

宽带噪声激励下分数阶黏弹性碰撞系统的稳定性分析和随机分岔

盛正大, 张建刚, 王媛

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 研究基于分数阶黏弹性材料构造的 Van der pol 减振系统在外部宽带噪声激励下的随机稳定性和随机分岔行为. 考虑约束条件的影响, 引入非平滑 Zhuravlev 变换, 将碰撞系统转化为无碰撞的动力学系统. 利用一组拟周期函数近似替换分数阶微分, 通过随机平均法得到系统的 Itô 随机微分方程, 根据最大 Lyapunov 指数法和奇异边界理论分类讨论系统的随机稳定性, 利用拟 Hamilton 系统随机平均法分析系统在线性 Itô 方程下的随机分岔行为, 得到 D-分岔的临界条件, 进一步求出与系统幅值相关的稳态概率密度函数. 使用 MATLAB 绘制稳态概率密度曲线, 直观展现系统发生的稳态变化. 结果表明, 当分数阶阶次和噪声强度在一定阈值内变化时, 可诱导系统产生 P-分岔行为.

关键词: 随机 P-分岔; 随机平均法; 碰撞系统; 非平滑 Zhuravlev 变换; 宽带噪声

中图分类号: O59 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)01-0132-09

Stability Analysis and Stochastic Bifurcation of Fractional-Order Viscoelastic Collision System under Broadband Noise Excitation

SHENG Zhengda, ZHANG Jiangang, WANG Yuan

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The stochastic stability and stochastic bifurcation behavior of Van der pol vibration damping system constructed based on fractional-order viscoelastic material was studied under external broadband noise excitation. Considering the influence of constraints condition, a non-smooth Zhuravlev transformation was introduced to transform the collision system into a collision-free dynamic system. A set of quasi-periodic functions was used to replace the fractional-order differential element approximately, the stochastic average method was used to obtain the Itô stochastic differential equation of the system. The stochastic stability of the system was classified and discussed based on the maximum Lyapunov exponent method and singular boundary theory. The stochastic bifurcation behavior of the system under the linear Itô equation was analyzed by using the pseudo Halmiton system stochastic average method, and the critical condition for D-bifurcation was obtained. Furthermore, the stationary probability density function related to the amplitude of the system was obtained. Using the steady-state probability density curves drawn by MATLAB to visually display the changes of steady state that occurred in the system. The results show that the system can generate P-bifurcation behavior when the fractional-order and noise intensity change within a certain threshold.

收稿日期: 2023-05-09.

第一作者简介: 盛正大(1998—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事非线性动力学的研究, E-mail: 1484670239@qq.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 61863022)和甘肃省自然科学基金重点项目(批准号: 23JRRA882).

Keywords: stochastic P-bifurcation; stochastic average method; collision system; non-smooth Zhuravlev transformation; broadband noise

在实际工程应用中, 由于存在摩擦、形变和材料间隙等不同干扰因素, 使工程中的应用材料经常发生碰撞, 这些不可避免的碰撞导致工程系统不稳定. 因此研究实际工程中存在的非线性碰撞动力学问题, 深入了解工程系统动态特性具有重要意义: 首先可避免碰撞现象导致的损失; 其次可提高工程系统的工作效率并延长其使用寿命等. 由材料间隙、冲击、干摩擦和不可微刚度等非光滑因素导致的碰撞动力学问题具有强非线性^[1-2]; 文献[3-4]根据动力系统理论研究了碰撞振动系统的动力学行为; Nordmark^[5-6]利用局部映射方法研究了碰撞系统特有的擦边分岔现象; Luo 等^[7-8]采用数值模拟发现碰撞系统存在 Torus 分岔和 Hopf 分岔的动力学现象; 李群宏等^[9-10]分析了碰撞系统的稳定性条件和判据, 并得到有关单碰周期 n 次谐运动的存在性判据依据和稳定性条件. 对于随机激励下的碰撞系统, Dimentberg 等^[11-13]将碰撞系统转化为无碰撞的非光滑系统, 分析了随机碰撞系统的响应问题; Jing 等^[14-15]研究了高斯白噪声作用下的单自由度碰撞系统, 并获得了概率密度的解析解.

近年来, 黏弹性材料在汽车和航天等工程领域应用广泛, 根据其黏性和弹性两种机理制成的阻尼器在减振储能等方面具有优良表现. 因此研究基于黏弹性材料构建的碰撞模型, 在减振和隔振等工程领域具有重大意义. 徐伟等^[16]研究了黏弹性对系统的两种效应: 经典阻尼效应和刚度效应; Xu 等^[17]从正弦输入为起点, 推演出黏弹性阻尼器关于能量耗散的算法; Zhu 等^[18]介绍了随机平均法与能量包络平均法在黏弹性动力系统中的应用.

实际工程应用中黏弹性材料可将结构间的振动转化为热能, 从而抑制结构振动. 分数阶导数具有描述各种过程记忆和遗传特性的优越性, 分数阶项可较好描述系统历史发展的依赖过程, 在描述复杂的物理问题时配合非线性模型, 表述更简洁且更贴近真实的物理本构关系^[19-21]. 目前对随机激励下基于分数阶黏弹性材料构造的约束碰撞系统的研究文献报道较少, 基于此, 本文基于 Kelvin-Voigt 材料的分数阶本构模型构造黏弹性 Van der pol 减振模型, 并分析在宽带噪声激励下系统的随机稳定性和随机分岔行为^[22-24].

1 构建模型

黏弹性材料 Kelvin-Voigt 的分数阶本构模型^[21]为

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} = E\varepsilon(t) + \eta {}_0 D^\alpha (\varepsilon(t)) = (E + \eta {}_0 D^\alpha) \varepsilon(t), \quad (1)$$

其中 $\sigma(t)$ 为应力, $\varepsilon(t)$ 为应变, E 为弹性模量, η 为黏弹性因子, ${}_0 D^\alpha$ 为 Caputo 分数阶微分算子:

$${}_0 D^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha} ds.$$

将宽带噪声激励下的具有黏弹性材料阻尼的单自由度非线性碰撞系统写为

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2sh(x, \dot{x})\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \frac{\eta}{E} {}_0 D^\alpha(x) - \omega_0^2 \varepsilon^{1/2} x \xi(t) = 0, & y > 0, \\ \dot{x}_+ = -r\dot{y}_-, & y = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $h(x, \dot{x})$ 表示 x 和 \dot{x} 的非线性函数, ε 为系统中的小参数, ω_0 为系统固有频率常数, ${}_0 D^\alpha(x)$ 为分数阶黏弹性效应, $0 < r \leq 1$ 表示黏弹性材料的恢复系数, 随机激励 $\xi(t)$ 表示宽带噪声. 宽带噪声的功率谱密度为

$$S(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega_1^2}.$$

令 $h(x, \dot{x}) = b + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 - \alpha_4 x^8$, 则系统(2)转换为宽带噪声的外激励下基于分数阶黏弹性材料构造的 Van der pol 减振系统为

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon(b + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 - \alpha_4 x^8)\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \eta {}_0 D^\alpha(x) - \omega_0^2 \varepsilon^{1/2} x \xi(t) = 0, & y > 0, \\ \dot{x}_+ = -r\dot{y}_-, & y = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\tau = \eta/E$ 表示黏弹性参数. 通过非平滑 Zhuravlev 变换, 将系统(3)转化为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\varepsilon(b + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 - \alpha_4 x^8)\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon\tau_0 D^\alpha(x) - \\ (1-r)\dot{x}|\dot{x}|\delta(x) - \omega_0^2 \varepsilon^{1/2} x \xi(t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

系统(3)转化为无碰撞的非线性动力系统, 式(4)中的 $(1-r)\dot{x}|\dot{x}|\delta(x)$ 表示约束条件下系统碰撞的能量消耗, 在计算过程中可视为附加的阻尼项.

2 随机平均法

设 $\varphi(t) = \omega_0 t + \theta$, 令式(4)的解为

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\varphi(t)), \\ \dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\varphi(t)), \end{cases} \quad (5)$$

可得

$$\dot{x}(t) = \dot{a} \cos \varphi - a(\omega_0 + \dot{\theta}) \sin \varphi. \quad (6)$$

将式(6)和式(5)联立, 可得

$$\dot{a} \cos \varphi - a\dot{\theta} \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{x}(t) = -\dot{a}\omega_0 \sin \varphi - a\omega_0(\omega_0 + \dot{\theta}) \cos \varphi. \quad (8)$$

将式(5)和式(8)代入系统(4)中, 可得

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_0}{\sin \varphi} \dot{a} = -2\varepsilon(-b - \alpha_1 a^2 \cos^2 \varphi + \alpha_2 a^4 \cos^4 \varphi - \alpha_3 a^6 \cos^6 \varphi + \alpha_4 a^8 \cos^8 \varphi)(-\omega_0 a \sin \varphi) + \\ \varepsilon\omega_0^2 D^\alpha(a \cos \varphi) - (1-r)(-\omega_0 a \sin \varphi) |-\omega_0 a \sin \varphi| \delta(a \cos \varphi) + \omega_0^2 \varepsilon^{1/2} a \cos \varphi \xi(t), \end{aligned} \quad (9)$$

由式(7)得 \dot{a} 和 $\dot{\theta}$ 的变换关系, 因此系统(4)可表述为

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = F_1(a, \theta) + G_1(a, \theta) \xi(t), \\ \frac{d\theta}{dt} = F_2(a, \theta) + G_2(a, \theta) \xi(t), \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} F_1(a, \theta) = -2\varepsilon(-ab \sin^2 \varphi - \alpha_1 a^3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \alpha_2 a^5 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - \alpha_3 a^7 \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + \\ \alpha_4 a^9 \sin^2 \varphi \cos^8 \varphi) + \varepsilon\omega_0 \tau \sin \varphi D^\alpha(a \cos \varphi) - (1-r)(-a \sin^2 \varphi) |-\omega_0 a \sin \varphi| \delta(a \cos \varphi), \\ F_2(a, \theta) = -2\varepsilon(-ab \sin \varphi \cos \varphi - \alpha_1 a^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \alpha_2 a^4 \sin \varphi \cos^4 \varphi - \alpha_3 a^6 \sin \varphi \cos^6 \varphi + \\ \alpha_4 a^8 \sin \varphi \cos^8 \varphi) + \frac{\varepsilon\omega_0 \tau}{a} \cos \varphi D^\alpha(a \cos \varphi) - (1-r)(-\sin \varphi \cos \varphi) |-\omega_0 a \sin \varphi| \delta(a \cos \varphi), \\ G_1(a, \theta) = \omega_0 a \sin \varphi \cos \varphi \varepsilon^{1/2}, \\ G_2(a, \theta) = \omega_0 \cos^2 \varphi \varepsilon^{1/2}. \end{cases} \quad (11)$$

考虑系统(4)中 Caputo 形式的分数阶微分 ${}_0 D^\alpha[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-u)^\alpha} ds$, $\Gamma(y)$ 为 Gamma

函数, 满足 $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$, 且存在定义和性质 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin \pi}$. 则分数阶微分可写作

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(\alpha) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha} ds,$$

因此将 Caputo 形式的分数阶微分 $D^\alpha x(t)$ 写成双积分形式

$$D^\alpha x(t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^\alpha} ds du. \quad (12)$$

引入变换 $u = (t-s)y^{1/\alpha}$, 定义 $\psi(y, t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_0^t e^{-(t-s)y^{1/\alpha}} \dot{x}(s) ds$, 根据上述变换可得到一个与分数阶导数等效的微分方程

$$D^\alpha x(t) = \int_0^\infty \int_0^t \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} e^{-(t-s)y^{1/\alpha}} \dot{x}(s) ds dy = \int_0^\infty \psi(y, t) dy, \quad (13)$$

则式(13)满足

$$\frac{\partial \psi(y, t)}{\partial t} = -y^{1/\alpha} \psi(y, t) + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} x(t), \tag{14}$$

将式(5)代入式(14)可得

$$\frac{\partial \psi(y, t)}{\partial t} = -y^{1/\alpha} \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_0^t e^{-(t-s)y^{1/\alpha}} [-a(s)\omega_0 \sin \varphi(s)] ds + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} [-a(t)\omega_0 \sin(\varphi(t))], \tag{15}$$

解得

$$\psi(y, t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} a(t) \frac{\omega_0^2 \cos(\varphi(t))}{\omega_0^2 + y^{2/\alpha}} - \frac{\sin \pi \alpha}{2} a(t) \frac{\omega_0 \sin^2(\varphi(t)) y^{1/\alpha}}{\omega_0^2 + y^{2/\alpha}} + c e^{t y^{-1/\alpha}}, \tag{16}$$

其中 c 根据初始条件 $\psi(y, 0) = 0$ 决定. 将式(16)代入式(13)可得

$$D^\alpha x(t) \approx a \omega_0^a \left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi \alpha}{2}\right) \right]. \tag{17}$$

对 $F_1(a, \theta)$ 和 $F_2(a, \theta)$ 进行随机平均, 由于 \dot{a} 和 $\dot{\theta}$ 为周期函数, 因此可取 $T = 2\pi$:

$$\begin{cases} \bar{F}_1(a, \theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(a, \theta) dt = \varepsilon a b + \frac{\varepsilon \alpha_1 a^3}{4} - \frac{\varepsilon \alpha_2 a^5}{8} + \\ \quad \frac{5 \varepsilon \alpha_3 a^7}{64} - \frac{7 \varepsilon \alpha_4 a^9}{128} - \frac{a \varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau}{2} \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{a(1-r)}{\pi}, \\ \bar{F}_2(a, \theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_2(a, \theta) dt = -\frac{\varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau}{2} \cos \frac{\alpha \pi}{2}. \end{cases} \tag{18}$$

由于 $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 为时间慢变量, $\varphi(t)$ 为快变量, 因此经随机平均和确定性平均后, 所得漂移系数和扩散系数为

$$\begin{cases} \bar{m}_{11} = \bar{F}_1(a, \theta) + \left\langle \frac{\partial G_1(a, \theta)}{\partial a} \Big|_t G_1(a, \theta) \Big|_{t+\tau} + \frac{\partial G_1(a, \theta)}{\partial \theta} \Big|_t G_2(a, \theta) \Big|_{t+\tau} \right\rangle_\theta = \\ \quad \varepsilon a b + \frac{\varepsilon \alpha_1 a^3}{4} - \frac{\varepsilon \alpha_2 a^5}{8} + \frac{5 \varepsilon \alpha_3 a^7}{64} - \frac{7 \varepsilon \alpha_4 a^9}{128} - \frac{a \varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau}{2} \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \\ \quad \frac{a(1-r)}{\pi} + \frac{3 \varepsilon \omega_0^2 a}{16} \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}, \\ \bar{m}_{22} = \bar{F}_2(a, \theta) + \left\langle \frac{\partial G_2(a, \theta)}{\partial a} \Big|_t G_1(a, \theta) \Big|_{t+\tau} + \frac{\partial G_2(a, \theta)}{\partial \theta} \Big|_t G_2(a, \theta) \Big|_{t+\tau} \right\rangle_\theta = 0, \\ \bar{B}_{11} = \langle G_1(a, \theta) |, G_1(a, \theta) |_{t+\tau} \rangle_\theta = \frac{1}{8} \varepsilon \omega_0^2 a^2 \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}, \\ \bar{B}_{22} = \langle G_2(a, \theta) |, G_2(a, \theta) |_{t+\tau} \rangle_\theta = \frac{3 \varepsilon \omega_0^2}{8} \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}, \end{cases}$$

Itô 平均微分方程为

$$\begin{cases} da = \varepsilon a b + \frac{\varepsilon \alpha_1 a^3}{4} - \frac{\varepsilon \alpha_2 a^5}{8} + \frac{5 \varepsilon \alpha_3 a^7}{64} - \frac{7 \varepsilon \alpha_4 a^9}{128} - \frac{a \varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau}{2} \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \\ \quad \frac{a(1-r)}{\pi} + \frac{3 \varepsilon \omega_0^2 a}{16} \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi} dt + \\ \quad \sqrt{\frac{1}{8} \varepsilon \omega_0^2 a^2 \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}} dW(t), \\ d\theta = -\frac{\varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau}{2} \cos \frac{\alpha \pi}{2} dt + \sqrt{\frac{3 \varepsilon \omega_0^2}{8} \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}} dW(t), \end{cases} \tag{19}$$

其平均振幅

$$da = (U_1 a + U_2 a^3 + U_3 a^5 + U_4 a^7 + U_5 a^9) dt + \sqrt{\frac{1}{8} U_6 a} dW(t) \tag{20}$$

是一维 Markov 过程, 其中

$$\begin{cases} U_1 = \epsilon b - \frac{\epsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau}{2} \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{1-r}{\pi} + \frac{3}{16} \omega_0^2 \epsilon \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}, \\ U_2 = \frac{3}{4} \epsilon \alpha_1, \\ U_3 = -\frac{1}{8} \epsilon \alpha_2, \\ U_4 = \frac{5}{64} \epsilon \alpha_3, \\ U_5 = -\frac{7}{128} \epsilon \alpha_4, \\ U_6 = \omega_0^2 \epsilon \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}. \end{cases}$$

3 随机稳定性

3.1 局部稳定性

讨论 $U_2=U_3=U_4=U_5=0$, 将式(20)变换为

$$da = U_1 a dt + \sqrt{\frac{1}{8} U_6} a dW(t), \tag{21}$$

根据线性 Itô 随机微分方程解得

$$r(t) = r(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[m(0) - \frac{\sigma^2(0)}{2} \right] ds + \int_0^t \sigma(0) dW(s) \right\},$$

其中 $m(0)=U_1$, $\sigma(0)=(U_3/8)^{1/2}$. 可得线性 Itô 随机微分方程 Lyapunov 指数近似解为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|a(t, a_0)\|) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(a(t))^{1/2} = \frac{m(0) - \sigma^2(0)/2}{2} = \frac{1}{2} \left(U_1 - \frac{U_6}{16} \right).$$

系统的局部稳定性分析列于表 1.

表 1 系统的局部稳定性分析

Table 1 Local stability analysis of system

条件	稳定性分析
$U_1 - U_6/16 < 0$	线性 Itô 随机微分方程(20)的平凡解在概率意义上是稳定的, 系统(4)在平衡点是稳定的
$U_1 - U_6/16 > 0$	线性 Itô 随机微分方程(20)的平凡解在概率意义上是不稳定的, 系统(4)在平衡点是不稳定的

3.2 全局随机稳定性

讨论当 $U_2=U_3=U_4=U_5=0$ 时的线性 Itô 随机微分方程, 将式(20)变为式(21), $a=0$ 时是系统的第一类奇异边界, 扩散指数 $\alpha_r=2$, 漂移指数 $\beta_r=1$, 可得特征标值

$$c_r = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2m_a(a-0)^{(\alpha_r-\beta_r)}}{\sigma^2(a)} = \frac{16U_1}{U_6}; \tag{22}$$

$a=+\infty$ 时是系统的第二类奇异边界, 扩散指数 $\alpha_l=2$, 漂移指数 $\beta_l=1$, 可得特征标值

$$c_r = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2m_a(a)^{(\alpha_r-\beta_r)}}{\sigma^2(a)} = -\frac{16U_1}{U_6}.$$

在线性 Itô 随机微分方程条件下系统的全局随机稳定性列于表 2.

表 2 在线性 Itô 随机微分方程条件下系统的全局随机稳定性

Table 2 Global stochastic stability of system under condition of linear Itô stochastic differential equation

状态	条件	类别	状态	条件	类别
$r=0$	$c_l > 1, U_1/U_6 > 1/16$	排斥自然边界	$r=+\infty$	$c_l > -1, U_1/U_6 < 1/16$	排斥自然边界
	$c_r = 1, U_1/U_6 = 0$	严格自然边界		$c_l = 1, U_1/U_6 = 0$	严格自然边界
	$c_r < 1, U_1/U_6 < 1/16$	吸引自然边界		$c_l < -1, U_1/U_6 > 1/16$	吸引自然边界

讨论 U_m 不全为 0 的情况, 其中 $m=2,3,4,5$. $a=0$ 时是系统的第一类奇异边界, 扩散指数 $\alpha_r=2$, 漂移指数 $\beta_r=1$, 可得特征标值为式(22). $a=+\infty$ 时是系统的第二类奇异边界, 扩散指数 $\alpha_l=2$, 漂移

指数 β_i 为式(20)中所有 $U_m \neq 0$ 项幅值 a 的最高次数, 可得特征标值为

$$c_r = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2m_a(a)^{(a_r - \beta_r)}}{\sigma^2(a)} = -\frac{16U_n}{U_6},$$

U_n 为式(20)中系数不为 0 且有关幅值 a 最高次数项的系数, 根据奇异边界理论可得在非线性 Itô 随机微分方程条件下系统的全局随机稳定性, 结果列于表 3.

表 3 在非线性 Itô 随机微分方程条件下系统的全局随机稳定性

Table 3 Global stochastic stability of system under condition of nonlinear Itô stochastic differential equation

状态	条件	类别	状态	条件	类别
$r=0$	$c_l < 1, U_1/U_6 < 1/16$	吸引自然边界	$r=+\infty$	$c_l < -1, U_n/U_6 > 1/16$	吸引自然边界
	$c_r = 1, U_1/U_6 = 1/16$	严格自然边界		$c_l = -1, U_n/U_6 = 1/16$	严格自然边界
	$c_r > 1, U_1/U_6 > 1/16$	排斥自然边界		$c_l > -1, U_n/U_6 < 1/16$	排斥自然边界

由表 3 可见, 当 $r=0$ 为吸引自然边界, $r=+\infty$ 为进入边界, 可理解为左边界为吸引自然边界, 而在右边界未进入时, 平衡点处于全局稳定. 根据局部稳定性条件可得, 在满足 $U_1/U_6 < 1/16$, $U_n/U_6 < 1/16$ 的条件下, 系统在平衡点处保持稳定状态.

4 随机分岔分析

4.1 D-分岔

下面讨论线性 Itô 机微分方程的情况, 当 $U_2=U_3=U_4=U_5=0$ 时, 式(20)变换为线性形式(21), $U_6=0$ 时式(21)为确定性系统, 无分岔行为. 考虑 $U_6 \neq 0$ 的情况, 若 $m(0) = (U_1 - U_6/16)a$, $\sigma(0) = (U_6/8)^{1/2}a$, 则系统(21)可生成连续动态系统

$$\varphi(t)x = x + \int_0^t m(\varphi(s)x) ds + \int_0^t \sigma(\varphi(s)x) \circ dW, \tag{23}$$

当 $m(0)=0, \sigma(0)=0$ 时, 0 为 φ 的一个固定点, $\circ dW$ 为 Stratonovich 随机过程的参激. 设 $m(r)$ 有界, $a \neq 0$ 系统有且只有一个稳态概率密度, 幅值 $a(t)$ 对应的 FPK(Fokker Planck Kolmogorov)方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} [(U_1 a) p] - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\left(\frac{U_6}{8} a^2 \right) p \right], \tag{24}$$

当 $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ 时, 可得式(24)的稳态概率密度

$$p(a) = c |\sigma^{-1}(a)| \exp \left\{ \int_0^a \frac{2m(u)}{\sigma^2(u)} du \right\}, \tag{25}$$

得到式(23)存在不动点和非平凡平稳运动两种平稳状态. δ_x 为不动点的不变测度 δ_0 , 式(25)为非平凡平稳运动状态的不变测度的密度.

考虑线性 Itô 微分方程, 由式(21)可得

$$a(t) = a(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[\dot{m}(a) + \frac{\sigma(a)\ddot{\sigma}(a)}{2} \right] ds + \int_0^t \dot{\sigma}(a) dW \right\}, \tag{26}$$

φ 关于测度 μ 的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_\varphi(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \| a(t) \|, \tag{27}$$

将式(26)代入式(27)中, 令 $\sigma(0)=0, \dot{\sigma}(0)=0$ 可得不动点的 Lyapunov 指数

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(\delta_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\ln \| a(0) \| + \dot{m}(0) \int_0^t ds + \dot{\sigma}(0) \int_0^t dW(s) \right] = \\ &= \dot{m}(0) + \dot{\sigma}(0) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_r(t)}{t} = \dot{m}(0) = U_1 - \frac{U_6}{16}. \end{aligned}$$

假设 $\dot{\sigma}$ 有界, $\dot{m} + \ddot{\sigma}$ 可积, 可得非平凡平稳运动状态的 Lyapunov 指数

$$\lambda_\varphi(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\dot{m}(a) + \sigma(a)\ddot{\sigma}(a) \right] ds = \int_{\mathbb{R}} \left[\dot{m}(a) + \frac{\sigma(a)\ddot{\sigma}(a)}{2} \right] p(a) da =$$

$$-2 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{m(a)}{\sigma(a)} \right]^2 p(a) da \dot{m}(0) = -2U_6^{3/2} \left(U_1 - \frac{U_6}{16} \right) \exp \left\{ \frac{16}{U_6} \left(U_1 - \frac{U_6}{16} \right) \right\},$$

使 $\alpha=U_1-U_6/16$, 可得不动点不变测度 δ_0 在 $\alpha \leq 0$ 处是稳定的, 非平凡状态不变测度在 $\alpha > 0$ 处是稳定的, 则 $\alpha=0$ 是一个 D-分岔点.

将式(24)化简为

$$p_s(a) = ca^{2(8U_1-U_6)/U_6} = o(a^v)a \rightarrow 0,$$

其中 c 为归一化常数. 设 $v=2(8U_1-U_6)/U_6$, 当 $v < -1$ 时, 即 $16U_1/U_6 < 1$, $p_s(a)$ 为 δ 函数; 当 $-1 < v < 0$ 时, 即 $16U_1/U_6 > 1$, $a=0$ 是 $p_s(a)$ 的最大值点; 当 $v = -1$ 时, 即 $16U_1/U_6 = 1$, $a=0$ 是系统发生 D-分岔的临界点.

4.2 P-分岔

$W(t)$ 是标准的 Wiener 过程, 且 da 不依赖于 θ , 因此可得系统幅值的 FPK 方程为

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} [-m(a)p(a,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [\sigma^2(a)p(a,t)],$$

其中

$$\begin{cases} m(a) = \varepsilon ab + \frac{\varepsilon \alpha_1 a^3}{4} - \frac{\varepsilon \alpha_2 a^5}{8} + \frac{5\varepsilon \alpha_3 a^7}{64} - \frac{7\varepsilon \alpha_4 a^9}{128} - \frac{\varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau \sin \frac{\alpha \pi}{2}}{2} - \frac{a(1-r)}{\pi} + \\ \frac{\varepsilon \omega_0^2}{4a} \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}, \\ \sigma^2(a) = \varepsilon \omega_0^2 \sin^2 \varphi \frac{D}{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}. \end{cases}$$

若 $\frac{\partial p(a,t)}{\partial t} = 0$, 可得关于幅值 a 的稳态概率密度函数为

$$p(a) = \frac{C}{\sigma^2(a)} \exp \left\{ \int \frac{2m(a)}{\sigma^2(a)} da \right\},$$

其中 C 为归一化常数.

稳态概率密度函数的精确表达式为

$$p(a) = \frac{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}{\varepsilon \omega_0^2 \sin^2 \varphi D} \exp \left\{ \left[\varepsilon a^2 b + \frac{\varepsilon \alpha_1 a^4}{8} - \frac{\varepsilon \alpha_2 a^6}{24} + \frac{5\varepsilon \alpha_3 a^8}{256} - \frac{7\varepsilon \alpha_4 a^{10}}{640} - \frac{a^2 \varepsilon \omega_0^{\alpha+1} \tau \sin \frac{\alpha \pi}{2}}{2} - \frac{(1-r)a^2}{\pi} + \frac{\varepsilon \omega_0^2 \eta \ln a}{2[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi} \right] \frac{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega_1^2] \pi}{\varepsilon \omega_0^2 \sin^2 \varphi D} \right\},$$

其中归一化常数满足条件 $C = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma^2(a)} \exp \left\{ \int \frac{2m(a)}{\sigma^2(a)} da \right\} \right) da \right\}^{-1}$.

4.2.1 分数阶次 α 对系统随机分岔的影响

设添加的外部噪声各系数值 $\zeta=1$, $\omega_0=0.9$, $\omega_1=0.1$ 和噪声强度 $D=7$, 固定系统的参数值 $\alpha_1=1.51$, $\alpha_2=2.85$, $\alpha_3=1.693$, $\alpha_4=0.312$, 选取系统黏弹性参数 $\tau=0.8$ 和黏弹性材料的恢复系数 $r=0.9$. 改变系统(4)分数阶次的数值, 绘制相应的稳态概率密度函数曲线.

固定噪声和系统的其他参数, 仅改变分数阶次, 乘性宽带噪声激励下不同分数阶次的稳态概率密度函数曲线如图 1 所示. 由图 1(A)可见, 在稳态概率密度函数曲线上距离原点较远处有一个明显峰值, 系统是单稳的, 仅存在大幅振动. 由图 1(B)可见, 当 $\alpha=0.5$ 时, 稳态概率密度峰值发生变化, 在稳态概率密度函数曲线上距离原点较远处有一个明显峰值, 但在原点附近为 Dirac 函数形式, 幅值的稳态响应为 0, 此时系统存在两种运动状态. 因此, 当分数阶次改变时, 稳态概率密度函数的定性也随之改变, 系统产生随机 P-分岔.

4.2.2 宽带噪声强度变化对随机分岔的影响

将分数阶次固定为 $\alpha=0.5$, 改变噪声强度 D 值, 其他参数与图 1 相同, 绘制相应的稳态概率密度函数曲线.

固定分数阶次和系统的其他参数, 仅改变外部宽带噪声的噪声强度, 乘性宽带噪声激励下不同噪

声强度的稳态概率密度函数曲线如图 2 所示. 由图 2(A)可见, 当 $D=3.1$ 时, 稳态概率密度曲线为 Dirac 形式, 系统幅值的稳态响应为 0, 类似一个稳定平衡点; 由图 2(B)可见, 当 $D=5.3$ 时, 在稳态概率密度函数曲线上距离原点较远处有一个明显峰值, 但在原点附近为 Dirac 形式, 此时系统存在两种运动状态; 由图 2(C)可见, 当 $D=9.8$ 时, 在稳态概率密度函数曲线上距离原点较远处有一个明显峰值, 系统存在大幅振动. 因此, 当改变外部噪声强度时, 稳态概率密度函数的定性也随之改变, 系统产生随机 P-分岔.

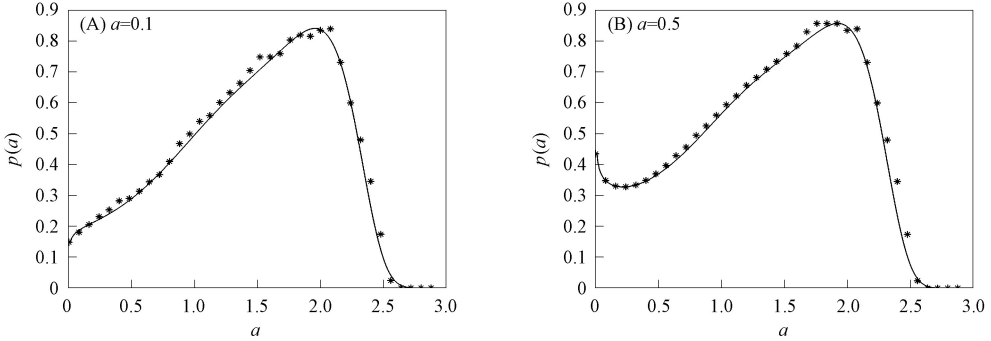


图 1 乘性宽带噪声激励下不同分数阶次的稳态概率密度函数曲线

Fig. 1 Steady state probability density function curves of different fractional orders under multiplicative broadband noise excitation

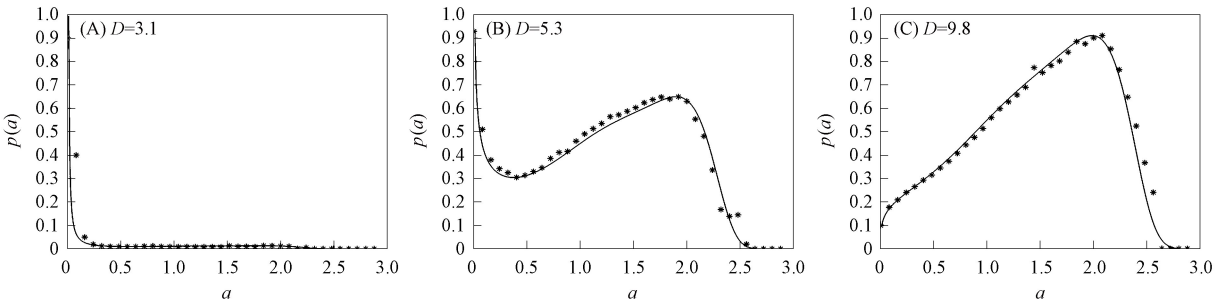


图 2 乘性宽带噪声激励下不同噪声强度的稳态概率密度函数曲线

Fig. 2 Steady state probability density function curves of different noise intensities under multiplicative broadband noise excitation

综上, 本文研究了对外部宽带噪声激励下的基于分数阶黏弹性材料的 Van der pol 减振系统, 通过随机平均法求出了系统的 Itô 微分方程. 利用最大 Lyapunov 指数法和奇异边界理论分类讨论了系统的局部随机稳定性和全局随机稳定性. 通过拟 Hamilton 系统随机平均法分析了系统在线性 Itô 微分方程情形下的 D-分岔行为, 得到了系统产生 D-分岔的临界条件, 并对分数阶阶次 α 和宽带噪声强度 D 分别改变的情况进行数值模拟. 结果表明: 在宽带噪声的激励下, 固定其他参数不变, 仅改变分数阶阶次 α 值, 稳态概率密度函数曲线出现定性变化, 系统产生了随机 P-分岔行为; 改变宽带的噪声强度 D , 稳态概率密度函数曲线也出现定性变化, 系统随强度值的变化产生 P-分岔行为.

参 考 文 献

[1] WANG L, HUANG M, XU W, et al. The Suppression of Random Parameter on the Boundary Crisis of the Smooth and Discontinuous Oscillator System [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 92(3): 1147-1156.

[2] KUMAR P, NARAYANAN S, GUPTA S. Bifurcation Analysis of a Stochastically Excited Vibro-Impact Duffing-Van der Pol Oscillator with Bilateral Rigid Barriers [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 127: 103-117.

[3] HOLMES P J. The Dynamics of Repeated Impacts with a Sinusoidally Vibrating Table [J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 84(2): 173-189.

[4] SHAW S W, HOLMES P J. A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator [J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 90(1): 129-155.

[5] NORDMARK A B. Non-periodic Motion Caused by Grazing Incidence in an Impact Oscillator [J]. Journal of

- Sound Vibration, 1991, 145(2): 279-297.
- [6] NORDMARK A B. Universal Limit Mapping in Grazing Bifurcations [J]. Physical Review E, 1997, 55(1): 266-270.
- [7] LUO G W. Period-Doubling Bifurcation and Routes to Chaos of the Vibratory Systems Contacting Stops [J]. Physics Letters A, 2004, 323(3/4): 210-217.
- [8] LUO G W, CHU Y D, ZHANG Y L, et al. Double Neimark-Sacker Bifurcation and Torus Bifurcation of a Class of Vibratory Systems with Symmetrical Rigid Stops [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298(1/2): 154-179.
- [9] 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰振系统运动分析 [J]. 力学学报, 2001, 33(6): 776-786. (LI Q H, LU Q S. Analysis to Motions of a Two-Degree-of-Freedom Vibro-Impact System [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2001, 33(6): 776-786.)
- [10] LI Q H, LU Q S. Coexisting Periodic Orbits in Vibro-Impacting Dynamical Systems [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(3): 261-273.
- [11] DIMENTBERG M F, MENYAILOV A I. Response of a Single-Mass Vibroimpact System to White-Noise Random Excitation [J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1979, 59(12): 709-716.
- [12] DIMENTBERG M F. Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems [M]. Taunton, UK: Research Studies Press, 1988: 1-135.
- [13] DIMENTBERG M F, HAENISCH H G. Pseudo-linear Vibroimpact System with a Secondary Structure: Response to a White-Noise Excitation [J]. Journal of Applied Mechanics, 1998, 65(3): 772-774.
- [14] JING H S, SHEU K C. Exact Stationary Solutions of the Random Response of a Single-Degree-of-Freedom Vibro-Impact System [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 141(3): 363-373.
- [15] JING H S, YOUNG M H. Random Response of a Single-Degree-of-Freedom Vibro-Impact System with Clearance [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1990, 19(6): 789-798.
- [16] 徐伟, 戎海武, 方同. 有界窄带激励下具有黏弹项的 Duffing 振子 [J]. 力学学报, 2002, 34(5): 764-771. (XU W, RONG H W, FANG T. Duffing Oscillator with Visco-Elastic Term under Narrow-Band Random Excitation [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2002, 34(5): 764-771.)
- [17] XU W, RONG H W, FANG T. Visco-Elastic Systems under both Deterministic and Bound Random Parametric Excitation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(9): 1089-1099.
- [18] ZHU W Q, CAI G Q. Random Vibration of Viscoelastic System under Broad-Band Excitations [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2011, 46(5): 720-726.
- [19] NASAB M S E, KIM J. Fuzzy Analysis of a Viscoelastic Damper in Seismic Retrofit of Structures [J]. Engineering Structures, 2022, 250(1): 113473-1-113473-13.
- [20] HUANG W Y, SHI F, ZHANG C, et al. Seismic Performance of Reinforced Concrete Frame with Lead Viscoelastic Damper under Mainshock-Aftershock Sequences [J]. Structures, 2022, 41: 1624-1636.
- [21] WANG S Q, GUO A F, LIANG S, et al. Structural Dynamic Properties of Stiffened Composite Plates with Embedded Multi-layered Viscoelastic Damping Membranes [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2023, 30(22): 4536-4549.
- [22] 王亮, 景康康, 彭佳慧, 等. 非光滑变换下随机碰撞系统的路径积分算法 [J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(3): 68-77. (WANG L, JING K K, PENG J H, et al. Path Integration Method for the Stochastic Vibro-Impact System under Non-smooth Transformation [J]. Journal of Shandong University (Science Edition), 2022, 57(3): 68-77.)
- [23] 王德莉. 具有粘弹阻尼及时滞反馈控制的碰撞系统随机动力学研究 [D]. 西安: 西北工业大学, 2019. (WANG D L. Study on Stochastic Dynamics of Collision Systems with Viscoelastic Damping and Delayed Feedback Control [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2019.)
- [24] SHU Z, YOU R K, ZHOU Y. Viscoelastic Materials for Structural Dampers: A Review [J]. Construction and Building Materials, 2022, 342: 127955-1-127955-19.