第 62 卷　第 1 期　　吉 林 大 学 学 报 (理 学 版)　　Vol. 62　No. 1
2024 年 1 月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Jan　2024

研究简报

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023260

能量临界分数阶非线性 Schrödinger 方程的整体弱解

武少琪[1]，廖梦兰[1]，曹春玲[2]
(1. 河海大学 数学学院，南京 211100；2. 吉林大学 数学学院，长春 130012)

摘要： 利用紧性方法给出能量临界分数阶非线性 Schrödinger 方程 Cauchy 问题解的存在性，并证明 Cauchy 问题存在整体解. 通过构造逼近方程，对满足逼近方程的解序列取极限，得到的极限函数即为能量临界分数阶非线性 Schrödinger 方程的整体弱解，并证明该弱解满足能量不等式和质量守恒性质.

关键词： 非线性 Schrödinger 方程；能量临界；分数阶；弱解；紧性

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)01-0087-05

Global Weak Solutions for Energy-Critical Fractional Nonlinear Schrödinger Equations

WU Shaoqi[1], LIAO Menglan[1], CAO Chunling[2]
(1. *School of Mathematics*, *Hohai University*, *Nanjing* 211100, *China*;
2. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: By using the compactness method, we gaved the existence of solutions to the Cauchy problem of the energy-critical fractional nonlinear Schrödinger equation and proved the existence of global solution to the Cauchy problem. By constructing the approximation equation and taking the limit of the solution sequence satisfying the approximation equation, the obtained limit function was the global weak solution of the energy-critical fractional nonlinear Schrödinger equation, and it was proved that the weak solution satisfied the energy inequality and mass conservation property.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation; energy-critical; fractional order; weak solution; compactness

0　引　言

非线性 Schrödinger 方程在量子场论、等离子物理、光通信等领域应用广泛[1-3]. 分数阶偏微分方程在材料、力学以及生物系统等领域应用广泛[4-5]. 目前，关于非线性 Schrödinger 方程的研究已有很多结果，但对分数阶非线性 Schrödinger 方程的研究文献报道较少. Cazenave[4] 构造了非线性 Schrödinger 方程的弱解；文献[6-7]给出了非线性 Schrödinger 方程所涉及的 Sobolev 空间等基础知识；此外，分数阶 Schrödinger 方程的适定性和散射等问题也得到广泛关注[8-16]；对于更高阶的分数阶 Schrödinger 方程，Miao 等[17] 对聚焦能量临界四阶非线性 Schrödinger 方程的整体适定性和散射问题做了相关研究.

受上述研究工作启发，本文考虑能量临界分数阶非线性 Schrödinger 方程弱解的整体存在性. 在

收稿日期： 2023-06-27.

第一作者简介： 武少琪(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事偏微分方程的研究，E-mail：18132315148@163.com. **通信作者简介：** 廖梦兰(1993—)，女，汉族，博士，副研究员，从事偏微分方程的研究，E-mail：liaoml@hhu.edu.cn.

基金项目： 中央高校基本科研基金(批准号：B230201033；423139)、广东省数字信号与图像处理技术重点实验室开放课题基金(批准号：2021GDDSIPL-02)和江苏省自然科学基金(批准号：BK20221497).

$d\geqslant 3$，$\dfrac{d}{2d-1}<s<1$ 的条件下，考虑如下分数阶非线性 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+D^{2s}u=|u|^{4s/(d-2s)}u, \\ u(0)=u_0\in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $D=\sqrt{-\Delta}$，算子

$$u\rightarrow D^{2s}u-|u|^{4s/(d-2s)}u$$

为 $H^s(\mathbb{R}^d)\rightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ 上的连续映射. 通过构造逼近方程给出方程(1)整体弱解的存在性. 逼近方程具有整体适定性，其解序列存在且唯一，利用紧性方法对逼近方程的解序列取极限得到方程(1)的整体弱解，并证明该弱解满足能量不等式和质量守恒.

1 预备知识

对于 $u\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ 和 $v\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$，定义内积

$$\langle u,v\rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}=\int_{\mathbb{R}^d}uv\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)=C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$表示 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$的拓扑对偶.

如果 $u\in L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$，则方程(1)在 $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$中有意义. 对于 $\forall\, u\in H^s(\mathbb{R}^d)$，当 $d\geqslant 3$，$\dfrac{d}{2d-1}<s<1$ 时，方程(1)的能量定义为

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{2s}u|^2\mathrm{d}x+\frac{d-2s}{2d}\int_{\mathbb{R}^d}|u|^{2d/(d-2s)}\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中 $D=\sqrt{-\Delta}$.

引理 1[4] 令 $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$中的有界序列. 假设当 $m\rightarrow\infty$ 时，存在 u：$\mathbb{R}\rightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$，使得在 $H^s(\mathbb{R}^d)$中，对 $\forall\, t\in\mathbb{R}$，$u^m(t)\rightharpoonup u(t)$关于 x 几乎处处成立，则有 $u\in L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$，且

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))}\leqslant\liminf_{m\rightarrow\infty}\|u^m\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))}.$$

引理 2[4] 令$(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$是 $L^{2d/(d+2s)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$中的有界序列. 假设当 $m\rightarrow\infty$时，存在 u：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}$，使得 $u^m\rightarrow u$ 在$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 上几乎处处成立，由于$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 任意有限可测，则当 $m\rightarrow\infty$时，在 $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$中有 $u^m\rightarrow u$.

引理 3[4] 令$(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$中的有界序列. 假设当 $m\rightarrow\infty$ 时，存在 u：$\mathbb{R}\rightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^d)$，使得对 $\forall\, t\in\mathbb{R}$，在 $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$中 $u^m(t)\rightharpoonup u(t)$关于 x 几乎处处成立，则有 $u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$，且

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))}\leqslant\liminf_{m\rightarrow\infty}\|u^m\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))}.$$

命题 1[4] 令 $G\in C^1(H^s(\mathbb{R}^d),\mathbb{R})$，$g=G'$. 假设 $g(0)\in L^2(\mathbb{R}^d)$，对$\forall M<\infty$，$\exists\, C(M)<\infty$，使得对 $\forall\, u,v\in H^s(\mathbb{R}^d)$，当 $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leqslant M$ 时，$\|g(v)-g(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(M)\|v-u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$成立. 若对于 $u\in H^s(\mathbb{R}^d)$，$\mathrm{Im}(g(u))\overline{u}=0$ 几乎处处成立，则方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+D^{2s}u+g(u)=0, \\ u(0)=u_0\in H^s(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{3}$$

在 $H^s(\mathbb{R}^d)$中局部适定，有唯一解，并满足质量守恒和能量守恒，即对$\forall\, t\in(-T_{\min},T_{\max})$，

$$M(u(t))=M(u_0),\qquad E(u(t))=E(u_0),$$

其中 u 是初值方程(3)的解，$M(u(t))=\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

2 主要结果

引理 4 假设$(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$是 $L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$和 $W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$中的有界序列，则存在子列(仍用$(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$表示)和 $u\in L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$，满足下列性质：

1) 当 $m\rightarrow\infty$时，对$\forall\, t\in\mathbb{R}$，在 $H^s(\mathbb{R}^d)$中 $u^m(t)\rightharpoonup u(t)$；

2) 当 $k\rightarrow\infty$时，对$\forall\, t\in\mathbb{R}$，存在子列 m_k，使得 $u^{m_k}(t,x)\rightarrow u(t,x)$关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 几乎处处成立；

3）当 $m\to\infty$ 时，$u^m(t,x)\to u(t,x)$ 关于 $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 几乎处处成立.

证明：令 $k\in\mathbb{N}$，$B_0^k=\{x\in\mathbb{R}^d;\ |x|<k\}$. 显然 $H^s(B_0^k)$ 和 $H^{-s}(B_0^k)$ 是自反 Banach 空间，对于任意区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，由假设知 $u^m|_{B_0^k}$ 在 $L^\infty(I,H^s(B_0^k))\cap W^{1,\infty}(I,H^{-s}(B_0^k))$ 中有界. 根据文献[4]中命题 1.1.2(取 $X=H^s(B_0^k)$，$Y=H^{-s}(B_0^k)$)，显然存在子列(仍用 $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ 表示)和 $u\in L^\infty(I,H^s(B_0^k))$，使得当 $m\to\infty$ 时，在 $H^s(B_0^k)$ 中有 $u^m(t)|_{B_0^k}\rightharpoonup u(t)$. 由 I 的任意性知，对 $\forall t\in\mathbb{R}$，在 $H^s(B_0^k)$ 中有 $u^m(t)|_{B_0^k}\rightharpoonup u(t)$. 令 $k\to\infty$，则存在子列(仍用 $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ 表示)，使得在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 中，有 $u^m(t)\rightharpoonup u(t)$ 且 $u\in L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$，从而性质 1)成立.

由于 $H^s(B_0^k)\subset\subset L^2(B_0^k)$ 是紧嵌入，故在 $L^2(B_0^k)$ 中对 $\forall k\in\mathbb{N}$ 和 $\forall t\in\mathbb{R}$，当 $m\to\infty$ 时，有

$$\int_{B_0^k}|u^m-u|^2\mathrm{d}x\to 0,$$

再用控制收敛定理可知当 $m\to\infty$ 时，有

$$\int_I\int_{B_0^k}|u^m-u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0,\qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

特别地，存在子列 m_j，使得当 $j\to\infty$ 时，$u^{m_j}\to u$ 在 $I\times B_0^k$ 中几乎处处成立. 令 $k\to\infty$，结合 I 的任意性知，性质 3)成立.

给定 $t\in\mathbb{R}$ 和 $k\in\mathbb{N}$，在 $L^2(B_0^k)$ 中有 $u^m(t)|_{B_0^k}\to u(t)|_{B_0^k}$ 成立. 由 L^2 空间性质知，当 $j\to\infty$ 时，存在子列 m_j，使得 $u^{m_j}(t)\to u(t)$ 在 B_0^k 中几乎处处成立. 令 $k\to\infty$，可得性质 2)成立.

最后，根据 1)得出在 $H^s(\mathbb{R}^d)(H^{-s}(\mathbb{R}^d))$ 中，对 $\forall t\in\mathbb{R}$，$u^m(t)\rightharpoonup u(t)$ 成立. 由引理 1 和引理 3 可得 $u\in L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$.

本文主要结果如下：

定理 1　对于 $\forall u_0\in H^s(\mathbb{R}^d)$，方程(1)存在弱解

$$u\in L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d)),\tag{4}$$

此外，对 $\forall t\in\mathbb{R}$，满足

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\qquad E(u(t))\leqslant E(u_0).\tag{5}$$

证明：通过紧性方法构造解 u，下面分两步证明.

1）构造逼近方程. 取整数 $m\geqslant 1$，令

$$f_m(y)=\begin{cases}|y|^{4s/(d-2s)}y, & |y|\leqslant m,\\ m^{4s/(d-2s)}y, & |y|\geqslant m.\end{cases}$$

特别地，f_m：$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是整体 Lipschitz 连续函数. 令

$$G_m(y)=\int_0^{|y|}f_m(z)\mathrm{d}z,$$

给定 $u\in H^s(\mathbb{R}^d)$，显然，$G_m\geqslant 0$，$G_m(u)\in L^2(\mathbb{R}^d)$. 记 $g_m(u)(x)=f_m(u(x))$，

$$E_m(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{2s}u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^d}G_m(u)\mathrm{d}x.$$

由命题 1 可知方程

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t^m+D^{2s}u^m+g_m(u^m)=0,\\ u^m(0)=u_0\end{cases}\tag{6}$$

存在唯一解 $u^m\in C(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))\cap C^1(\mathbb{R},H^{-s}(\mathbb{R}^d))$，此外，对 $\forall t\in\mathbb{R}$，满足

$$\|u^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\tag{7}$$

$$E_m(u^m(t))=E_m(u_0).\tag{8}$$

由式(7)可知 $\|u^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ 为常数，即 $\|u^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}<\infty$，$u^m(t)\in L^2(\mathbb{R}^d)$. 同理，由式(8)可得 $E_m(u^m(t))<\infty$.

因此，能量等式(2)表明 u^m 在 $L^\infty(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$ 中有界，$G_m(u^m)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R},L(\mathbb{R}^d))$ 中有界. 注意到

$$|g_m(y)|^{2d/(d+2s)} \leqslant \frac{2d}{d-2s} G_m(y), \quad \forall y \in \mathbb{C}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

结合 $G_m(u^m)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}^d))$ 中有界可得 $g_m(u^m)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}, L^{2d/(d+2s)}(\mathbb{R}^d))$ 中有界. 由 Sobolev 嵌入定理 $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^{2d/(d-2s)}(\mathbb{R}^d)$ 知, $L^{2d/(d+2s)}(\mathbb{R}^d) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, 再结合式(6)可得 u_t^m 在 $L^\infty(\mathbb{R}, H^{-s}(\mathbb{R}^d))$ 中有界.

2) 证明弱解的存在性. 根据 u^m 在 $L^\infty(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ 中有界和 u_t^m 在 $L^\infty(\mathbb{R}, H^{-s}(\mathbb{R}^d))$ 中有界可知, 对序列 u^m 利用引理4, 有 $u \in L^\infty(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$, 其中 u 为 u^m 的极限. 由引理4中性质1)和2)可得当 $m\to\infty$ 时, 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 中有 $u^m(t) \rightharpoonup u(t)$, 并存在子列 m_k, 使得 $u^{m_k}(t,x) \to u(t,x)$ 关于 $x \in \mathbb{R}^d$ 几乎处处成立. 根据 Fatou 引理可得

$$E(u(t)) \leqslant \liminf_{m\to\infty} E(u^m(t)) = \lim_{m\to\infty} E_m(u^m(t)) = \lim_{m\to\infty} E_m(u_0) = E(u_0),$$

因此能量不等式 $E(u(t)) \leqslant E(u_0)$ 成立.

由引理4中性质1)得 $u^m(0) \rightharpoonup u(0)$, 再结合弱极限的唯一性得 $u(0)=u_0$. 根据方程(6)可知, 对 $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 和 $\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{i}u_t^m + D^{2s}u^m + g_m(u^m), \psi \rangle_{\mathscr{D}';\mathscr{D}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

根据分部积分公式得

$$\int_{\mathbb{R}} (-\langle \mathrm{i}u^m, \psi \rangle \varphi'(t) + \langle u^m, D^{2s}\psi \rangle \varphi(t))\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} g_m(u^m)\psi\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \tag{9}$$

由 u^m 在 $L^\infty(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ 中有界及引理4中性质1)可知, 当 $m\to\infty$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}} (-\langle \mathrm{i}u^m, \psi \rangle \varphi'(t) + \langle u^m, D^{2s}\psi \rangle \varphi(t))\,\mathrm{d}t \to \int_{\mathbb{R}} (-\langle iu, \psi \rangle \varphi'(t) + \langle u, D^{2s}\psi \rangle \varphi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

因为测试函数 φ, ψ 有紧支集, 所以函数 $h_m(t,x) = g_m(u^m)\psi(x)\varphi(t)$ 有紧支集. 由 $g_m(u^m)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}, L^{2d/(d+2s)}(\mathbb{R}^d))$ 中有界可知, h_m 在空间 $L^{2d/(d+2s)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ 中有界. 由引理4中性质3)可知 $h_m \to -|u|^{4s/(d-2s)}u\psi\varphi$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 中几乎处处成立. 因为 h_m 有紧支集, 因此根据引理2可得 $h_m \to -|u|^{4s/(d-2s)}u\psi\varphi$ 在 $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ 中成立. 由式(9)和(10)可得

$$\int_{\mathbb{R}} (-\langle \mathrm{i}u, \psi \rangle \varphi'(t) + \langle u, D^{2s}\psi \rangle \varphi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{4s/(d-2s)} u\psi\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

进一步有

$$\int_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{i}u_t + D^{2s}u - |u|^{4s/(d-2s)}u, \psi \rangle_{\mathscr{D}';\mathscr{D}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

再结合 $u \in L^\infty(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$, 可得 $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}, H^{-s}(\mathbb{R}^d))$ 且 u 在分布意义下满足方程(1).

对方程(1)两端同乘 $\bar{u}$ 得,

$$\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{i}u_t + D^{2s}u - |u|^{4s/(d-2s)}u)\bar{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

故有

$$\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{i}u_t\bar{u} + D^s u D^s \bar{u})\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{i}u_t\bar{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

从而

$$\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^d} u_t\bar{u}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (|u|^2)_t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2\,\mathrm{d}x\right)_t = 0,$$

因此 $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ 为与时间无关的常数. 由于在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中当 $u^m \to u$ 时, 有 $\lim\limits_{m\to\infty} \|u^m\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, 故

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

参 考 文 献

[1] ABDELRAHMAN M A E, HASSAN S Z, INC M. The Coupled Nonlinear Schrödinger-Type Equations [J].

Modern Physics Letters B, 2020, 34(6): 2050078-1-2050078-17.
[2] TRIKI H, WAZWAZ A M. Soliton Solutions of the Cubic-Quintic Nonlinear Schrödinger Equation with Variable Coefficients [J]. Romanian Journal of Physics, 2016, 61(3/4): 360-366.
[3] WAZWAZ A M. Bright and Dark Optical Solitons for (2+1)-Dimensional Schrödinger (NLS) Equations in the Anomalous Dispersion Regimes and the Normal Dispersive Regimes [J]. Optik, 2019, 192: 162948-1-162948-5.
[4] CAZENAVE T. Semilinear Schrödinger Equations [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003: 1-323.
[5] 黄建华，辛杰，沈天龙. 分数阶偏微分方程的动力学 [M]. 北京：科学出版社，2017：1-465.（HUANG J H, XIN J, SHEN T L. Dynamics of Fractional Partial Differential Equations [M]. Beijing: Science Press, 2017: 1-465.）
[6] EVANS L C. Partial Differential Equations [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997: 1-662.
[7] 苗长兴. 偏微分方程的调和分析方法简介 [J]. 数学进展，2007，36(6)：641-671.（MIAO C X. The Introduction to Harmonic Analysis Method for Partial Differential Equations [J]. Advances in Mathematics, 2007, 36(6): 641-671.）
[8] ZHU S H. Existence of Stable Standing Waves for the Fractional Schrödinger Equations with Combined Nonlinearities [J]. Journal of Evolution Equations, 2017, 17(3): 1003-1021.
[9] SUN C M, WANG H, YAO X H, et al. Scattering Below Ground State of Focusing Fractional Nonlinear Schrödinger Equation with Radial Data [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2018, 38(4): 2207-2228.
[10] HWANG G. Well-Posedness and Scattering for the Critical Fractional Schrödinger Equations [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 2020, 63(2): 231-245.
[11] MIAO C X, YUAN B Q, ZHANG B. Well-Posedness of the Cauchy Problem for the Fractional Power Dissipative Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications, 2008, 68(3): 461-484.
[12] GUO Z H, SIRE Y, WANG Y Z, et al. On the Energy-Critical Fractional Schröinger Equation in the Radial Case [J]. Dynamics of Partial Differential Equations, 2018, 15(4): 265-282.
[13] GUO B L, HUO Z H. Global Well-Posedness for the Fractional Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Communications in Partial Differential Equations, 2011, 36(2): 247-255.
[14] SHU J, LI L Y, HUANG X, et al. Limiting Behavior of Fractional Stochastic Integro-Differential Equations on Unbounded Domains [J]. Mathematical Control and Related Fields, 2021, 11(4): 715-737.
[15] CHO Y, HWANG G, OZAWA T. On the Focusing Energy-Critical Fractional Nonlinear Schrödnger Equations [J]. Advances in Differential Equations, 2018, 23(3/4): 161-192.
[16] CHO Y, HWANG G, SHIM Y S. Energy Concentration of the Focusing Energy-Critical fNLS [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 437(1): 310-329.
[17] MIAO C X, XU G X, ZHAO L F. Global Well-Posedness and Scattering for the Focusing Energy-Critical Nonlinear Schrödinger Equations of Fourth Order in the Radial Case [J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(9): 3715-3749.

（责任编辑：李　琦）