第 62 卷　第 2 期　　吉 林 大 学 学 报 (理 学 版)　　Vol. 62　No. 2
2024 年 3 月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Mar　2024

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023240

具 p-双调和算子的非局部椭圆方程 Navier 边值问题的广义解

刘　健[1]，赵增勤[2]

（1. 山东财经大学 统计与数学学院，济南 250014；2. 曲阜师范大学 数学科学学院，山东 曲阜 273165）

摘要： 利用变分方法和相应的临界点定理研究一类具有 p-双调和算子的非局部椭圆方程 Navier 边值问题，在非线性项满足超线性条件时，得到了两个非平凡广义解的存在性定理.

关键词： 非局部椭圆方程；Navier 边值问题；p-双调和算子；变分方法；广义解

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)02-0205-06

Generalized Solutions to Nonlocal Elliptic Equations Navier Boundary Value Problems with p-Biharmonic Operators

LIU Jian[1], ZHAO Zengqin[2]

(1. *School of Statistics and Mathematics*, *Shandong University of Finance and Economics*, *Jinan* 250014, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences*, *Qufu Normal University*, *Qufu* 273165, *Shandong Province*, *China*)

Abstract: By using variational methods and corresponding critical points theorems, we investigated a class of nonlocal elliptic equations Navier boundary value problems with p-biharmonic operators. We obtained two existence theorems for nontrivial generalized solutions when nonlinear terms satisfied super-linear conditions.

Keywords: nonlocal elliptic equation; Navier boundary value problem; p-biharmonic operator; variational method; generalized solution

0　引　言

四阶非线性椭圆方程边值问题在微机电系统、多相系统的相场模型、固体表面扩散及界面动力学等领域应用广泛. Kirchhoff 型椭圆方程是带有非局部项的非线性方程，该类方程的很多定性性质可解释物理学和工程学中许多非线性模型的物理意义[1]. 为研究拉伸弦的振动，Lions[2]建立了该类方程的抽象框架. 近年来，利用变分方法结合临界点理论，对非线性微分方程解的存在性及解存在数量的研究得到广泛关注[3-18]. 例如：文献[4,14]分别在一定的条件下研究了四阶脉冲弹性梁方程解的存在数量；文献[5]在非线性项满足一定的增长性条件下，利用变分方法结合相应的临界点定理研究了一类 Kirchhoff 型四阶弹性梁方程两个非平凡广义解的存在性.

受上述研究启发，本文研究下列具有 p-双调和算子的 Kirchhoff 型椭圆方程 Navier 边值问题广义解的存在性：

收稿日期： 2023-06-12.

第一作者简介： 刘　健(1980—)，男，汉族，博士，教授，从事非线性泛函分析及偏微分方程的研究，E-mail：liujianmath@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：11571197)和山东省自然科学基金(批准号：ZR2021MA070).

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u + K\left(\int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{|u|^p}{p}\right)\mathrm{d}t\right)(-\Delta_p u + |u|^{p-2}u) = \lambda f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \Delta u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω是包含于$\mathbb{R}^N$($N\geqslant 1$)的边界光滑的有界开区域，$p>\max\left\{1,\frac{N}{2}\right\}$，$\Delta_p^2 u=\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$是$p$-双调和算子，$\Delta_p u=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$是$p$-Laplace算子，$f\in C^0(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$，$\lambda>0$，$K$：$[0,+\infty)\to\mathbb{R}$是连续的，且存在正数$m_0,m_1$，使得对任意的$x\geqslant 0$，均有$m_0\leqslant K(x)\leqslant m_1$.

1 预备知识

令$X=W_0^{1,p}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$，其范数为

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

结合Poincaré不等式，经计算可知，$\|u\|$与下列范数等价：

$$\|u\|_X = \left[\int_\Omega (|\Delta u|^p + |\nabla u|^p + |u|^p)\mathrm{d}t\right]^{1/p},$$

因此存在$c_1>0$，使得$\|u\|_X\leqslant c_1\|u\|$.

由于$p>\frac{N}{2}$，所以嵌入$X\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$是紧嵌入，从而存在常数$k>0$，使得

$$\|u\|_\infty \leqslant k\|u\|, \tag{2}$$

其中$\|u\|_\infty=\sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$.

定义泛函I_λ：$X\to\mathbb{R}$：

$$I_\lambda(u)=\Phi(u)-\lambda\Psi(u),$$

其中

$$\begin{aligned} &\Phi(u) = \int_\Omega \frac{|\Delta u|^p}{p}\mathrm{d}x + \mathbb{K}\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u|^p}{p}+\frac{|u|^p}{p}\right)\mathrm{d}x\right), \\ &\mathbb{K}(u) = \int_0^u K(x)\mathrm{d}x, \quad \forall u>0, \\ &\Psi(u) = \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x, \\ &F(t,u) = \int_0^u f(t,x)\mathrm{d}x, \quad \forall (t,u)\in\Omega\times\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

经过简单计算可得：

引理1 泛函Φ,Ψ是连续Gâteaux可微的，且对任意的$u\in X$，有

$$\langle\Phi'(u),v\rangle = \int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta v\mathrm{d}x + K\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u|^p}{p}+\frac{|u|^p}{p}\right)\mathrm{d}x\right)\times \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\mathrm{d}x\right),$$

$$\langle\Psi'(u),v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x, \qquad \forall v\in X.$$

定义1[19] 如果X是实自反Banach空间，I_λ是连续Gâteaux可微泛函，对于$\{u_n\}\subset X$，满足$\{I_\lambda(u_n)\}$有界，且$I_\lambda'(u_n)\to 0$($n\to+\infty$)，$\{u_n\}$在X中有收敛子列，则称泛函I_λ满足Palais-Smale条件.

引理2[20] X是实Banach空间，Φ,Ψ：$X\to\mathbb{R}$是连续Gâteaux可微泛函，Φ下方有界，$\Phi(0)=\Psi(0)=0$. 取$r>0$，使得$\sup\limits_{\Phi(u)<r}\Psi(u)<+\infty$，若对任意的$\lambda\in\left(0,\frac{r}{\sup\limits_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)}\right)$，泛函$\Phi-\lambda\Psi$满足Palais-Smale条件，且无下界，则对任意的$\lambda\in\left(0,\frac{r}{\sup\limits_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)}\right)$，泛函$\Phi-\lambda\Psi$至少有两个不同的临界点.

引理 3[21]　X 是实 Banach 空间，Φ,Ψ：$X\to\mathbb{R}$ 是连续 Gâteaux 可微泛函，满足 $\inf_{X}\Phi=\Phi(0)=\Psi(0)=0$. 若存在 $r\in\mathbb{R}$，$\bar{u}\in X$，$0<\Phi(\bar{u})<r$，使得

$$\frac{1}{r}\sup_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)<\frac{\Psi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u})},$$

且对任意的 $\lambda\in\left(\frac{\Phi(\bar{u})}{\Psi(\bar{u})},\frac{r}{\sup\limits_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)}\right)$，泛函 $I_\lambda=\Phi-\lambda\Psi$ 满足 Palais-Smale 条件，并且无下界，则对任意的 $\lambda\in\left(\frac{\Phi(\bar{u})}{\Psi(\bar{u})},\frac{r}{\sup\limits_{\Phi(x)\leqslant r}\Psi(u)}\right)$，泛函 I_λ 至少有两个非平凡临界点 $u_{\lambda,1},u_{\lambda,2}$，且满足 $I_\lambda(u_{\lambda,1})<0<I_\lambda(u_{\lambda,2})$.

2　主要结果

定理 1　若存在 $\mu>\frac{pm_1}{m_0}$，使得

$$0<\mu F(x,u)\leqslant f(x,u)u,\quad \forall x\in\Omega,\quad u\in\mathbb{R}\backslash\{0\},$$

则当 $\lambda\in\left(0,\frac{c_\alpha}{pk^p}\right)$ 时，方程(1)至少有两个广义解，其中

$$c_\alpha=\sup_{\alpha>0}\frac{\alpha^p}{\int_\Omega\max\limits_{|u|\leqslant\alpha}F(x,u)\mathrm{d}x}.$$

证明：由条件 $K(x)\geqslant m_0(\forall x\geqslant 0)$ 可知，

$$\Phi(u)=\int_\Omega\frac{|\Delta u|^p}{p}\mathrm{d}x+\mathbb{K}\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u|^p}{p}+\frac{|u|^p}{p}\right)\mathrm{d}x\right)\geqslant\min\left\{\frac{1}{p},\frac{m_0}{p}\right\}\|u\|_X^2,$$

因此可知泛函 Φ 有下界.

取 $\{u_n\}\subset X$，使得 $\{I_\lambda(u_n)\}$ 有界，且 $I'_\lambda(u_n)\to 0(n\to+\infty)$，下面证明 $\{u_n\}$ 在 X 中有界，且泛函 I_λ 满足 Palais-Smale 条件. 事实上，注意到 $\mu>\frac{pm_1}{m_0}>p$，有

$$\begin{aligned}\mu I_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u_n)u_n=&\mu\int_\Omega\frac{|\Delta u_n|^p}{p}\mathrm{d}x+\mu\mathbb{K}\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u_n|^p}{p}+\frac{|u_n|^p}{p}\right)\mathrm{d}x\right)-\\&\lambda\mu\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x-\int_\Omega|\Delta u_n|^p\mathrm{d}x-K\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u_n|^p}{p}+\frac{|u_n|^p}{p}\right)\mathrm{d}x\right)\times\\&\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_n|^p\right)\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\geqslant\\&\left(\frac{\mu}{p}-1\right)\int_\Omega|\Delta u_n|^p\mathrm{d}x+\\&\left(\frac{\mu m_0}{p}-m_1\right)\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_n|^p\mathrm{d}x\right)\geqslant\\&\left(\frac{\mu}{p}-1\right)\|u_n\|^p,\end{aligned}$$

这蕴含着 $\{u_n\}$ 有界，因此存在 $\{u_n\}$ 的一个子列 $\{u_{n_k}\}$ 弱收敛于 X 中某元素 u，则当 $k\to+\infty$ 时，有 $I'_\lambda(u)(u_{n_k}-u)\to 0$，从而可得

$$(I'_\lambda(u_{n_k})-I'_\lambda(u))(u_{n_k}-u)\to 0\ ,\qquad k\to+\infty,\tag{4}$$

根据嵌入 $X\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ 是紧嵌入可知 Ψ' 是紧算子，于是有

$$\Psi'(u_{n_k})-\Psi'(u)\to 0,\qquad k\to+\infty.\tag{5}$$

注意到 Φ' 是(S_+)型映射，即若在 X 中 $u_n\rightharpoonup u$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_n-u)\rangle\leqslant 0$，则有 $\|u_n-u\|\to 0$ $(n\to+\infty)$. 结合式(4),(5)以及 $\Phi'=I'_\lambda+\lambda\Psi'$ 可知，

$$\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_{n_k}-u)\rangle\to 0,\qquad k\to+\infty,$$

因此，结合 Φ' 是(S_+)型映射，可知 $\|u_{n_k}-u\|\to 0(k\to+\infty)$，所以泛函 I_λ 满足 Palais-Smale 条件.

下面证明泛函 I_λ 无下界. 注意到 $\forall\, t\in\Omega$, $u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0<\mu(t,u)\leqslant f(t,u)u$, 因此存在正常数 $\bar{\alpha},\bar{\beta}$, 使得

$$F(t,u)\geqslant\bar{\alpha}|u|^{\mu}-\bar{\beta},\qquad u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

选取 $\rho_n(t)=\xi_n\in\mathbb{R}^N$, 则有 $\rho_n(t)\in X$ 及

$$I_\lambda(\rho_n)=I_\lambda(\xi_n)=\mathbb{K}\left(\int_\Omega\frac{|\xi_n|^p}{p}\mathrm{d}x\right)-\lambda\int_\Omega F(x,\xi_n)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\left(\frac{m_1}{p}|\xi_n|^p-\lambda\bar{\alpha}|\xi_n|^{\mu}+\lambda\bar{\beta}\right)|\Omega|.$$

结合 $\mu>\dfrac{pm_1}{m_0}>p$, 可得 $I_\lambda(\rho_n)\to-\infty\,(|\rho_n|\to+\infty)$, 从而可知泛函 I_λ 无下界.

固定 $r>0$, 根据式(2),(3), 对满足条件 $\Phi(u)\leqslant r$ 的任意 $u\in X$, 有

$$\|u\|\leqslant(pr)^{1/p},\qquad\|u\|_\infty\leqslant k\|u\|\leqslant k(pr)^{1/p}:=\alpha,$$

以及

$$\sup_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)=\sup_{\Phi(u)\leqslant r}\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\max_{|u|\leqslant\alpha}F(x,u)\mathrm{d}x<+\infty.$$

取 $c_\alpha=\sup\limits_{\alpha>0}\dfrac{\alpha^p}{\int_\Omega\max\limits_{|u|\leqslant\alpha}F(x,u)\mathrm{d}x}$, 根据引理3可知, 对任意的 $\lambda\in\left(0,\dfrac{c_\alpha}{pk^p}\right)$, 泛函 K_λ 至少有两个不同的临界点, 其中一个可能是零, 因此可知方程(1) 至少存在一个非平凡广义解.

注1 注意到 $F(t,u)=\int_0^u f(t,\xi)\mathrm{d}\xi$, 对于 u 是连续的, 则定理1中的条件可以被替换为下列条件:

(H) 存在 $\mu>\dfrac{pm_1}{m_0}$, $m>0$, 使得 $0<\mu F(t,u)\leqslant f(t,u)u$, $\forall\, x\in\Omega$, $|u|\geqslant m$.

定理2 若条件(H)成立, $\forall\,(x,\xi)\in B(\bar{x},d)\times[0,\delta]$, $F(x,\xi)\geqslant0$, 且存在正常数 c_δ,α, 满足 $\alpha>kc_1\sqrt[p]{c_\delta(1+m_1)}$, 使得 $\lambda_1<\lambda_2$, 其中

$$c_\delta=\left(\frac{4\delta}{d^2}\right)^p\frac{(N+5)^{2p}}{(N+2)^p}\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1+N/2)}\left[d^N-\left(\frac{d}{2}\right)^N\right],$$

$$\lambda_1=\frac{pk^p}{\alpha^p}\int_\Omega\max_{|t|\leqslant\alpha}F(x,t)\mathrm{d}x,\qquad\lambda_2=\frac{p\int_{B(\bar{x},d/2)}F(x,\delta)\mathrm{d}x}{c_1^p c_\delta(1+m_1)}.$$

则对任意的 $\lambda\in\left(\dfrac{1}{\lambda_2},\dfrac{1}{\lambda_1}\right)$, 泛函 K_λ 至少有两个非平凡的临界点, 即方程(1)至少存在两个非平凡广义解.

证明: 取 $d=\sup\limits_{x\in\Omega}\delta(x)$, 其中 $\delta(x)=\sup\{\delta>0: B(x,\delta)\subseteq\Omega\}$, $\forall\, x\in\Omega$, 则存在 $\bar{x}\in\Omega$, 使得 $B(\bar{x},d)\subseteq\Omega$. 选取

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}0, & x\in\bar{\Omega}\setminus B(\bar{x},d),\\ \dfrac{16\delta}{d^4}(l^4-2dl^3+d^2l^2), & x\in B(\bar{x},d)\setminus B(\bar{x},d/2),\\ \delta, & x\in B(\bar{x},d/2),\end{cases}$$

其中 $l=|x-\bar{x}|$ 表示 x 和 $\bar{x}$ 之间的距离.

直接计算可得

$$\Delta\bar{u}(x)=\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2\bar{u}(x)}{\partial x_i^2}=\begin{cases}0, & x\in\bar{\Omega}\setminus B(\bar{x},d),\\ \dfrac{32\delta}{d^4}[2(N+2)l^2-3d(N+1)l+d^2N], & x\in B(\bar{x},d)\setminus B(\bar{x},d/2),\\ 0, & x\in B(\bar{x},d/2),\end{cases}$$

因此

$$\Phi(\bar{u})=\int_\Omega\frac{|\Delta\bar{u}|^p}{p}\mathrm{d}x+\mathbb{K}\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla\bar{u}|^p}{p}+\frac{|\bar{u}|^p}{p}\right)\mathrm{d}x\right)\leqslant$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\Delta\overline{u}|^{p}\mathrm{d}x+\frac{m_1}{p}\int_{\Omega}(|\nabla\overline{u}|^{p}+|\overline{u}|^{p})\mathrm{d}x\leqslant\\
&\max\left\{\frac{1}{p},\frac{m_1}{p}\right\}\|\overline{u}\|_X^{p}\leqslant c_1^{p}\max\left\{\frac{1}{p},\frac{m_1}{p}\right\}\|\overline{u}\|^{p}\leqslant\\
&\frac{c_1^{p}(1+m_1)}{p}\left(\frac{32\delta}{d^4}\right)^{p}\int_{B(\overline{x},d)\setminus\overline{B}(\overline{x},d/2)}|2(N+2)l^2-3d(N+1)l+d^2N|^{p}\mathrm{d}x=\\
&|B(0,1)|\frac{Nc_1^{p}(1+m_1)}{p}\left(\frac{32\delta}{d^4}\right)^{p}\int_{d/2}^{d}|2(N+2)r^2-3d(N+1)r+d^2N|^{p}r^{N-1}\mathrm{d}r\leqslant\\
&\frac{c_1^{p}(1+m_1)}{p}\left(\frac{4\delta}{d^2}\right)^{p}\frac{(N+5)^{2p}}{(N+2)^{p}}|B(0,1)|\left[d^N-\left(\frac{d}{2}\right)^{N}\right]=\\
&\frac{c_1^{p}(1+m_1)}{p}\left(\frac{4\delta}{d^2}\right)^{p}\frac{(N+5)^{2p}}{(N+2)^{p}}\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1+N/2)}\left[d^N-\left(\frac{d}{2}\right)^{N}\right]=\\
&\frac{c_1^{p}(1+m_1)}{p}c_{\delta},
\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $|B(0,1)|=\dfrac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1+N/2)}$ 表示 N 维单位球的体积，$\Gamma(x)$表示 Gamma 函数.

根据 $\alpha>kc_1\sqrt[p]{c_{\delta}(1+m_1)}$，可得

$$0<\Phi(\overline{u})\leqslant\frac{c_1^{p}(1+m_1)}{p}c_{\delta}<\frac{\alpha^{p}}{pk^{p}}:=r.$$

对于任意满足 $\Phi(u)\leqslant r$ 的 $u\in X$，有

$$\|u\|\leqslant(pr)^{1/p},\qquad \|u\|u_{\infty}\leqslant k\|u\|\leqslant k(pr)^{1/p}=\alpha,$$

$$\Psi(u)=\int_{\Omega}F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}\max_{|t|\leqslant\alpha}F(x,t)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\sup\limits_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)}{r}\leqslant\frac{\int_{\Omega}\max\limits_{|t|\leqslant\alpha}F(x,t)\mathrm{d}x}{r}=\frac{pk^{p}}{\alpha^{p}}\int_{\Omega}\max_{|t|\leqslant\alpha}F(x,t)\mathrm{d}x.\tag{7}$$

注意到

$$\max_{l\in[d/2,d]}(l^4-2dl^3+d^2l^2)=\frac{d^4}{16},$$

则有 $0\leqslant\overline{u}(x)\leqslant\delta$，结合条件 $F(x,\xi)\geqslant0(\forall(x,\xi)\in B(\overline{x},d)\times[0,\delta])$，可知

$$\Psi(\overline{u})=\int_{\Omega}F(x,\overline{u}(x))\mathrm{d}x\geqslant\int_{B(\overline{x},d/2)}F(x,\delta)\mathrm{d}x,\tag{8}$$

再结合式(6)～(8)可得

$$\frac{\sup\limits_{\Phi(u)\leqslant r}\Psi(u)}{r}\leqslant\frac{pk^{p}}{\alpha^{p}}\int_{\Omega}\max_{|t|\leqslant\alpha}F(x,t)\mathrm{d}x=\lambda_1<\frac{p\int_{B(\overline{x},d/2)}F(x,\delta)\mathrm{d}x}{c_1^{p}c_{\delta}(1+m_1)}=\lambda_2\leqslant\frac{\Psi(\overline{u})}{\Phi(\overline{u})},$$

从而引理 3 的条件均满足，则对任意的 $\lambda\in\left(\dfrac{1}{\lambda_2},\dfrac{1}{\lambda_1}\right)$，泛函 K_{λ} 至少有两个非平凡的临界点，即方程(1)至少存在两个非平凡广义解.

参考文献

[1] KIRCHHOFF G. Vorlesungen Über Mathematische Physik：Mechanik [M]. Leipzig：Teubner，1883：1-234.

[2] LIONS J L. On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics [J]. North-Holland Mathematics Studies，1978，30：284-346.

[3] BONANNO G，DI BELLA B. A Boundary Value Problem for Fourth-Order Elastic Beamequations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2008，343(2)：1166-1176.

[4] D'AGUÌ G，DI BELLA B，WINKERT P. Two Positive Solutions for Nonlinear Fourth-Order Elastic Beam Equations [J/OL]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，(2019-05-21)[2023-03-07]. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.37.

[5] LIU J，YU W G. Two Solutions to Kirchhoff-Type Fourth-Order Implusive Elastic Beam Equations [J/OL]. Boundary Value Problems，（2021-03-31）[2023-03-07]. https：//doi. org/10. 1186/s13661-021-01515-8.

[6] LIU J，YU W G. Two Solutions to Superlinear Hamiltonian Systems with Impulsive Effects [J]. Applied Mathematics Letters，2020，102：106162-1-106162-6.

[7] LIU J，ZHAO Z Q，ZHANG T Q. Multiple Solutions to Damped Hamiltonian Systems with Impulsive Effects [J]. Applied Mathematics Letters，2019，91（1）：173-180.

[8] LIU J，ZHAO Z Q. Multiple Solutions for Impulsive Problems with Non-autonomous Perturbations [J]. Applied Mathematics Letters，2017，64：143-149.

[9] NIETO J J，O'REGAN D. Variational Approach to Impulsive Differential Equations [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2009，10（2）：680-690.

[10] NIETO J J. Variational Formulation of a Damped Dirichlet Impulsive Problem [J]. Applied Mathematics Letters，2010，23（8）：940-942.

[11] SUN J T，CHEN H B，YANG L. Variational Methods to Fourth-Order Impulsive Differential Equations [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing，2011，35：323-340.

[12] 刘健，赵增勤. Cerami 条件下脉冲边值问题古典解的存在性 [J]. 数学学报（中文版），2016，59（5）：609-622.（LIU J，ZHAO Z Q. Existence of Classical Solutions to Impulsive Boundary Value Problems under Cerami Condition [J]. Acta Mathematica Sinica（Chinese Series），2016，59（5）：609-622.）

[13] 刘健，赵增勤，于文广. 具非自治微小扰动的脉冲方程三个古典解的存在性 [J]. 数学学报（中文版），2019，62（3）：441-448.（LIU J，ZHAO Z Q，YU W G. The existence of Triple Classical Solutions to Impulsive Problems with Small Non-autonomous Perturbations [J]. Acta Mathematica Sinica（Chinese Series），2019，62（3）：441-448.）

[14] 刘健，赵增勤，于文广. 四阶脉冲弹性梁方程非平凡弱解的存在数量 [J]. 数学学报（中文版），2021，64（1）：99-106.（LIU J，ZHAO Z Q，YU W G. The Numbers of Nontrivial Weak Solutions to Fourth-Order Impulsive Elastic Beam Equations [J]. Acta Mathematica Sinica（Chinese Series），2021，64（1）：99-106.）

[15] 谢嫣玲，肖宇霞，储昌木. 一类具有奇异项的 $p(x)$-Kirchhoff 方程解的存在性 [J]. 东北师大学报（自然科学版），2022，54（3）：20-24.（XIE Y L，XIAO Y X，CHU C M. Existence of Solutions of $p(x)$-Kirchhoff Equation with Singular and Nonlinear Terms [J]. Journal of Northeast Normal University（Natural Science Edition），2022，54（3）：20-24.）

[16] SANG Y B，REN Y. A Critical p-Biharmonic System with Negative Exponents [J]. Computers & Mathematics with Applications，2020，79（5）：1335-1361.

[17] LIU J，ZHAO Z Q. Leray-Lions Type $p(x)$-Biharmonic Equations Involving Hardy Potentials [J]. Applied Mathmatics Letters，2024，149：108907-1-108907-6.

[18] BOUREANU M M，VÉLEZ-STANTIAGO A. Applied Higher-Order Elliptic Problems with Nonstandard Growth Structure [J]. Applied Mathmatics Letters，2022，123：107603-1-107603-7.

[19] MAWHIN J，WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York：Springer Verlag，1989：1-292.

[20] BONANNO G，IANNIZZOTTO A，MARRAS M. Two Positive Solutions for Superlinear Neumann Problems with a Complete Sturm-Liouville Operator [J]. Journal of Convex Analysis，2018，25（2）：421-434.

[21] BONANNO G. Relations between the Mountain Pass Theorem and Local Minima [J]. Advances in Nonlinear Analysis，2012，1（3）：205-220.

（责任编辑：赵立芹）