S. On the Fault-Diameter of the Star Graph [J]. *Information Processing Letters*, 1993, 46(3): 143-150.
- [18] DU D Z, HSU D F, LYUU Y D. On the Diameter Vulnerability of Kautz Digraphs [J]. *Discrete Mathematics*, 1996, 151(1/2/3): 81-85.
- [19] CHEN X B. Edge-Fault-Tolerant Diameter and Bipanconnectivity of Hypercubes [J]. *Information Processing Letters*, 2010, 110(24): 1088-1092.
- [20] MA M J, WEST D B, XU J M. The Vulnerability of the Diameter of the Enhanced Hypercubes [J]. *Theoretical Computer Science*, 2017, 694: 60-65.
- [21] QI H, ZHU X D. The Fault-Diameter and Wide-Diameter of Twisted Hypercubes [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2018, 235: 154-160.
- [22] XU M, XU J M, HOU X M. Fault Diameter of Cartesian Product Graphs [J]. *Information Processing Letters*, 2005, 93(5): 245-248.
- [23] BANIČ I, ŽEROVNIK J. The Fault-Diameter of Cartesian Products [J]. *Advances in Applied Mathematics*, 2008, 40(1): 98-106.
- [24] 徐俊明. 组合网络理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2007: 1-333. (XU J M. *Combinatorial Theory in Networks* [M]. Beijing: Science Press, 2007: 1-333.)

(责任编辑: 赵立芹)