doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023174

拓扑空间中的理想收敛

王　武[1]，张　舜[2]
(1. 天津理工大学中环信息学院 基础部，天津 300380；2. 天津仁爱学院 数学教学部，天津 301636)

摘要：用理想收敛结构解决定向拓扑的刻画问题，给出理想 S 极限和理想广义 S 极限可拓扑化的充要条件. 结果表明：T_0 拓扑空间上的定向拓扑、理想 S 极限拓扑和理想广义 S 极限拓扑相同；定向空间中的理想 S 收敛是拓扑的当且仅当其为 c-空间；定向空间中理想广义 S 收敛是拓扑的当且仅当其为局部强紧空间.

关键词：理想 S 极限；理想广义 S 极限；c-空间；局部强紧空间；定向拓扑

中图分类号：O153.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1671-5489(2024)01-0013-07

Ideal Convergence in Topological Space

WANG Wu[1], ZHANG Shun[2]
(1. *Department of Foundation*, *Zhonghuan Information College Tianjin University of Technology*, *Tianjin* 300380, *China*;
2. *Department of Mathematics Teaching*, *Tianjin Ren'ai College*, *Tianjin* 301636, *China*)

Abstract: We used an ideal convergence structure to solve the characterization problem of directed topology, and provided necessary and sufficient conditions for the topological transformation of ideal S limits and ideal generalized S limits. The results show that the directed topology, the ideal S limit topology and the ideal generalized S limit topology are the same in T_0 topological spaces. The ideal S convergence in a directed space is topological if and only if it is a c-space. The ideal generalized S convergence in a directed space is topological if and only if it is a locally strongly compact space.

Keywords: ideal S limit; ideal generalized S limit; c-space; locally strongly compact space; directed topology

偏序集理论旨在为计算机程序式语言提供数学模型，因此受到广泛关注，目前已取得了很多有价值的结果和模型[1-3]. 随着计算机理论的发展，偏序集理论不断向信息科学、逻辑学、分析学及各种应用学科相融合[4-5]. 将偏序集理论推广到拓扑空间是序结构理论的重要研究方向之一[6-7]，如：王武[8]研究了拓扑空间的连续性及其伴随式刻画；Luo 等[9]研究了拓扑空间的特殊连续性. 网的收敛是研究拓扑结构的重要工具，网可以完全刻画拓扑空间的开集，本文利用定向集的理想定义网的理想 S 极限和理想广义 S 极限，并研究它们与 c-空间和局部强紧空间的关系. 结果表明：1) T_0 拓扑空间上的定向拓扑、理想 S 极限拓扑和理想广义 S 极限拓扑相同；2) 定向空间中理想 S 收敛是拓扑的当且仅当其为 c-空间；3) 定向空间中理想广义 S 收敛是拓扑的当且仅当拓扑空间是局部强紧空间.

1　预备知识

设 L 是偏序集，$D\subseteq L$，如果 D 中任意两个元在 D 中有上界，则 D 称为定向集. 如果 L 的每个

收稿日期：2023-05-09.

第一作者简介：王　武(1985—)，男，满族，硕士，副教授，从事拓扑学及序结构的研究，E-mail：wangwu@alu.scu.edu.cn.

基金项目：天津市教委科研计划项目(批准号：2023KJ281)和高等学校大学数学教学研究与发展中心教改项目(批准号：CMC20210115).

定向子集D都有上确界(记为$\sup D$)，则L称为定向完备偏序集(简称dcpo)．任给子集$U\subseteq L$，如果U是上集，即$U=\uparrow U$且任意的定向集$D\subseteq L$，$\sup D\in U$蕴含$D\cap U\neq\varnothing$，则U称为Scott开集．所有的Scott开集构成一个拓扑，称为Scott拓扑，记为$\sigma(L)$．设$A\subseteq L$，记

$$\uparrow A=\{x\in L:\exists a\in A,\ a\leqslant x\},\qquad \downarrow A=\{x\in L:\exists a\in A,\ x\leqslant a\}.$$

若A为单点集$\{a\}$，则记$\uparrow A=\uparrow a$，$\downarrow A=\downarrow a$[10]．

设(X,τ)是T_0拓扑空间，$x,y\in X$，定义如下偏序关系：$x\in y\Leftrightarrow x\in cl_\tau\{y\}$，其中$cl_\tau\{y\}$为单点集$\{y\}$在拓扑$\tau$中的闭包，由此定义的序称为特殊化序[11]．本文$T_0$拓扑空间上的序关系总是由拓扑$\tau$按上述方法生成的．设$(X,\tau)$是$T_0$拓扑空间，$J$是定向集，映射$\xi$：$J\to X$称为$X$上的网，简记为$(x_j)_{j\in J}$．任给$x\in X$，如果$(x_j)_{j\in J}$终在$x$的任意开邻域$U$中，即存在$j_0\in J$，使得当$j\geqslant j_0$时$x_j\in U$，则称网$(x_j)_{j\in J}$关于拓扑$\tau$收敛到$x$，记为$(x_j)_{j\in J}\to_\tau x$．$T_0$拓扑空间$(X,\tau)$的每个定向集$D$都可视为$X$的一个网，指标集即为其自身．若$D$收敛到$x$，即$x$的任意开邻域交$D$非空，则记为$D\to_\tau x$．易知，$\{y\}\to_\tau x$当且仅当$x\leqslant y$．

定义1[12] 设(X,τ)是T_0拓扑空间，$U\subseteq X$．

1）如果对任意定向集$D\to_\tau x$，$x\in U$蕴含存在$d\in D$，使得$d\in U$，即$D\cap U\neq\varnothing$，则U称为定向开集．所有定向开集的集合记为$d(X)$，显然$\tau\subseteq d(X)$．

2）如果$\tau=d(X)$，则(X,τ)称为定向空间．

注1 1）所有定向开集的集合可构成X上的拓扑，称为定向拓扑，仍记为$d(X)$．

2）偏序集赋予Scott拓扑是定向空间，从而带有特殊化序的定向空间是比定向完备集更一般的数学模型．

3）每个定向开集都是上集．

定义2[13] 设(X,τ)是T_0拓扑空间，如果对任意$y\in U\in\tau$，存在$x\in X$，使得$y\in(\uparrow x)^\circ_\tau\subseteq\uparrow x\subseteq U$，其中$(\uparrow x)^\circ_\tau$表示$\uparrow x$在拓扑$\tau$中的内部，则$(X,\tau)$称为$c$-空间．

目前，关于c-空间的研究已有很多结果．例如：domain上赋予Scott拓扑是c-空间[13]；Keimel[14]把c-空间与拓扑锥相结合，提出了c-锥的概念．

定义3[15] 设(X,τ)是T_0拓扑空间，$x,y\in X$．对任意定向集$D\subseteq X$，如果$D\to_\tau x$能够蕴含存在$d\in D$，使得$x\in d$，即$D\cap\uparrow x\neq\varnothing$，则称$x$逼近$y$，记为$x\ll y$．

令$\Uparrow x=\{y\in X:x\ll y\}$；$\Downarrow x=\{y\in X:y\ll x\}$．显然上述定义的逼近关系满足如下性质：

1）$x\ll y$蕴含$x\leqslant y$；

2）$s\leqslant x\ll y\leqslant t$蕴含$s\ll t$．

命题1[15] 设(X,τ)是c-空间，则下列结论成立：

1）对任意$x,y\in X$，$x\ll y\Leftrightarrow y\in(\uparrow x)^\circ_\tau$；

2）$\{\Uparrow x:x\in X\}$是(X,τ)的一组基；

3）对任意$x,y\in X$，$x\ll y\Rightarrow\exists z\in X$，$x\ll z\ll y$．

命题2[15] 设(X,τ)是T_0拓扑空间，则下列结论等价：

1）(X,τ)是c-空间；

2）(X,τ)是定向空间且任给$x\in X$，$\Downarrow x$是定向的且作为网$\Downarrow x\to_\tau x$；

3）(X,τ)是定向空间且任给$x\in X$，存在定向集$D\subseteq\Downarrow x$使得$D\to_\tau x$．

设(X,τ)是T_0拓扑空间，G,H为X的两个非空子集．如果$H\subseteq\uparrow G$，则$G\leqslant H$，这种序关系称为Symth序，Symth序是一种预序关系．如果对任意的定向集$D\subseteq X$，$D\to_\tau x\in\uparrow H$蕴含存在$d\in D$，使得$d\in\uparrow G$，即$D\cap\uparrow G\neq\varnothing$，则$G\ll H$．特别地，$\{y\}\ll H$简记为$y\ll H$，$G\ll\{x\}$简记为$G\ll x$．显然，$G\ll H$蕴含$\forall h\leqslant H$，$G\ll h$．易知上述定义的关系有如下性质：

1）$G\ll H$蕴含$G\leqslant H$；

2）$G\leqslant E\ll F\leqslant H$蕴含$G\ll H$．

设(X,τ)是T_0拓扑空间，令$P^w(X)$表示X的非空有限子集的集族．设非空集族$D(F)\subseteq P^w(X)$，

如果任给 $E,F\in D(F)$，存在有限集 $H\in D(F)$，使得 $\uparrow H\subseteq\uparrow E\cap\uparrow F$，则集族 $D(F)$ 称为定向的. 如果对任意 $x\in U\in\tau$，存在 $F\in D(F)$，使得 $\uparrow F\subseteq U$，则称定向集族 $D(F)$ 收敛到 x，记为 $D(F)\to_\tau x$. 对任意 $x\in L$，记 $\mathrm{fin}(x)=\{F\in P^w(X):F\ll x\}$.

定义 4[16]　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间. 如果 (X,τ) 是定向空间，$\mathrm{fin}(x)$ 是定向集族且 $\mathrm{fin}(x)\to_\tau x$，则称 (X,τ) 是拟连续空间.

拟连续空间的等价刻画是 (X,τ) 是定向空间，且存在定向集族 $D(F)\subseteq\mathrm{fin}(x)$ 使得 $D(F)\to_\tau x$.

命题 3[16]　设 (X,τ) 是拟连续空间，$F\in P^w(X)$，记 $\Uparrow F=\{x:F\ll x\}$，则：

1）对任意 $x\in X$，H 为 X 的非空有限子集：如果有 $H\ll x$，则存在有限集 $G\subseteq X$，使得 $H\ll G\ll x$；

2）$(\uparrow F)^\circ_\tau=\Uparrow F$；

3）$\{\Uparrow F:F\in P^w(X)\}$ 为 $d(X)$ 的基.

设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，如果对任意 $x\in U\in\tau$，存在 $F\in P^w(X)$，使得 $x\in(\uparrow F)^\circ_\tau\subseteq\uparrow F\subseteq U$，则 (X,τ) 称为局部强紧空间. 易知，局部强紧空间的非空子集 U 是开集当且仅当 $U=\bigcup\{(\uparrow F)^\circ_\tau:F\in P^w(X),\ F\subseteq U\}$. 文献[16]证明了 T_0 拓扑空间是拟连续空间当且仅当其为局部强紧空间.

命题 4[16]　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，$D(F)\subseteq P^w(X)$ 是定向集族，$G,H\in P^w(X)$. 如果 $G\ll H$ 并且 $D(F)\to_\tau x\in H$，则存在 $F\in D(F)$，使得 $F\subseteq\uparrow G$.

设 J 是非空集合，如果 J 的子集族 I 满足：

1）$A\in I$，$B\subseteq A$ 蕴含 $B\in I$；

2）$A,B\subseteq I$ 蕴含 $A\cup B\in I$.

则称 I 是 J 的理想. 如果 $J\notin I$，则称 I 是 J 的非平凡理想.

令 J 是定向集，再令 $M_j=\{j'\in J:j'\in\uparrow j\}$，则易知 $I_0=\{A\subseteq J:A\subseteq J\backslash M_j\}$ 是 J 的非平凡理想. 显然对任意有限集 $F\subseteq J$，$f\in F$，令 $M_F=\{j'\in J:j'\in\uparrow F\}$，则 $M_f\subseteq M_F$，故 $J\backslash M_F\subseteq J\backslash M_f\in I_0$，从而 $J\backslash M_F\in I_0$.

注 2　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，网 $(x_j)_{j\in J}\subseteq X$，子集 $A\subseteq X$，如果 $\{j'\in J:x_{j'}\notin\uparrow A\}\in I_0$，则 $(x_j)_{j\in J}$ 终在 $\uparrow A$ 中.

证明：设 $\{j'\in J:j'\notin\uparrow A\}\in I_0$，则存在 $j_0\in J$，使得 $\{j'\in J:j'\notin\uparrow A\}\subseteq J\backslash M_{j_0}$，从而 $M_{j_0}\subseteq\{j'\in J:x_{j'}\in\uparrow A\}$，故当 $j\geqslant j_0$ 时，$j\in M_{j_0}$，即 $x\in\uparrow A$.

定义 5[17]　设 (X,τ) 是拓扑空间，网 $(x_j)_{j\in J}\subseteq X$，$I$ 是 J 的理想，若 $x\in U\in\tau$ 蕴含 $\{j\in J:x_j\notin U\}\in I$，则称网 $(x_j)_{j\in J}$ 是关于拓扑 τ 理想收敛到 x 的，也称 x 是网 $(x_j)_{j\in J}$ 的理想极限，并记为 $(x_j)_{j\in J}\to_I x$.

易知，拓扑空间 (X,τ) 中的网 $(x_j)_{j\in J}\to_\tau x$ 当且仅当 $(x_j)_{j\in J}\to_{I_0}x$[17].

2　理想 S 极限

下面介绍 T_0 拓扑空间中的理想 S 极限，并利用其刻画拓扑空间中的逼近关系，同时给出定向空间为 c-空间的充要条件.

定义 6　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，$(x_j)_{j\in J}$ 是 X 中的一个网，I 是指标集 J 的非平凡理想. 如果存在定向集 $D\subseteq X$，使得：

1）$D\to_\tau x$；

2）对任意 $d\in D$，$\{j\in J:x_j\ngeqslant d\}\in I$.

则称网 $(x_j)_{j\in J}$ 是理想 S 收敛到 x 的，或称 x 是网 $(x_j)_{j\in J}$ 的理想 S 极限，记为 $(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$.

命题 5　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，$x,y\in X$，则 $x\ll y$ 当且仅当任意网 $(x_j)_{j\in J}$ 和 J 的非平凡理想 I，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}y$ 蕴含 $\{j\in J:x_j\ngeqslant x\}\in I$.

证明：设 $x\ll y$，网 $(x_j)_{j\in J}$ 和 J 的非平凡理想 I 满足 $(x_j)_{j\in J}\to_{IS}y$，则存在定向集 $D\subseteq X$，使得 $D\to_\tau y$，且 $\forall d\in D$，有 $\{j\in J:x_j\ngeqslant d\}\in I$. 由 $x\ll y$ 和 $D\to_\tau y$ 知，存在 $d'\in D$，使得 $x\leqslant d'$，从而 $\{j\in J:x_j\ngeqslant x\}\subseteq\{j\in J:x_j\ngeqslant d'\}\in I$，即 $\{j\in J:x_j\ngeqslant x\}\in I$.

反之，假设任意网$(x_j)_{j\in J}$和J的非平凡理想I，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}y$蕴含$\{j\in J: x_j \not\geqslant x\}\in I$. 设定向集$D\to_\tau y$，考察网$(x_d)_{d\in D}$，其中$x_d=d$对任意的$d\in D$成立. 则$(x_d)_{d\in D}\to_{I_0(D)S}y$，因为集族$I_0(D)$是定向集$D$的非平凡理想，故$\{d\in D: x_d \not\geqslant x\}\neq D$，即存在$x_d=d\geqslant x$，使得$x\ll y$.

命题6 设(X,τ)是c-空间，$x,y\in X$，$(x_j)_{j\in J}$是网，I是J的非平凡理想，则$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}y$当且仅当$x\ll y$蕴含$\{j\in J: x_j \not\geqslant x\}\in I$.

证明：设$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}y$且$x\ll y$，则$\{j\in J: x_j \not\geqslant x\}\in I$. 反之，因为$(X,\tau)$是$c$-空间，故对任意$y\in X$，$\Downarrow y$是定向集且$\Downarrow y\to_\tau y$. 对任意$d\in\Downarrow y$，由已知$\{j\in J: x_j \not\geqslant d\}\in I$，则$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}y$.

设I是J的非平凡理想，令$\tau_{IS}=\{U\subseteq X: (x_j)_{j\in J}\to_{IS}x,\ x\in U\Rightarrow\{j: x_j\notin U\}\in I\}$.

命题7 设(X,τ)是T_0拓扑空间，则τ_{IS}是X上的一个拓扑，称为理想S极限拓扑；并且$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$蕴含$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于拓扑τ_{IS}成立.

证明：显然$\varnothing\in\tau_{IS}$. 因为$\varnothing\in I$，故$X\in\tau_{IS}$. 设$U,V\in\tau_{IS}$，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$且$x\in U\cap V$. 显然$x\in U$，因为$U\in\tau_{IS}$，故$\{j\in J: x_j\notin U\}\in I$. 同理，$\{j: x_j\notin V\}\in I$，故
$$\{j\in J: x_j\notin U\cap V\}=\{j: x_j\notin U\}\cup\{j: x_j\notin V\}\in I,$$
从而$U\cap V\in\tau_{IS}$. 设$U_i\in\tau_{IS}$，$i\in K$，K为指标集，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$且$x\in\bigcup U_i$，则存在$i\in K$，使得$x\in U_i$，因此有$\{j: x_j\notin U_i\}\in I$. 又因为$\{j: x_j\notin\bigcup U_i\}\subseteq\{j: x_j\notin U_i\}\in I$，故$\{j\in J: x\notin\bigcup U_i\}\in I$，从而$\bigcup U_i\in\tau_{IS}$. 综上$\tau_{IS}$是$X$上的一个拓扑. 由$\tau_{IS}$的定义，显然有$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$蕴含$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于拓扑$\tau_{IS}$成立.

命题8 设(X,τ)是T_0拓扑空间，则τ_{IS}是使得$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$蕴含$(x_j)_{j\in J}\to_I x$的最细拓扑.

证明：设拓扑τ使得$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$蕴含$(x_j)_{j\in J}\to_I x$，只需证明$\tau\subseteq\tau_{IS}$. 对任意$U\in\tau$，如果有$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x\in U$，则$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于拓扑$\tau$成立，即$\{j: x_j\notin U\}\in I$，从而$U\in\tau_{IS}$.

命题9 设(X,τ)是T_0拓扑空间，则理想S极限拓扑与定向拓扑相同，即$\tau_{IS}=d(X)$.

证明：设$U\in d(X)$，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x\in U$，则存在定向集$D$，使得$D\to_\tau x$，并且对任意的$d\in D$，$\{j\in J: x_j \not\geqslant d\}\in I$. 因为$D\to_\tau x\in U$且$U\in d(X)$，故$D\cap U\neq\varnothing$，即存在$d_0\in D$，使得$d_0\in U$. 由于定向开集都是上集，因此$\uparrow d_0\subseteq U$. 又因为$\{j\in J: x_j\notin U\}\subseteq\{j\in J: x_j \not\geqslant d_0\}\in I$，$\{j\in J: x_j\notin U\}\in I$，故$U\in\tau_{IS}$.

设$U\in\tau_{IS}$，定向集$D\to_\tau x\in U$. 考察网$(x_d)_{d\in D}$，其中$x_d=d$对任意的$d\in D$成立. 显然$(x_d)_{d\in D}\to_{I_0(D)S}x$，因为集族$I_0(D)$是定向集$D$的非平凡理想，故有$\{d\in D: x_d\notin U\}\neq D$，从而存在$x_d=d\in U$，进而$D\cap U\neq\varnothing$，$U\in d(X)$.

推论1 设(X,τ)是定向空间，则原拓扑、定向拓扑、理想S极限拓扑相同，即$\tau=d(X)=\tau_{IS}$.

推论2 设(X,τ)是c-空间，则$\{\Uparrow x: x\in X\}$是τ_{IS}的基.

命题10 设(X,τ)是定向空间，则下列结论等价.

1) (X,τ)是c-空间；

2) $(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$等价$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于定向拓扑成立.

证明：令(X,τ)是c-空间，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$，$x\in U\in d(X)$. 因为$\tau_{IS}=d(X)$，故$U\in\tau_{IS}$，从而$\{j\in J: x_j\notin U\}\in I$，即$(x_j)_{j\in J}\to_I x$，进而$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于定向拓扑成立. 设$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于定向拓扑成立，则$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于$\tau_{IS}$成立. 由$(X,\tau)$是$c$-空间知，$\Downarrow x$是定向集且$\Downarrow x\to_\tau x$. 对任意的$a\in\Downarrow x$，有$x\in\Uparrow a\in\tau_{IS}$. 因为$(x_j)_{j\in J}$关于拓扑$\tau_{IS}$是理想收敛到$x$的且$\Uparrow a\in d(X)$，故$\{j\in J: x_j\notin\Uparrow a\}\in I$，从而$\{j\in J: x_j\notin\uparrow a\}\subseteq\{j\in J: x_j\notin\Uparrow a\}\in I$，$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$.

设$(x_j)_{j\in J}\to_{IS}x$等价$(x_j)_{j\in J}\to_I x$关于定向拓扑成立. 对任意$x\in X$，令$N(x)=\{U\in d(X): x\in U\}$，$M(x)=\{(U,y): U\in N(x),\ y\in U\}$. 定义如下预序：$(U_1,y_1)\geqslant(U_2,y_2)\Leftrightarrow U_1\subseteq U_2$，显然$M(x)$是定向集. 设$(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}=y$，则$(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}$作为网在定向拓扑中收敛到$x$，即$(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}\to_{I_0}x$. 由已知有$(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}\to_{I_0S}x$，从而存在定向集族$D\subseteq X$，使得$D\to_\tau x$，且对任意的$d\in D$，$\{(U,y)\in M(x): x_{U,y} \not\geqslant d\}\in I_0$，于是存在$(U_d,y_d)\in M(x)$，使得当$(U,y)\geqslant(U_d,y_d)$时，$x_{(U,y)}\geqslant d$. 即$(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}$终在$\uparrow d$中. 任取$w\in U_d$，则$(U_d,w)\geqslant(U_d,y_d)$，因此$w=x_{(U_d,w)}\geqslant$

$x_{(U_d, y_d)} \geqslant y_d \geqslant d$，即对任意的 $d \in D$，存在 x 的开邻域 U_d 满足 $U_d \subseteq \uparrow d$ 对任意的 $d \in D$ 成立.

对任意的 $d \in D$，定向集 $D' \subseteq X$，$D' \to_\tau x$，因为 $x \in U_d \in d(X)$，故存在 $d' \in D' \cap U_d \subseteq \uparrow d$，即 $d \in d'$，从而 $d \ll x$，则 $D \subseteq \Downarrow x$ 且 $D \to_\tau x$. 因为 X 是定向空间，故由命题 2 知 X 是 c-空间.

定义 7　设 (X,τ) 是拓扑空间，$x \in X$，I 是 J 的非平凡理想，网 $(x_j)_{j\in J} \subseteq X$，$(x_j)_{j\in J} \to x$ 表示某种收敛结构. 如果存在拓扑 τ，使得 $(x_j)_{j\in J} \to x$ 当且仅当 $(x_j)_{j\in J} \to_I x$ 关于拓扑 τ 成立，则称收敛结构 $(x_j)_{j\in J} \to x$ 是拓扑的.

推论 3　设 (X,τ) 是 c-空间，则理想 S 收敛关于拓扑 τ 是拓扑的.

证明：由命题 10 知，(X,τ) 是 c-空间当且仅当理想 S 收敛关于拓扑 $d(X)$ 是拓扑的，而 c-空间都是定向空间，从而理想 S 收敛关于拓扑 τ 是拓扑的.

3　理想广义 S 极限

下面用定向集族代替理想 S 收敛中的定向集定义理想广义 S 收敛，并研究其与局部强紧空间的关系.

定义 8　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，$(x_j)_{j\in J}$ 是 X 中的一个网，I 是指标集 J 的非平凡理想. 如果存在定向集族 $D(F) \subseteq P^w(X)$，使得 $D(F) \to_\tau x$，且对任意的 $F \in D(F)$，$\{j \in J: x_j \notin \uparrow F\} \in I$，则称网 $(x_j)_{j\in J}$ 是理想广义 S 收敛到 x，或者称 x 是网 $(x_j)_{j\in J}$ 的理想广义 S 极限，记为 $(x_j)_{j\in J} \to_{IGS} x$.

命题 11　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，则理想 S 收敛蕴含理想广义 S 收敛，即 $(x_j)_{j\in J} \to_{IS} x$ 蕴含 $(x_j)_{j\in J} \to_{IGS} x$.

证明：设 $(x_j)_{j\in J} \to_{IS} x$，则存在定向集 $D \subseteq L$，使得 $D \to_\tau x$，且对任意的 $d \in D$，$\{j \in J: x_j \ngeqslant d\} \in I$. 令 $D(F) = \{\{d\}: d \in D\}$，则 $D(F) \to_\tau x$，且 $\forall F \in F$，$\{j \in J: x_j \notin \uparrow F\} = \{j \in J: x_j \ngeqslant d\} \in I$，故 $(x_j)_{j\in J} \to_{GIS} x$.

上述结果的逆命题不一定成立，说明理想广义 S 极限是理想 S 极限的推广.

例 1　设 $L = \mathbb{N} \cup \{\infty, a\}$，这里 $\mathbb{N}$ 表示自然数的集合. 对任意 $x, y \in L$，$x \leqslant y \Leftrightarrow y = \infty$ 或 $x, y \in \mathbb{N}$，$x \leqslant y$，赋予 Scott 拓扑，则 Scott 拓扑生成的特殊化序与原序一致. 易知，L 是非连续的拟连续 domain，即拟连续空间. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$\{a, n\} \ll a$ 且 $D(F) = \{\{a, n\}: n \in \mathbb{N}\}$ 满足 $D(F) \to_\sigma a$. 令 $x_{2n} = n$，$x_{2n+1} = a$，则 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个网. 取 N 的理想 I_0，则显然 $\{m: x_m \notin \uparrow \{n, a\}\} \in I_0$. 令 $D(F) = \{\{n, a\}: n \in \mathbb{N}\}$，则显然 $D(F) \to_\sigma a$，且 $\{m: x_m \notin \uparrow \{n, a\}\} \in I_0$ 成立，即 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{GI_0S} a$. 另一方面，如果 $x \in L$，则显然 $\{m: x_m \notin \uparrow n\} \notin I_0$，$\{m: x_m \notin \uparrow a\} \notin I_0$. 从而不存在定向集 $D \subseteq L$，使得 $D \to_\sigma x$，且对任意的 $d \in D$，$\{j \in J: x_j \ngeqslant d\} \in I_0$，即 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{IS} a$ 不成立.

命题 12　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，$x \in X$，$G \in P^w(X)$. 如果任意网 $(x_j)_{j\in J}$ 和 J 的非平凡理想 I，$(x_j)_{j\in J} \to_{IGS} y$ 蕴含 $\{j \in J: x_j \notin \uparrow G\} \in I$，则 $G \ll x$.

证明：设定向集 $D \subseteq X$，$D \to_\tau x$，令 $(x_d)_{d\in D}$ 满足 $x_d = d$，则 $(x_d)_{d\in D} \to_{I_0S} x$，即 $(x_d)_{d\in D} \to_{GI_0S} x$. 故 $\{j \in J: x_j \notin \uparrow G\} \in I_0$. 因为 I_0 是非平凡理想，故 $\{j \in J: x_j \notin \uparrow G\} \neq D$. 因此存在 $x_{d_0} = d_0$，使得 $d_0 \in \uparrow G$，即 $G \ll x$.

命题 13　设 (X,τ) 是局部强紧空间，$G \in P^w(X)$，$(x_j)_{j\in J}$ 是一个网，I 是 J 的非平凡理想，$x \in L$. 如果对任意 $G \ll x$ 蕴含 $\{j \in J: x_j \notin \uparrow G\} \in I$，则 $(x_j)_{j\in J} \to_{GIS} x$.

证明：设 $G \in P^w(X)$，$(x_j)_{j\in J} \subseteq L$ 是一个网，I 是 J 的非平凡理想，$x \in L$ 且对任意 $G \ll x$ 有 $\{j \in J: x_j \notin \uparrow G\} \in I$. 由于局部强紧空间都是拟连续空间，因此 $\mathrm{fin}(x) = \{F \in P^w(X): F \ll x\}$ 是定向集族，且 $\mathrm{fin}(x) \to_\tau x$. 由假设知对任意 $F \in \mathrm{fin}(x)$，$\{j \in J: x_j \notin \uparrow F\} \in I$，则 $(x_j)_{j\in J} \to_{GIS} x$.

设 I 是 J 的非平凡理想，令 $\tau_{IGS} = \{U \subseteq X: (x_j)_{j\in J} \to_{IGS} x,\ x \in U \Rightarrow \{j: x_j \notin U\} \in I\}$.

命题 14　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，则 τ_{IGS} 是 X 上的一个拓扑，称为理想广义 S 极限拓扑. 并且 $(x_j)_{j\in J} \to_{IGS} x$ 蕴含 $(x_j)_{j\in J} \to_I x$.

证明过程与命题 7 类似，故略.

命题 15　设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，则理想广义 S 极限拓扑与定向拓扑相同，即 $\tau_{IGS} = d(X)$.

证明：由命题 11 知，$\tau_{IGS}\subseteq\tau_{IS}=d(X)$. 设 $U\in d(X)$，$(x_j)_{j\in J}\rightarrow_{IGS}x\in U$，则存在定向集族 $D(F)\subseteq P^w(X)$，使得 $D(F)\rightarrow_\tau x$，且对任意 $F\in D(F)$，$\{j\in J: x_j\notin\uparrow F\}\in I$. 因为 $D(F)\rightarrow_\tau x\in U$ 且 $U\in d(X)$，故存在 $F\in D(F)$，使得 $\uparrow F\subseteq U$. 又因为 $\{j\in J: x_j\notin U\}\subseteq\{j\in J: x_j\notin\uparrow F\}\in I$，即 $\{j\in J: x_j\notin U\}\in I$，故 $U\in\tau_{IS}$.

上述命题表明虽然理想 S 极限和理想广义 S 极限不一样，但它们生成的拓扑是一致的.

推论 4 设 (X,τ) 是定向空间，则原拓扑、定向拓扑、理想 S 极限拓扑、理想广义 S 极限拓扑相同.

推论 5 设 (X,τ) 是局部强紧空间，则 $\{\Uparrow F: F\in P^w(X)\}$ 是 τ_{IGS} 的基.

命题 16 设 (X,τ) 是定向空间，则下列结论等价：

1) (X,τ) 是局部强紧空间；

2) $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_{IGS}x$ 等价 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_I x$ 关于定向拓扑成立.

证明：令 (X,τ) 是局部强紧空间，$(x_j)_{j\in J}\rightarrow_{IGS}x$，$x\in U\in d(X)$. 因为 $\tau_{IGS}=d(X)$，故 $U\in\tau_{IGS}$，从而 $\{j\in J: x_j\notin U\}\in I$，$(x_j)_{j\in J}\rightarrow_I x$，即 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_I x$ 关于定向拓扑成立. 设 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_I x$ 关于定向拓扑成立，则 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_I x$ 关于 τ_{IGS} 成立. 因为 (X,τ) 是局部强紧空间，故 $\mathrm{fin}(x)$ 是定向集族且 $\mathrm{fin}(x)\rightarrow_\tau x$. 对任意的 $F\in\mathrm{fin}(x)$，有 $x\in\Uparrow F\in\tau_{IGS}$，因为 $(x_j)_{j\in J}$ 关于拓扑 τ_{IGS} 是理想收敛的且 $\Uparrow a\in d(X)$，故 $\{j\in J: x_j\notin\Uparrow F\}\in I$，从而 $\{j\in J: x_j\notin\uparrow F\}\subseteq\{j\in J: x_j\notin\Uparrow F\}\in I$，进而有 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_{IGS}x$.

设 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_{IGS}x$ 等价 $(x_j)_{j\in J}\rightarrow_I x$ 关于定向拓扑成立. 对任意 $x\in X$，令

$$N(x)=\{U\in d(X): x\in U\},\ M(x)=\{(U,y): U\in N(x),\ y\in U\},$$

定义如下预序：$(U_1,y_1)\geqslant(U_2,y_2)\Leftrightarrow U_1\subseteq U_2$，显然 $M(x)$ 是定向集. 设 $(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}=y$，则 $(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}$ 作为网在定向拓扑中收敛到 x，即 $(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)\rightarrow_{I_0}}x$. 从而 $(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)\rightarrow_{I_0GS}}x$，则存在定向集族 $D(F)\subseteq P^w(X)$，使得 $D(F)\rightarrow_\tau x$，且对任意的 $F\in D(F)$，$\{(U,y)\in M(x): x_{(U,y)}\notin\uparrow F\}\in I_0$. 由于 I_0 是 J 的非平凡理想，故存在 $(U_d,y_d)\in M(x)$，使得 $x_{(U_d,y_d)}\in\uparrow F$，从而当 $x_{(U,y)}\geqslant x_{(U_d,y_d)}$ 时，$x_{(U,y)}\in\uparrow F$，即 $(x_{(U,y)})_{(U,y)\in M(x)}$ 终在 $\uparrow F$ 中. 任取 $w\in U_d$，则 $(U_d,w)\geqslant(U_d,y_d)$. 因此 $w=x_{(U_d,w)}\geqslant x_{(U_d,y_d)}\geqslant y_d$，由 $y_d\in\uparrow F$ 知对任意的 $F\in D(F)$，存在 x 的开邻域 U_d 满足 $U_d\subseteq\uparrow F$.

对任意 $d\in D$，定向集 $D'\subseteq X$，$D'\rightarrow_\tau x$，因为 $x\in U_d\in d(X)$，故存在 $d'\in D'\cap U_d\subseteq\uparrow F$，即 $d'\in\uparrow F$，从而 $F\ll x$，则 $D(F)\subseteq\mathrm{fin}(x)$ 并且 $D(F)\rightarrow_\tau x$. 因为 (X,τ) 是定向空间，故由命题 3 知 (X,τ) 是局部强紧空间.

推论 6 设 (X,τ) 是局部强紧空间，则理想广义 S 收敛关于拓扑 τ 是拓扑的。

综上所述，本文在拓扑空间中引入了理想 S 极限和理想广义 S 极限的概念，并给出了两种收敛结构为拓扑收敛的条件，所得结果有助于序结构理论和拓扑学的进一步研究. 拓扑空间的理想 S 收敛是偏序集中 S 收敛的推广，从而在拓扑空间中研究偏序结构. 在拓扑空间可否研究类似于偏序集的内射壳、不动点、格序半群等[18-20]，是需进一步研究的内容.

参 考 文 献

[1] JIA X D, JUNG A, KOU H, et al. All Cartesian Closed Categories of Quasicontinuous Domains Consist of Domains [J]. Theoretical Computer Science, 2015, 594: 143-150.

[2] HECKMANN R. Characterising FS Domains by Means of Power Domains [J]. Theoretical Computer Science, 2001, 264(2): 195-203.

[3] MAO X X, XU L S. Characterizations of Supercontinuous Posets via Scott S-Sets and the S-Essential Topology [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2019, 345: 169-183.

[4] MAO X X, XU L S. Meet Continuity Properties of Posets [J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(42): 4234-4240.

[5] WANG W, ZHAO B. Characterization of Residuated Lattices via Multipliers [J]. Acta Mathematica Scientia, 2022, 42B(5): 1902-1920.

[6] 苏子祺, 赵彬. m-半格中的滤子及其相关拓扑性质 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(3): 568-576.

(SU Z Q, ZHAO B. Filter in m-Semilattices and Their Related Topological Properties [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(3): 568-576.)

[7] 武全，赵彬. 模糊 S-偏序集的内射壳 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2017，55(2)：216-224.（WU Q, ZHAO B. Injective Hulls of Fuzzy S-Posets [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2017, 55(2): 216-224.）

[8] 王武. 连续空间的伴随式刻画 [J]. 数学的实践与认识，2020，50(19)：276-280.（WANG W. Adjoint Characterization of Continuous Spaces [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(19): 276-280.）

[9] LUO S Z, XU X Q. On SI_2-Continuous Spaces [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2019, 345: 125-141.

[10] 王武，张舜，谭彬. 偏序集上的 MS-收敛 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2023，60(1)：011001-1-011001-5.（WANG W, ZHANG S, TAN B. MS-Convergence on Posets [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2023, 60(1): 011001-1-011001-5.）

[11] 王武，张国丽，王颖. 定向空间的 way below 基 [J]. 系统科学与数学，2022，42(4)：1060-1066.（WANG W, ZHAN G L, WANG Y. The Way Below Bases of Directed Spaces [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2022, 42(4): 1060-1066.）

[12] 俞月，寇辉. 由 T_0 空间的特殊化序定义的定向空间 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2015，52(2)：217-222.（YU Y, KOU H. Directed Spaces Defined through T_0 Spaces with Specialization Order [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2015, 52(2): 217-222.）

[13] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. Continuous Lattices and Domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 1-591.

[14] KEIMEL K. Topological Cone: Functional Analysis in T_0-Setting [J]. Semigroup Forum, 2008, 77: 109-142.

[15] 车铭静，寇辉. c-空间范畴的一个 Cartesian 闭满子范畴 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2020，43(6)：756-762.（CHE M J, KOU H. A Cartesian Closed Full Subcategory of the Category c-Spaces [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2020, 43(6): 756-762.）

[16] 冯华容，寇辉. T_0 拓扑空间的拟连续性与交连续性 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2017，54(5)：905-910.（FENG H R, KOU H. Quasicontinuity and Meet-Continuity of T_0 Space [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2017, 54(5): 905-910.）

[17] GEORGIOU D N, MEGARITIS A C, NAIDOO I, et al. A Study of Convergences in Partially Ordered Sets [J]. Topology and Its Applications, 2019, 275: 106994-1-106994-14.

[18] 朴勇杰. 乘积度量空间上满足 $\sigma(\gamma)$-压缩条件映射的唯一不动点 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2021，59(3)：469-474.（PIAO Y J. Unique Fixed Points for Mappings with $\sigma(\gamma)$-Contractive Condition on Multiplicative Spaces [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(3): 469-474.）

[19] 潘伟，徐振国. 理想和滤子的 S-收敛 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2018，50(1)：43-46.（PAN W, XU Z G. S-Convergence of Ideals and Filters [J]. Journal of Northeast University (Natural Science Edition), 2018, 50(1): 43-46.）

[20] 宋元凤，李武明，杨柳. 一类 Minkowski 空间里的格序半群 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2022，54(3)：1-4.（SONG Y F, LI W M, YANG L. Lattice Ordered Semigroups in a Class of Minkowski Spaces [J]. Journal of Northeast University (Natural Science Edition), 2022, 54(3): 1-4.）

（责任编辑：赵立芹）