doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023272

Stackelberg 微分博弈下的鲁棒最优投资-再保险问题

颜炳文[1]，陈　密[1,2]，刘海燕[1,2]
（1. 福建师范大学 数学与统计学院，福州 350117；2. 福建省分析数学及应用重点实验室，福州 350117）

摘要： 考虑一个以模糊厌恶再保险公司为领导者，模糊中立保险公司为追随者的 Stackelberg 随机微分博弈问题．通过求解拓展的 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程组，给出时间一致性均值-方差准则下的鲁棒最优投资-再保险策略以及相应的值函数．最后，通过数值例子和敏感性分析说明最优策略与主要参数之间的关系．

关键词： 比例再保险；常系数方差弹性模型；Stackelberg 微分博弈；时间一致性均值-方差框架；模糊厌恶

中图分类号： O211.6　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)02-0273-12

Robust Optimal Investment-Reinsurance Problems under Stackelberg Differential Game

YAN Bingwen[1], CHEN Mi[1,2], LIU Haiyan[1,2]
(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Fujian Normal University*, *Fuzhou* 350117, *China*;
2. *Fujian Provincial Key Laboratory of Mathematical Analysis and Applications*, *Fuzhou* 350117, *China*)

Abstract: We considered a Stackelberg stochastic differential game problem with an ambiguity-averse reinsurance company as the leader and an ambiguity-neutral insurance company as the follower. By solving the extended HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) equation systems, we gave the robust optimal investment-reinsurance strategies and the corresponding value function under the time-consistent mean-variance criterion. Finally, we gave some numerical examples and sensitivity analyses to illustrate the relationship between the optimal strategies and the main parameters.

Keywords: proportion reinsurance; constant coefficient variance elasticity model; Stackelberg differential game; time-consistent mean-variance framework; ambiguity aversion

保险公司为获取更大的收益和转移部分风险，通常选择将盈余投资金融市场和与再保险公司签订再保险合同使价值目标达到最大化．通过随机控制理论研究保险公司的最优投资-再保险问题已成为精算领域的热门课题之一，对不同目标下的投资和再保险优化问题研究目前已有很多成果[1-8]．

现有保险精算研究大多数只基于保险公司的角度研究最优投资-再保险问题，但再保险合同的拟定涉及保险公司和再保险公司双方的利益，再保险公司对再保险合同的态度也有不可忽视的作用．

收稿日期： 2023-06-28．　**网络首发日期：** 2024-03-02．

第一作者简介： 颜炳文（1998—），男，汉族，硕士研究生，从事保险精算的研究，E-mail：ybw1112@163.com．**通信作者简介：** 刘海燕（1986—），女，汉族，博士，副教授，从事保险精算的研究，E-mail：rain6397@163.com．

基金项目： 国家自然科学基金（批准号：11701087）和福建省自然科学基金（批准号：2023J01537；2023J01538）．

网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240228.1502.002．

因此，再保险公司的安全负荷不应只简单地设定为一个常数，而应该是一个随机再保费策略 $\eta(t)$. 文献[9]在指数效用最大化准则下提出了 Stackelberg 微分再保险博弈模型，即再保险公司作为博弈的领导者率先行动，保险公司作为追随者做出反应. 文献[10]研究了时间一致性均值-方差框架下的最优再保险和保费策略，采用在 Stackelberg 博弈中嵌入子 Nash 均衡博弈的思想处理时间不一致的最优再保险问题.

现实生活中，保险公司可能比再保险公司有更多关于索赔过程的信息，再保险公司无法判断保险索赔的真实性，对再保险合同产生模糊厌恶的态度. 因此，在设计再保险合同时应考虑信息不对称导致的模型不确定性影响. 目前，模型不确定性已经得到了广泛的认可和应用[11-13]，其中文献[11]提出的鲁棒随机控制理论是解决模型不确定性问题的最常用方法.

本文在时间一致的均值-方差准则下，构建以模糊厌恶再保险公司为领导者，模糊中立保险公司为追随者的 Stackelberg 微分博弈框架，同时考虑保险公司的竞争心理，保险索赔过程采用扩散近似风险模型，保费和再保费均使用期望值保费准则厘定. 与文献[9]不同，本文中保险公司和再保险公司对索赔过程信息和各自的终端盈余持不同的态度. 不同于文献[14]，本文假设保险公司和再保险公司均可投资于风险资产和无风险资产，风险资产价格由随机波动率常系数方差弹性(CEV)模型刻画，通过求解拓展的 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程组，给出模糊中立保险公司和模糊厌恶再保险公司的鲁棒均衡最优投资-再保险策略和相应的均衡值函数.

1 模型构建

假设本文所有的资产和投资都是连续可分的. 令$(\Omega,\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$是一个满足通常条件的、完备的、带流的概率空间，其中 $\mathbb{P}$ 是一个真实世界的概率测度，信息流$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$包含了 t 时刻前可获得的市场所有信息，$T>0$ 是一个固定的有限时间.

1.1 保险市场模型

假设保险公司在没有投资和再保险时的盈余过程满足 Cramér-Lundberg(CL)模型：

$$\mathrm{d}R(t)=c\mathrm{d}t-\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i,$$

其中：c 是保费率；$\sum\limits_{i=1}^{N(t)}Z_i$ 是一个复合 Poisson 过程，表示保险公司在 t 时刻的累计索赔；$N(t)$是强度为 $\lambda>0$ 的齐次 Poisson 过程，表示在时间$[0,t]$内发生的索赔次数；单次索赔额$\{Z_i,\ i=1,2,\cdots\}$是独立同分布的非负随机变量序列，且与 $N(t)$相互独立，共同分布函数为 $F(z)$，具有有限的一阶矩、二阶矩，分别记为 $E(Z),E(Z^2)$. 参考文献[14]，复合 Poisson 过程 $\sum\limits_{i=1}^{N(t)}Z_i$ 可用一个扩散模型进行近似，即

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i\approx\mu\mathrm{d}t-\sigma\mathrm{d}W_0(t),$$

其中 $\mu=\lambda E(Z)$，$\sigma^2=\lambda E(Z^2)$，$W_0(t)$是一个 $\mathbb{P}$-标准布朗运动.

假设保险公司按照期望值保费准则收取保费，保费率 $c=(1+\theta)\mu$，其中 $\theta>0$ 为保险公司的安全负荷因子. 假设保险公司为转移部分保险索赔风险，向再保险公司购买比例再保险，自留水平为 $q(t)$. 假设再保险公司也采用期望值准则收取再保费，即再保险费率 $c_1(t)$为

$$c_1(t)=(1+\eta(t))(1-q(t))\mu,$$

其中 $\eta(t)$是再保险公司的相对安全负荷，表示再保险公司的再保费策略，可根据 $q(t)$的改变进行调整. 为使再保险合同对保险公司和再保险公司都具有吸引力，令 $\eta(t)\in[\eta_1,\eta_2]$，其中 η_1 和 η_2 表示再保险公司的相对安全负荷上下限，$\eta_1>\theta$，再保险合同为非廉价再保险.

1.2 金融市场模型

假设一个简化的金融市场由一个无风险资产和一个风险资产组成，保险公司和再保险公司可同时投资无风险资产和风险资产，均可以卖空风险股票，且在交易中不产生交易成本和税收. 假设无风险

资产价格过程$\{S_0(t);\ t\in[0,T]\}$满足以下常微分方程：

$$\mathrm{d}S_0(t)=r_0S_0(t)\mathrm{d}t,\qquad S_0(0)=1,$$

其中常数$r_0>0$为无风险利率. 令$W_1(t)$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$上的$\mathbb{P}$-标准布朗运动，且与$W_0(t)$相互独立. 采用随机波动率 CEV 模型[15]刻画风险股票资产价格过程$\{S(t);\ t\in[0,T]\}$，即

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)(r\mathrm{d}t+\sigma_1S^{\beta}(t)\mathrm{d}W_1(t)),\qquad S(0)=s_0>0,$$

其中$r>r_0>0$表示风险股票的平均收益率，β为常数弹性参数，$\sigma_1>0$，$\sigma_1S^{\beta}(t)$表示风险股票的瞬时波动率，当$\beta=0$时，模型简化为几何布朗运动(GBM)模型，当$\beta>0(<0)$时，瞬时波动率$\sigma_1S^{\beta}(t)$随着风险股票价格的增加(减少)而增加.

令$X(t)$和$Y(t)$分别表示保险公司和再保险公司在t时刻的盈余，假设$a_1(t)$和$a_2(t)$分别为保险公司和再保险公司投资于风险资产总额，$[X(t)-a_1(t)]$和$[Y(t)-a_2(t)]$表示对应的投资无风险资产的份额. 在考虑再保险和投资后，保险公司和再保险公司的动态盈余过程为

$$\mathrm{d}X(t)=a_1(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+[X(t)-a_1(t)]\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+c\mathrm{d}t-c_1(t)\mathrm{d}t-q(t)\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i,$$

$$\mathrm{d}Y(t)=a_2(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+[Y(t)-a_2(t)]\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+c_1(t)\mathrm{d}t-(1-q(t))\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i.$$

因此，保险公司的盈余过程$X(t)$满足以下随机微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}X(t)=[r_0X(t)+(r-r_0)a_1(t)+(\theta+\eta(t))\mu+q(t)\eta(t)\mu]\mathrm{d}t+\\ \qquad\qquad q(t)\sigma\mathrm{d}W_0(t)+a_1(t)\sigma_1S^{\beta}(t)\mathrm{d}W_1(t),\\ X(0)=x.\end{cases}\tag{1}$$

再保险公司的盈余过程$Y(t)$满足以下随机微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y(t)=[r_0Y(t)+(r-r_0)a_2(t)+(1-q(t))\eta(t)\mu]\mathrm{d}t+\\ \qquad\qquad (1-q(t))\sigma\mathrm{d}W_0(t)+a_2(t)\sigma_1S^{\beta}(t)\mathrm{d}W_1(t),\\ Y(0)=y.\end{cases}\tag{2}$$

1.3　Stackelberg 随机微分博弈

本文考虑保险公司和再保险公司之间的 Stackelberg 随机微分博弈模型，不同于一般的 Nash 均衡博弈，该模型通过顺序求解领导者和追随者的优化问题达到 Stackelberg 均衡，考虑到再保险公司在再保险市场的垄断地位，本文把再保险公司作为博弈的领导者，保险公司作为追随者考虑 Stackelberg 随机微分博弈.

参考文献[16]，保险公司作为 Stackelberg 随机微分博弈的追随者，财富远低于领导者再保险公司，为提升公司的竞争力，保险公司不仅关心自身的财富，而且关注与再保险公司之间的盈余差距，即保险公司希望在考虑盈余过程为$\overline{X}(t)=X(t)-kY(t)$下寻找最优投资和再保险策略最大化其目标准则. 因此，有

$$\begin{cases}\mathrm{d}\overline{X}(t)=[r_0\overline{X}(t)+(r-r_0)(a_1(t)-ka_2(t))+\theta\mu-(1+k)\eta(t)\mu+(1+k)q(t)\eta(t)\mu]\mathrm{d}t+\\ \qquad\qquad [(1+k)q(t)\sigma-k\sigma]\mathrm{d}W_0(t)+(a_1(t)-ka_2(t))\sigma_1S^{\beta}(t)\mathrm{d}W_1(t),\\ \overline{X}(0)=\overline{x},\end{cases}\tag{3}$$

其中$\overline{x}=x-ky$，$k\in[0,1]$表示保险公司对再保险公司财富差距的敏感程度，k越大表明保险公司越在意再保险公司的财富盈余. 假设保险公司和再保险公司都对最大化各自终端盈余的期望和最小化终端盈余的方差感兴趣，即最大化表达式

$$\begin{cases}J_1^{\mathbb{P}}(t,s,\overline{x},y;q(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)))=E^{\mathbb{P}}_{t,s,\overline{x},y}[\overline{X}^{\pi}(T)]-\dfrac{m_1}{2}\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}_{t,s,\overline{x},y}[\overline{X}^{\pi}(T)],\\ J_2^{\mathbb{P}}(t,s,\overline{x},y;\eta(\cdot),a_2(\cdot))=E^{\mathbb{P}}_{t,s,\overline{x},y}[Y^{\pi}(T)]-\dfrac{m_2}{2}\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}_{t,s,\overline{x},y}[Y^{\pi}(T)],\end{cases}\tag{4}$$

其中$m_i(i=1,2)$表示保险公司和再保险公司预先指定的风险厌恶系数，$E^{\mathbb{P}}_{t,s,\overline{x},y}[\cdot]$和$\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}_{t,s,\overline{x},y}[\cdot]$

表示给定 $\overline{X}(t)=\overline{x}$, $Y(t)=y$ 和 $S(t)=s$ 时关于概率测度 $\mathbb{P}$ 的条件期望和条件方差.

定义1(可容许策略) 假设投资-再保险策略

$$\pi=\{\pi(t)\}_{t\in[0,T]}=(q(t),\eta(t),a_1(t),a_2(t))_{t\in[0,T]},$$

π 为可容许策略当且仅当下列条件成立:

1) $q(t)\in[0,1]$, $\eta(t)\in[\eta_1,\eta_2]$, $\forall t\in[0,T]$;

2) π 是 $\mathscr{F}_t$-循序可测的, 且 $E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T\pi^2(t)\mathrm{d}t\right]<\infty$, 其中 $\pi^2(t)=q^2(t)+\eta^2(t)+a_1^2(t)+a_2^2(t)$;

3) $E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T a_1^2(t)S^{2\beta}(t)\mathrm{d}t\right]<\infty$, $E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T a_2^2(t)S^{2\beta}(t)\mathrm{d}t\right]<\infty$;

4) 对于 $\forall(t,s,\overline{x},y)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, 方程(1)和(2)存在唯一强解 $\overline{X}^{\pi}(t)_{t\in[0,T]}$ 和 $Y^{\pi}(t)_{t\in[0,T]}$, 使得 $E^{\mathbb{P}}[\sup\limits_{t\in[0,T]}|\overline{X}^{\pi}(t)|^2]<\infty$ 和 $E^{\mathbb{P}}[\sup\limits_{t\in[0,T]}|Y^{\pi}(t)|^2]<\infty$.

令 Π 为保险公司和再保险公司的可容许投资-再保险策略的集合. 参考文献[9], 求解 Stackelberg 微分博弈基于逆向归纳的思想, 依次解决领导者(再保险公司)和追随者(保险公司)的优化问题, 具体步骤如下:

步骤1) 领导者(再保险公司)首先设定可容许的投资-再保险策略 $(\eta(\cdot),a_2(\cdot))\in\Pi$, 追随者(保险公司)根据策略 $(\eta(\cdot),a_2(\cdot))$ 选择最优投资-再保险策略 $(q^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)))$, 最大化 $J_1^{\mathbb{P}}(t,s,\overline{x},y;q(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)))$;

步骤2) 领导者(再保险公司)在观察追随者(保险公司)做出的最优决策后, 求解优化问题最大化回报函数 $J_2^{\mathbb{P}}(t,s,\overline{x},y;q^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot),\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)))$, 确定最优投资再保险策略 $(\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))$;

步骤3) 追随者(保险公司)接受领导者(再保险公司)给定的再保险保费, 最后调整其最优投资-再保险策略 $(q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)))$.

1.4 再保险公司模型的不确定性

在前面考虑的模型中, 假设再保险公司和保险公司都是模糊中立的, 但在通常情况下, 保险公司比再保险公司有更多关于保单索赔过程的信息, 再保险公司无法推断保险公司提供的索赔过程信息是否为真实信息, 对索赔过程的漂移项参数产生怀疑, 为保护自身免受极端损失, 再保险公司选择考虑在一组与概率测度 $\mathbb{P}$ 等价的备选概率测度 $\mathbb{Q}$ 下解决优化问题. 定义备选测度 $\mathbb{Q}$ 的集合 $\mathscr{Q}=\{\mathbb{Q}|\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}\}$. 假设当 $t>0$ 时, 存在适应于 $\mathscr{F}_t$ 的随机过程 $\{\phi(t)\}_{t\geqslant0}$ 和常数 $K_{\mathbb{Q}}$, 使得 $|\phi(t)|<K_{\mathbb{Q}}$ 和 $E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\phi^2(s)\mathrm{d}s\right\}\right]<\infty$. 令 Φ 为全体满足上述条件的 $\phi(t)$ 的集合, 备选测度 $\mathbb{Q}$ 满足以下 Girsanov 变换:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}}\right|_{\mathscr{F}_t}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\phi^2(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}W(s)\right\},\tag{5}$$

其中 $\{\phi(t)\}_{t\geqslant0}$ 是一个漂移算子, 表示再保险公司对保险公司提供的索赔过程信息所持的态度, 当 $\phi(t)=0$ 时, $\mathbb{Q}=\mathbb{P}$, 再保险人为模糊中性. 假设 $W_0^{\mathbb{Q}}(t)$ 是完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{Q})$ 上的一个与 $W_1(t)$ 相互独立的 $\mathbb{Q}$-标准布朗运动, 根据 Girsanov 定理, 有

$$\mathrm{d}W_0^{\mathbb{Q}}(t)=\mathrm{d}W_0(t)-\phi(t)\mathrm{d}t.\tag{6}$$

因此, 再保险公司在测度 $\mathbb{Q}$ 下的盈余过程 $Y(t)$ 为

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y(t)=[r_0Y^{\pi}(t)+(r-r_0)a_2(t)+(1-q(t))\eta(t)\mu+(1-q(t))\phi\sigma]\mathrm{d}t+\\\qquad(1-q(t))\sigma\mathrm{d}W_0^{\mathbb{Q}}(t)+a_2(t)\sigma_1S^{\beta}(t)\mathrm{d}W_1(t),\\Y(0)=y.\end{cases}\tag{7}$$

绝大多数再保险公司不喜欢模糊不清的信息, 希望能防范极端损失, 在最坏的情况下寻求最优再保险策略, 用相对熵表示与参考模型测度 $\mathbb{P}$ 的任何偏差的惩罚, 该惩罚随着偏差的增加而增加. 在时间 t, 测度 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{P}$ 的相对熵定义为

$$h(\mathbb{Q}_t\,|\,\mathbb{P}_t)=E^{\mathbb{Q}}_{t,s,\bar{x},y}\left(\ln\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_t}\right)=E^{\mathbb{Q}}_{t,s,\bar{x},y}\left(\frac{1}{2}\int_0^t\phi^2(s)\mathrm{d}s\right).\tag{8}$$

因此，模糊厌恶再保险公司的性能函数为

$$J_2^{\mathbb{Q}}(t,s,\bar{x},y;\eta(\cdot),a_2(\cdot))=E^{\mathbb{Q}}_{t,s,\bar{x},y}[Y^{\pi}(T)]-\frac{m_2}{2}\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}_{t,s,\bar{x},y}[Y^{\pi}(T)]+\frac{1}{2\epsilon}E^{\mathbb{Q}}_{t,s,\bar{x},y}\left[\int_0^T\phi^2(s)\mathrm{d}s\right].\tag{9}$$

式(9)中第三项为惩罚项，表示对参考模型偏差的惩罚，$\epsilon>0$ 表示再保险公司的模糊厌恶水平，ϵ 越大表示模糊厌恶再保险公司对参考模型的信任度越低．当 $\epsilon=0$ 时，再保险公司认为参考模型测度 $\mathbb{P}$ 就是真实模型，最优备选测度 $\mathbb{Q}^*=\mathbb{P}$，此时再保险公司是模糊中立的，因此 $\phi(t)=0$，惩罚项为 0 并非 ∞.

1.5　扩展的 HJB 方程组

求解 Stackelberg 微分博弈框架下的优化问题(4)和(9)时，需注意在均值-方差优化准则下的时间不一致性问题，这是因为方差项中存在条件期望 $E^{\mathbb{P}}_{t,s,\bar{x},y}[\bar{X}^{\pi}(T)]$和 $E^{\mathbb{P}}_{t,s,\bar{x},y}[Y^{\pi}(T)]$的非线性项，无法满足 Bellman 最优性定理成立条件，一般的动态规划方法不能直接使用．参考文献[10]中解决时间不一致性问题的方法，把问题视为一个非合作博弈，解决优化问题(4)即转化为寻找子博弈的 Nash 均衡点.

定义 2(**子博弈的 Nash 均衡策略**)　对任意固定的初始状态$(t,s,\bar{x},y)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$，给定$(\eta(\cdot),a_2(\cdot))\in\Pi$，模糊中立保险公司的最优策略为$(q^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)))$，定义以下 ε 策略：

$$\begin{cases}q^{\varepsilon}(s)=\tilde{q}(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t,t+\varepsilon]}+q^*(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t+\varepsilon,T]},\\ a_1^{\varepsilon}(s)=\tilde{a}_1(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t,t+\varepsilon]}+a_1^*(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t+\varepsilon,T]}.\end{cases}$$

对任意的$(\tilde{q},\tilde{a}_1)\in\Pi$，如果有

$$\liminf_{\varepsilon\to0_+}\frac{J_1^{\mathbb{P}}(t,s,\bar{x},y;q^*,a_1^*)-J_1^{\mathbb{P}}(t,s,\bar{x},y;q^{\varepsilon},a_1^{\varepsilon})}{\varepsilon}\geqslant0$$

成立，则$(q^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)))$为候选均衡策略．定义以下 ε 策略：

$$\begin{cases}\eta^{\varepsilon}(s)=\tilde{\eta}(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t,t+\varepsilon]}+\eta^*(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t+\varepsilon,T]},\\ a_2^{\varepsilon}(s)=\tilde{a}_2(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t,t+\varepsilon]}+a_2^*(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t+\varepsilon,T]},\\ \phi^{\varepsilon}(s)=\tilde{\phi}(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t,t+\varepsilon]}+\phi^*(s)\cdot\mathrm{I\!I}_{s\in[t+\varepsilon,T]}.\end{cases}$$

如果对任意的$(\tilde{\eta},\tilde{a}_2,\tilde{\phi})\in\Pi\times\Phi$，有

$$\liminf_{\varepsilon\to0_+}\frac{J_2^{\mathbb{Q}^*}(t,s,\bar{x},y;q^*,a_1^*,\eta^*,a_2^*)-J_2^{\mathbb{Q}^*}(t,s,\bar{x},y;q^*,a_1^*,\eta^{\varepsilon},a_2^{\varepsilon})}{\varepsilon}\geqslant0,$$

$$\limsup_{\varepsilon\to0_+}\frac{J_2^{\mathbb{Q}^*}(t,s,\bar{x},y;q^*,a_1^*,\eta^{\varepsilon},a_2^{\varepsilon})-J_2^{\mathbb{Q}^{\varepsilon}}(t,s,\bar{x},y;q^*,a_1^*,\eta^{\varepsilon},a_2^{\varepsilon})}{\varepsilon}\leqslant0$$

成立，则$(q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))$为子博弈 Nash 均衡策略.

根据文献 [14]中命题 2.1，当风险厌恶参数 ϵ 为恒定常数时，领导者(模糊厌恶再保险公司)和追随者(模糊中立保险公司)在均值-方差准则下的最优投资-再保险策略和值函数与博弈对手的财富水平无关．因此，基于模糊中立保险公司和模糊厌恶再保险公司的性能函数(4)和(9)，给出在 Stackelberg 微分博弈下的鲁棒 Stackelberg 均衡策略和值函数的定义.

定义 3(**鲁棒 Stackelberg 均衡策略和值函数**)　模糊中立保险公司的候选鲁棒值函数为

$$\begin{aligned}&V_1(t,s,\bar{x};q^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)))=\\&\qquad J_1^{\mathbb{P}}(t,s,\bar{x};q^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot))),\end{aligned}\tag{10}$$

模糊厌恶再保险公司的鲁棒值函数为

$$\begin{aligned}&V_2(t,s,y)=J_2^{\mathbb{Q}^*}(t,s,y;q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))=\\&\qquad\sup_{\eta\in\Pi}\sup_{a_2\in\Pi}\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}J_2^{\mathbb{P}}(t,s,y;q(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot)),a_1(\cdot,\eta(\cdot),a_2(\cdot))),\end{aligned}\tag{11}$$

模糊中立保险公司的鲁棒值函数为

$$\begin{aligned}V_1(t,s,\bar{x}) &= V_1(t,s,\bar{x};q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))) = \\ &J_1^{\mathbb{P}}(t,s,\bar{x};q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))),\end{aligned}\tag{12}$$

则$(q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))$为鲁棒Stackelberg均衡投资-再保险策略.

对任意函数$\varphi_1\in C^{1,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$和$\varphi_2\in C^{1,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$，定义两个无穷小生成元$\mathscr{L}^{q,a_1}$和$\mathscr{L}^{\eta,a_2}$如下：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{q,a_1}\varphi_1(t,s,\bar{x}) = &\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + [r_0\bar{x} + (r-r_0)(a_1-ka_2) + \theta\mu - (1+k)\eta\mu + (1+k)q\eta\mu]\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{x}} + \\ &\frac{1}{2}[(a_1-ka_2)^2\sigma_1^2 s^{2\beta} + ((1+k)q\sigma - k\sigma)^2]\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\bar{x}^2} + sr\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} + \\ &\frac{1}{2}\sigma_1^2 s^{2\beta+2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial s^2} + (a_1-ka_2)\sigma_1^2 s^{2\beta+1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\bar{x}\partial s},\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\eta,a_2}\varphi_2(t,s,y) = &\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + [r_0 y + (r-r_0)a_2 + (1-q)\eta\mu + (1-q)\phi\sigma]\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + a_2\sigma_1^2 s^{2\beta+1}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y\partial s} + \\ &\frac{1}{2}[a_2^2\sigma_1^2 s^{2\beta} + (1-q)^2\sigma^2]\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} + sr\frac{\partial\varphi_2}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 s^{2\beta+2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial s^2}.\end{aligned}\tag{14}$$

下面给出在Stackelberg微分博弈下的拓展的HJB方程组和验证定理.

定义4(拓展的HJB方程组) 模糊中立保险公司优化问题的非鲁棒拓展HJB方程组为

$$\begin{cases}\mathscr{L}^{q^*,a_1^*}V_1(t,s,\bar{x}) - \dfrac{m_1}{2}\mathscr{L}^{q^*,a_1^*}[g_1(t,s,\bar{x})]^2 + m_1 g_1(t,s,\bar{x})\cdot\mathscr{L}^{q^*,a_1^*}g_1(t,s,\bar{x}) = 0,\\ \mathscr{L}^{q^*,a_1^*}g_1(t,s,\bar{x}) = 0,\\ V_1(T,s,\bar{x}) = \bar{x},\\ g_1(T,s,\bar{x}) = \bar{x}.\end{cases}\tag{15}$$

模糊厌恶再保险公司的优化问题的鲁棒拓展HJB方程组为

$$\begin{cases}\inf\limits_{\phi\in\Phi}\mathscr{L}^{\eta^*,a_2^*}V_2(t,s,y) - \dfrac{m_2}{2}\mathscr{L}^{\eta^*,a_2^*}[g_2(t,s,y)]^2 + \\ \qquad m_2 g_2(t,s,y)\cdot\mathscr{L}^{\eta^*,a_2^*}g_2(t,s,y) + \dfrac{\phi^2(t)}{2\epsilon} = 0,\\ \mathscr{L}^{\eta^*,a_2^*}g_2(t,s,y) = 0,\\ V_2(T,s,y) = y,\\ g_2(T,s,y) = y.\end{cases}\tag{16}$$

定理1(验证定理) 假设$V_1(t,s,\bar{x}),V_2(t,s,y),g_1(t,s,\bar{x})$，$g_2(t,s,y)$是拓展的HJB方程组(15)和(16)的解，则$(q^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),a_1^*(\cdot,\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot)),\eta^*(\cdot),a_2^*(\cdot))$为鲁棒Stackelberg均衡策略，$V_1(t,s,\bar{x})$和$V_2(t,s,y)$为对应的均衡值函数.

证明：可参考文献[17]中定理5.2的证明，故略.

2 模型求解

下面基于2.3节的3个步骤求解拓展的HJB方程组(15)和(16).

步骤1) 求解模糊中立保险公司的候选最优策略$(q^*(t,\eta(t),a_2(t)),a_1^*(t,\eta(t),a_2(t)))$和值函数$V_1(t,s,\bar{x};q^*(t,\eta(t),a_2(t)),a_1^*(t,\eta(t),a_2(t)))$. 对于拓展的HJB方程组(12)，猜解如下：

$$\begin{cases}V_1(t,s,\bar{x};q(t,\eta(t),a_2(t)),a_1(t,\eta(t),a_2(t))) = \bar{x}e^{r_0(T-t)} + B(t)s^{-2\beta} + C(t),\\ g_1(t,s,\bar{x};q(t,\eta(t),a_2(t)),a_1(t,\eta(t),a_2(t))) = \bar{x}e^{r_0(T-t)} + b(t)s^{-2\beta} + c(t),\end{cases}\tag{17}$$

满足边界条件

$$B(T) = C(T) = b(T) = c(T) = 0.$$

用 B_t,C_t,b_t,c_t 表示 $B(t),C(t),b(t),c(t)$ 关于 t 的一阶导数，$V_{1t},V_{1\bar{x}},V_{1\bar{x}\bar{x}},V_{1s},V_{1ss},V_{1\bar{x}s},g_{1t},g_{1\bar{x}}$，$g_{1\bar{x}\bar{x}}$，$g_{1s},g_{1ss},g_{1\bar{x}s}$ 表示 V_1 和 g_1 关于 $t,s,\bar{x}$ 的一阶、二阶偏导数，经过简单计算，有

$$\begin{cases} V_{1t}=-r_0\bar{x}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+B_ts^{-2\beta}+C_t, \quad V_{1\bar{x}}=\mathrm{e}^{r_0(T-t)}, \quad V_{1\bar{x}\bar{x}}=V_{1\bar{x}s}=0, \\ V_{1s}=-2\beta s^{-2\beta-1}B, \quad V_{1ss}=2\beta(2\beta+1)s^{-2\beta-2}B, \\ g_{1t}=-r_0\bar{x}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+b_ts^{-2\beta}+c_t, \quad g_{1\bar{x}}=\mathrm{e}^{r_0(T-t)}, \quad g_{1\bar{x}\bar{x}}=g_{1\bar{x}s}=0, \\ g_{1s}=-2\beta s^{-2\beta-1}b, \quad g_{1ss}=2\beta(2\beta+1)s^{-2\beta-2}b. \end{cases} \tag{18}$$

将式(18)代入式(15)的第一式中化简后可得

$$\begin{aligned} &B_ts^{-2\beta}+C_t+\sup_{q\in\Pi}\sup_{a_1\in\Pi}\{[(r-r_0)(a_1-ka_2)+\theta\mu-(1+k)\eta\mu+(1+k)q\eta\mu+ \\ &\quad 2m_1\sigma_1^2\beta(a_1-ka_2)b]\mathrm{e}^{r_0(T-t)}-2r\beta s^{-2\beta}B+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2B-2m_1\sigma_1^2\beta^2s^{-2\beta}b^2- \\ &\quad \frac{m_1}{2}[(a_1-ka_2)^2\sigma_1^2s^{2\beta}+((1+k)q\sigma-k\sigma)^2]\mathrm{e}^{2r_0(T-t)}\}=0. \end{aligned} \tag{19}$$

根据一阶最优性条件，得到候选最优再保险和投资策略为

$$\hat{q}(t,\eta(t),a_2(t))=\frac{\eta(t)\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}+\frac{k}{1+k}, \tag{20}$$

$$a_1^*(t,\eta(t),a_2(t))=\frac{1}{m_1\sigma_1^2s^{2\beta}}(r-r_0+2m_1\sigma_1\beta b(t))\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}+ka_2(t). \tag{21}$$

将式(20)，(21)代入式(15)的第二式得

$$\begin{aligned} &b_ts^{-2\beta}+c_t+\frac{r-r_0}{m_1\sigma_1^2}(r-r_0+2m_1\sigma_1\beta b)s^{-2\beta}+(\theta-\eta)\mu\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+\frac{\eta^2\mu^2}{m_1\sigma^2}- \\ &\quad 2r\beta bs^{-2\beta}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2b=0. \end{aligned} \tag{22}$$

对式(22)分离带 $s^{-2\beta}$ 和不带 $s^{-2\beta}$ 的项，得到常微分方程组

$$\begin{cases} b_t+\dfrac{(r-r_0)^2}{m_1\sigma_1^2}-2r_0\beta b(t)=0, \quad b(T)=0, \\ c_t+(\theta-\eta(t))\mu\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+\dfrac{\eta^2(t)\mu^2}{m_1\sigma^2}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2b(t)=0, \quad c(T)=0, \end{cases} \tag{23}$$

解得

$$\begin{cases} b(t)=\dfrac{(r-r_0)^2}{2m_1r_0\beta\sigma_1^2}[1-\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}], \\ c(t)=\displaystyle\int_t^T\left[(\theta-\eta(s))\mu\mathrm{e}^{r_0(T-s)}+\frac{\eta^2(s)\mu^2}{m_1\sigma^2}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2b(s)\right]\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{24}$$

将式(20)，(21)，(24)代入式(19)中化简并分离带 $s^{-2\beta}$ 和不带 $s^{-2\beta}$ 的项，可得

$$\begin{cases} B_t+\dfrac{(r-r_0)^2}{2m_1\sigma_1^2}-2(r-r_0)\beta b(t)-2r\beta B(t)=0, \quad B(T)=0, \\ C_t+(\theta-\eta(t))\mu\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+\dfrac{\eta^2(t)\mu^2}{2m_1\sigma^2}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2B(t)=0, \quad C(T)=0, \end{cases} \tag{25}$$

解得

$$\begin{cases} B(t)=\dfrac{(r-r_0)^2}{2m_1r_0\beta\sigma_1^2}[\mathrm{e}^{-2r\beta(T-t)}-\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}]-\dfrac{(r-r_0)^3}{2m_1r_0r\beta\sigma_1^2}[\mathrm{e}^{-2\beta(T-t)}-1]- \\ \qquad \dfrac{(r-r_0)^2}{2m_1r\beta\sigma_1^2}[\mathrm{e}^{-2r\beta(T-t)}-1], \\ C(t)=\displaystyle\int_t^T\left[(\theta-\eta(s))\mu\mathrm{e}^{r_0(T-s)}+\frac{\eta^2(s)\mu^2}{2m_1\sigma^2}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2B(s)\right]\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{26}$$

综合上述结果，可得模糊中立保险公司的候选最优投资-再保险策略和值函数为

$$\begin{cases} q^*(t,\eta(t),a_2(t))=\min\left\{\dfrac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta(t)\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}+\dfrac{k}{1+k},1\right\}, \\ a_1{}^*(t,\eta(t),a_2(t))=\dfrac{r^2-rr_0-(r-r_0)^2\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}}{m_1r_0\sigma_1^2s^{2\beta}}\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}+ka_2(t), \\ V_1(t,s,\bar{x};q^*(t,\eta(t),a_2(t)),a_1^*(t,\eta(t),a_2(t)))=\bar{x}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+B(t)s^{-2\beta}+C(t), \end{cases} \tag{27}$$

其中 $B(t)$,$C(t)$由式(26)给出. 为使再保险合同对保险公司具有吸引力，下面均假设再保险公司的再保费策略上限 $\eta_2 \leqslant \frac{m_1\sigma^2}{\mu}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}$ 成立.

步骤 2）下面求解鲁棒的拓展 HJB 方程组(15)，得到模糊厌恶再保险公司的鲁棒最优投资-保险策略$(\eta^*(t), a_2^*(t))$和值函数 $V_2(t,s,y)$. 参考步骤 1)的方法，假设：

$$\begin{cases} V_2(t,s,y)=y\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+H(t)s^{-2\beta}+E(t), \\ g_2(t,s,y)=y\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+h(t)s^{-2\beta}+e(t), \end{cases} \tag{28}$$

满足边界条件 $E(T)=H(T)=e(T)=h(T)=0$. 同理，对其求偏导并将偏导数代入式(16)第一式，可得

$$\begin{aligned} &H_t s^{-2\beta}+E_t+\sup_{\eta\in\Pi}\sup_{a_2\in\Pi}\inf_{\phi\in\Phi}\Big\{[(r-r_0)a_2+(1-\hat{q})\eta\mu+(1-\hat{q})\sigma\phi+2m_2\sigma_1^2\beta a_2 h]\mathrm{e}^{r_0(T-t)}- \\ &\quad 2r\beta s^{-2\beta}H+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2 H-\frac{m_2}{2}[a_2^2\sigma_1^2 s^{2\beta}+(1-\hat{q})^2\sigma^2]\mathrm{e}^{2r_0(T-t)}- \\ &\quad 2m_2\sigma_1^2\beta^2 s^{-2\beta}h^2+\frac{\phi^2}{2\epsilon}\Big\}=0. \end{aligned} \tag{29}$$

根据一阶最小化条件，有

$$\phi^*(t)=-\epsilon(1-\hat{q})\sigma\mathrm{e}^{r_0(T-t)}. \tag{30}$$

将 $\phi^*(t)$代入式(29)，根据一阶最优性条件得

$$a_2^*(t)=\frac{1}{m_2\sigma_1^2 s^{2\beta}}(r-r_0+2m_2\sigma_1\beta h(t))\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}, \tag{31}$$

$$\hat{\eta}(t)=\frac{m_1\sigma^2(m_1(1+k)+m_2+\epsilon)}{\mu(2m_1(1+k)+m_2+\epsilon)}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}. \tag{32}$$

由于再保险保费率存在限制，因此鲁棒最优再保险保费策略为

$$\eta^*(t)=\eta_1\cdot \mathrm{II}_{\mathcal{O}_1}+\hat{\eta}(t)\cdot \mathrm{II}_{\mathcal{O}_2}+\eta_2\cdot \mathrm{II}_{\mathcal{O}_3}, \tag{33}$$

其中 $\mathcal{O}_1=\{t: \hat{\eta}(t)\leqslant\eta_1\}$，$\mathcal{O}_2=\{t: \eta_1<\hat{\eta}(t)<\eta_2\}$，$\mathcal{O}_3=\{t: \hat{\eta}(t)\geqslant\eta_2\}$.

将 $\eta^*(t)$和 $a_2^*(t)$代入式(16)中第二式得

$$\begin{aligned} &h_t s^{-2\beta}+e_t+\frac{r-r_0}{m_2\sigma_1^2}(r-r_0+2m_2\sigma_1\beta h)s^{-2\beta}+\Bigg[\eta^*\left(1-\frac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}-\frac{k}{1+k}\right)\mu- \\ &\quad \epsilon\left(1-\frac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}-\frac{k}{1+k}\right)^2\sigma^2\Bigg]\mathrm{e}^{r_0(T-t)}- \\ &\quad 2r\beta h s^{-2\beta}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2 h=0. \end{aligned} \tag{34}$$

对式(34)分离带 $s^{-2\beta}$和不带 $s^{-2\beta}$的项，求解常微分方程组得

$$\begin{cases} h(t)=\dfrac{(r-r_0)^2}{2m_2 r_0\beta\sigma_1^2}[1-\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}], \\ e(t)=\displaystyle\int_t^T\Bigg[\eta^*(s)\mu\left(1-\frac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*(s)\mathrm{e}^{-r_0(T-s)}-\frac{k}{1+k}\right)\mathrm{e}^{r_0(T-s)}- \\ \qquad \epsilon\left(1-\dfrac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*(s)\mathrm{e}^{-r_0(T-s)}-\dfrac{k}{1+k}\right)^2\sigma^2\mathrm{e}^{2r_0(T-s)}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2 h(s)\Bigg]\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{35}$$

同理，将 $\phi^*(t)$,$\eta^*(t)$,$a_2^*(t)$和式(35)代入式(29)，可得

$$\begin{cases} H(t)=\dfrac{(r-r_0)^2}{2m_2 r_0\beta\sigma_1^2}[\mathrm{e}^{-2r\beta(T-t)}-\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}]-\dfrac{(r-r_0)^3}{2m_2 r_0 r\beta\sigma_1^2}[\mathrm{e}^{-2\beta(T-t)}-1]- \\ \qquad \dfrac{(r-r_0)^2}{2m_2 r\beta\sigma_1^2}[\mathrm{e}^{-2r\beta(T-t)}-1], \\ E(t)=\displaystyle\int_t^T\Bigg[\eta^*(s)\mu\left(1-\frac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*(s)\mathrm{e}^{-r_0(T-s)}-\frac{k}{1+k}\right)\mathrm{e}^{r_0(T-s)}- \\ \qquad \dfrac{m_2+\epsilon}{2}\left(1-\dfrac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*(s)\mathrm{e}^{-r_0(T-s)}-\dfrac{k}{1+k}\right)^2\sigma^2\mathrm{e}^{2r_0(T-s)}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2 H(s)\Bigg]\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{36}$$

步骤 3）在得到模糊厌恶再保险公司的鲁棒最优投资-再保险策略后，用 $\eta^*(t), a_2^*(t)$ 替换步骤 1）中的 $\eta(t), a_2(t)$，得到 $B(t)$ 和 $C(t)$ 的最终表达式为

$$\begin{cases} B(t)=\dfrac{(r-r_0)^2}{2m_1 r_0 \beta\sigma_1^2}\left[\mathrm{e}^{-2r\beta(T-t)}-\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}\right]-\dfrac{(r-r_0)^3}{2m_1 r_0 r\beta\sigma_1^2}\left[\mathrm{e}^{-2\beta(T-t)-1}\right]- \\ \qquad \dfrac{(r-r_0)^2}{2m_1 r\beta\sigma_1^2}\left[\mathrm{e}^{-2r\beta(T-t)}-1\right], \\ C(t)=\displaystyle\int_t^T\left[(\theta-\eta^*(s))\mu\mathrm{e}^{r_0(T-s)}+\dfrac{\eta^{*2}(s)\mu^2}{2m_1\sigma^2}+\beta(2\beta+1)\sigma_1^2 B(s)\right]\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{37}$$

综上，可得：

定理 2　模糊厌恶再保险公司的鲁棒最优投资-再保险策略为

$$\begin{cases} \eta^*(t)=\eta_1\cdot \mathrm{I\!I}_{\mathcal{O}_1}+\hat{\eta}(t)\cdot \mathrm{I\!I}_{\mathcal{O}_2}+\eta_2\cdot \mathrm{I\!I}_{\mathcal{O}_3}, \\ a_2^*(t)=\dfrac{r^2-rr_0-(r-r_0)^2\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)}}{m_2 r_0\sigma_1^2 s^{2\beta}}\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}, \end{cases}$$

最差密度算子 $\phi^*(t)$ 为

$$\phi^*(t)=-\epsilon\left(1-\frac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*(t)\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}-\frac{k}{1+k}\right)\sigma\mathrm{e}^{r_0(T-t)}, \tag{38}$$

模糊中立保险公司的最优投资-再保险策略为

$$\begin{cases} q^*(t,\eta^*(t),a_2^*(t))=\dfrac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta^*(t)\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}+\dfrac{k}{1+k}, \\ a_1{}^*(t,\eta^*(t),a_2{}^*(t))=\dfrac{(m_2+km_1)(r^2-rr_0-(r-r_0)^2\mathrm{e}^{-2r_0\beta(T-t)})}{m_1 m_2 r_0\sigma_1^2 s^{2\beta}}\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}. \end{cases}$$

令 $B(t), C(t), H(t), E(t)$ 由式(37)和式(36)定义，则模糊中立保险公司和模糊厌恶再保险公司的鲁棒 Stackelberg 均衡值函数为

$$\begin{cases} V_1(t,s,\bar{x})=\bar{x}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+B(t)s^{-2\beta}+C(t), \\ V_2(t,s,y)=y\mathrm{e}^{r_0(T-t)}+H(t)s^{-2\beta}+E(t). \end{cases}$$

注 1　当 $\epsilon=0$ 时，用 $q_0^*(t), \eta_0^*(t)$ 表示保险公司和再保险公司在 $\mathcal{O}_2$ 区域的最优策略，有

$$\begin{cases} \eta_0^*(t)=\dfrac{m_1\sigma^2(m_1(1+k)+m_2)}{\mu(2m_1(1+k)+m_2)}\mathrm{e}^{r_0(T-t)}, \\ q_0^*(t)=\dfrac{\mu}{m_1\sigma^2(1+k)}\eta_0^*(t)\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}+\dfrac{k}{1+k}=\dfrac{m_1(1+k)+m_2}{(2m_1(1+k)+m_2)(1+k)}+\dfrac{k}{1+k}. \end{cases} \tag{39}$$

显然，$q^*(t)>q_0^*(t)$，$\eta^*(t)>\eta_0^*(t)$. 模糊厌恶再保险公司为保护自身免受模型不确定性的损失，收取更高的再保险价格，同时昂贵的再保险合同使保险公司减少再保险需求，不愿意为再保险公司的模糊厌恶买单. 由式(39)和式(32)可见，模糊厌恶再保险公司的最优鲁棒再保险保费策略与模糊中立再保险公司选择风险厌恶参数 $m_2+\epsilon$ 的再保险保费策略相同，但均值-方差问题下的值函数却不相等，即

$$\sup_{\eta\in\Pi}\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{E_{t,s,y}^{\mathbb{Q}}[Y^\pi(t)]-\frac{m_2}{2}\mathrm{Var}_{t,s,y}^{\mathbb{Q}}[Y^\pi(t)]+\frac{1}{2\epsilon}E_{t,s,y}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T\phi^2(t)\mathrm{d}s\right]\right\}\neq$$
$$\sup_{\eta\in\Pi}\left\{E_{t,s,y}^{\mathbb{P}}[Y^\pi(T)]-\frac{m_2+\epsilon}{2}\mathrm{Var}_{t,s,y}^{\mathbb{P}}[Y^\pi(T)]\right\}. \tag{40}$$

上述结果与文献[14]中的结果不一致，这是因为考虑再保险公司的投资策略后，ϵ 并不会影响投资策略风险厌恶参数，导致终端盈余和值函数的表达式发生变化.

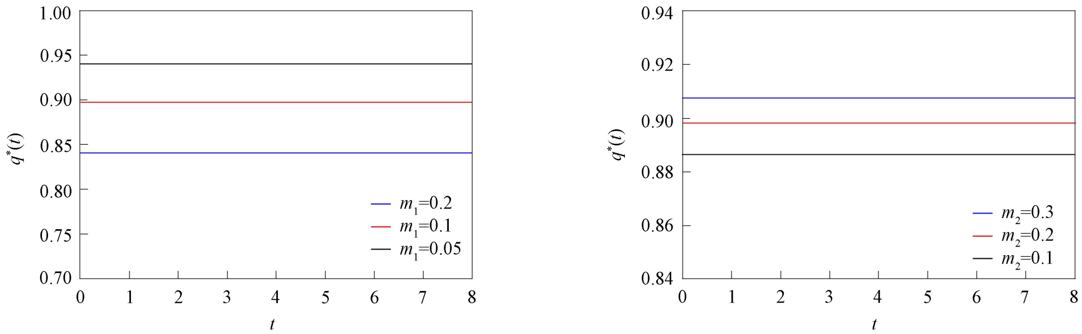
3　数值分析

下面用一些数值实例分析主要参数对定理 2 中推导出的均衡投资-再保险策略的影响，并对结果进行说明. 除特别说明外，假设各参数 $\mu=5$，$\sigma=5$，$r_0=0.1$，$r=0.2$，$s=2$，$\sigma_1=0.6$，$\beta=1.1$，$\theta=0.25$，$\eta_1=0.2$，$\eta_2=1.2$，$\epsilon=0.5$，$m_1=0.1$，$m_2=0.2$，$k=0.4$，$T=8$. 由于 $\eta^*(t)$ 在 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_3$ 中为

常数，所以本文只考虑最优策略在 $\mathcal{O}_2$ 中对主要参数的敏感性结果.

3.1 最优再保险策略的敏感性分析

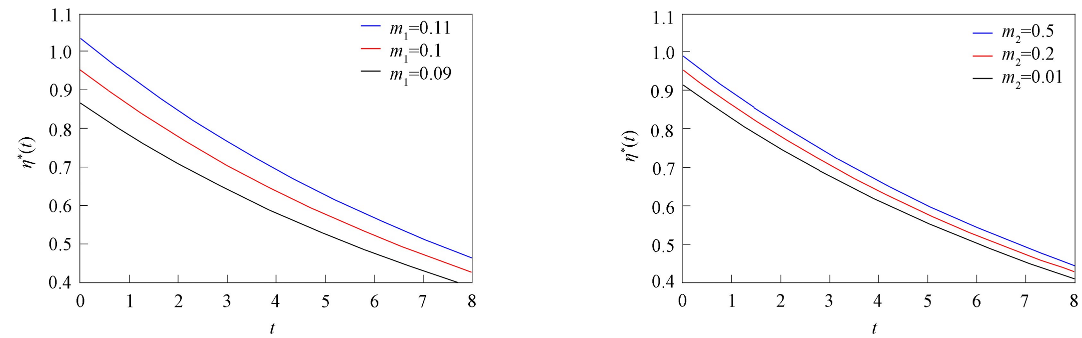
设 m_1,m_2 分别是保险公司和再保险公司的风险厌恶参数，表示各自的风险偏好，如图1和图2所示，随着 m_1 的增加，保险公司愿意将更多的保险风险转移给再保险公司，自留率 q 减小，再保险公司作为Stcakelberg微分博弈的领导者，拥有加价权，当预期再保险业务增加时提高再保险价格；当 m_2 增大时，再保险公司更倾向于增加再保险保费，保险公司不得不承担更多的保险风险.



(A) $q^*(t)$随m_1的变化 (B) $q^*(t)$随m_2的变化

图1 最优再保险策略 $q^*(t)$ 随 m_1 和 m_2 的变化曲线

Fig. 1 Variation curves of optimal reinsurance strategy $q^*(t)$ with m_1 and m_2

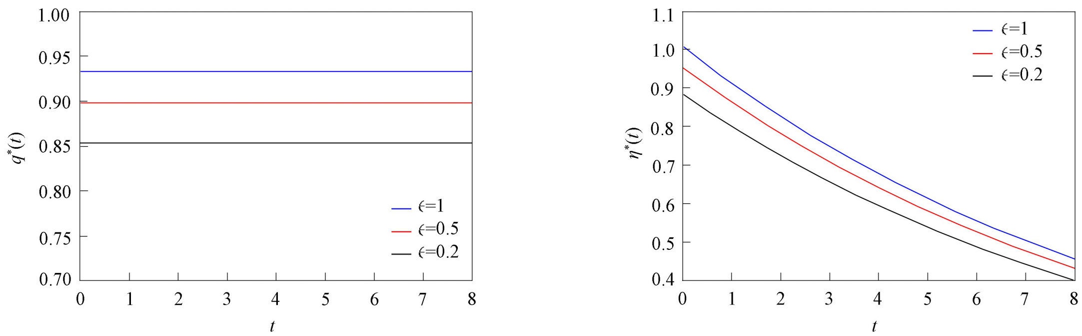


(A) $\eta^*(t)$随m_1的变化 (B) $\eta^*(t)$随m_2的变化

图2 最优再保险保费策略 $\eta^*(t)$ 随 m_1 和 m_2 的变化曲线

Fig. 2 Variation curves of optimal reinsurance premium strategy $\eta^*(t)$ with m_1 and m_2

最优再保险策略 $q^*(t)$和 $\eta^*(t)$随 ϵ 的变化曲线如图3所示. 由图3可见，随着再保险公司的模糊厌恶水平增加，对保险公司提供的保险索赔信息越不信任，越悲观，更倾向于提高再保险保费以防范模型的不确定性，保险公司减少购买再保险比例，自留水平增加.



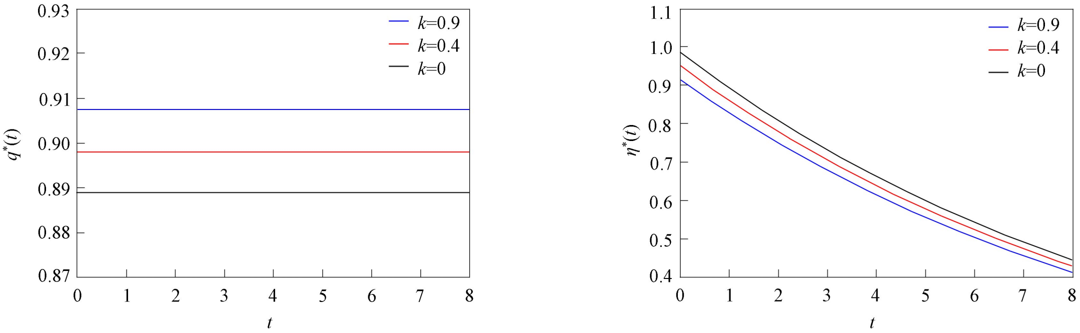
(A) $q^*(t)$随ϵ的变化 (B) $\eta^*(t)$随ϵ的变化

图3 最优再保险策略 $q^*(t)$和 $\eta^*(t)$随 ϵ 的变化曲线

Fig. 3 Variation curves of optimal reinsurance strategies $q^*(t)$ and $\eta^*(t)$ with ϵ

最优再保险策略 $q^*(t)$和 $\eta^*(t)$随 k 的变化曲线如图4所示. 由图4可见，随着敏感性参数 k 的增

加，保险公司更关注再保险公司的财富盈余，为缩小与再保险公司之间的盈余差距，愿意冒更多的风险获取保险合同的价值，保险自留比例增加，再保险公司不得不降低再保险价格吸引保险公司购买再保险.



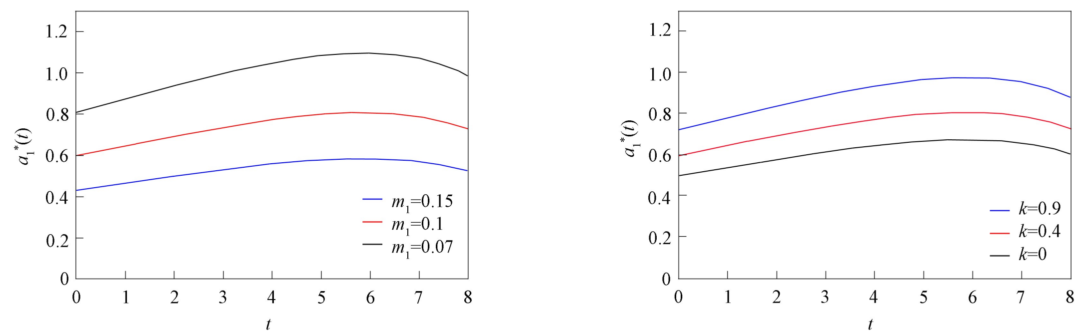
(A) $q^*(t)$随k的变化　　(B) $\eta^*(t)$随k的变化

图 4　最优再保险策略 $q^*(t)$和 $\eta^*(t)$随 k 的变化曲线

Fig. 4　Variation curves of optimal reinsurance strategies $q^*(t)$ and $\eta^*(t)$ with k

3.2　最优投资策略的敏感性分析

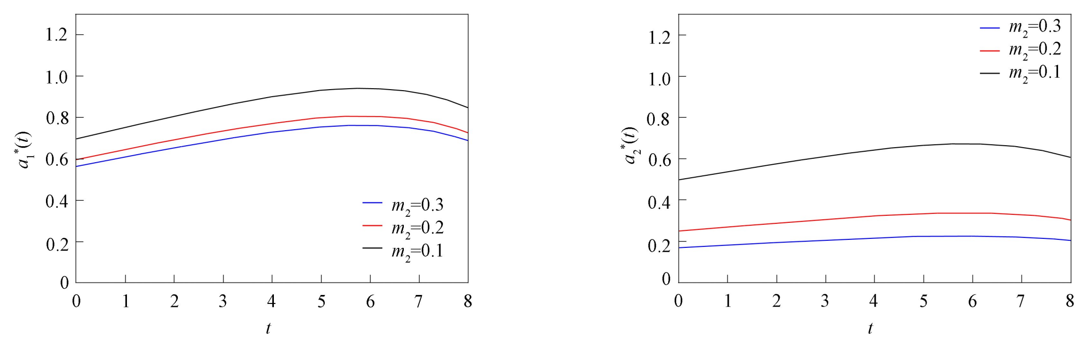
下面主要研究保险公司和再保险公司的最优投资策略 $a_1^*(t)$和 $a_2^*(t)$与风险规避参数、风险资产的弹性参数和保险公司的敏感性参数之间的关系．最优投资策略 $a_1^*(t)$随 m_1 和 k 的变化曲线如图 5 所示，最优投资策略 $a_1^*(t)$和 $a_2^*(t)$随 m_2 的变化曲线如图 6 所示.



(A) $a_1^*(t)$随m_1的变化　　(B) $a_1^*(t)$随k的变化

图 5　最优投资策略 $a_1^*(t)$随 m_1 和 k 的变化曲线

Fig. 5　Variation curves of optimal investment strategy $a_1^*(t)$ with m_1 and k



(A) $a_1^*(t)$随m_2的变化　　(B) $a_2^*(t)$随m_2的变化

图 6　最优投资策略 $a_1^*(t)$和 $a_2^*(t)$随 m_2 的变化曲线

Fig. 6　Variation curves of optimal investment strategies $a_1^*(t)$ and $a_2^*(t)$ with m_2

由图 5 和图 6 可见，$a_1^*(t)$是关于 m_1 和 m_2 的递减函数，并与 k 成正向关系，$a_2^*(t)$随着 m_2 的增大而减小，当保险公司和再保险公司各自的风险厌恶系数增大时，更倾向于选择无风险的银行存款，从而减少风险资产的投资来规避风险．随着保险公司的敏感性参数 k 增大，竞争心理更强烈的

保险公司愿意将更多资金投资于风险资产，为自身创造更多获取财富的机会.

参考文献

[1] BIAN B J, CHEN X F, XU Z Q. Utility Maximization under Trading Constraints with Discontinuous Utility [J]. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2019, 10(1): 243-260.

[2] CHEN M, YUEN K C, WANG W Y. Optimal Reinsurance and Dividends with Transaction Costs and Taxes under Thinning Structure [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2021, 2021(3): 198-217.

[3] LIANG X Q, LIANG Z B, YOUNG V R. Optimal Reinsurance under the Mean-Variance Premium Principle to Minimize the Probability of Ruin [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2020, 92: 128-146.

[4] ZHANG C B, LIANG Z B. Optimal Time-Consistent Reinsurance and Investment Strategies for a Jump-Diffusion Financial Market without Cash [J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2022, 59: 101578-1-101578-17.

[5] CHEN M, YUEN K C. Optimal Dividend and Reinsurance in the Presence of Two Reinsurers [J]. Journal of Applied Probability, 2016, 53(2): 554-571.

[6] JIANG X, YUEN K C, CHEN M. Optimal Investment and Reinsurance with Premium Control [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2020, 16(6): 2781-2797.

[7] 杨鹏，刘琦. 均值方差准则下时间一致的再保险和投资策略选择 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2017，49(4)：25-31. (YANG P, LIU Q. Time-Consistent Reinsurance and Investment Strategy Selection under Mean-Variance Criterion [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2017, 49(4): 25-31.)

[8] 杨鹏，惠小健. Vasicek 利率下基于随机微分博弈的最优再保险和投资 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2017，49(2)：34-40. (YANG P, XI X J. Optimal Reinsurance and Investment Based on Stochastic Differential Games with Vasicek Interest Rate [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2017, 49(2): 34-40.)

[9] CHEN L, SHEN Y. On a New Paradigm of Optimal Reinsurance: A Stochastic Stackelberg Differential Game between an Insurer and a Reinsurer [J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 2018, 48(2): 905-960.

[10] CHEN L, SHEN Y. Stochastic Stackelberg Differential Reinsurance Games under Time-Inconsistent Mean-Variance Framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2019, 88: 120-137.

[11] ANDERSON E W, HANSEN L P, SARGENT T J. A Quartet of Semigroups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and Model Detection [J]. Journal of the European Economic Association, 2003, 1(1): 68-123.

[12] HUANG Y, OUYANG Y, TANG L X, et al. Robust Optimal Investment and Reinsurance Problem for the Product of the Insurer's and the Reinsurer's Utilities [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 344: 532-552.

[13] ZHANG W L, MENG H. Robust Optimal Investment-Reinsurance Strategies with the Preferred Reinsurance Level of Reinsurer [J]. AIMS Mathematics, 2022, 7(6): 10024-10051.

[14] YUAN Y, LIANG Z B, HAN X. Robust Reinsurance Contract with Asymmetric Information in a Stochastic Stackelberg Differential Game [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2022, 2022(4): 328-355.

[15] ZHAO H, WENG C G, SHEN Y, et al. Time-Consistent Investment-Reinsurance Strategies towards Joint Interests of the Insurer and the Reinsurer under CEV Models [J]. Science China: Mathematics, 2017, 60: 317-344.

[16] BAI Y F, ZHOU Z B, XIAO H L, et al. A Hybrid Stochastic Differential Reinsurance and Investment Game with Bounded Memory [J]. European Journal of Operational Research, 2022, 296(2): 717-737.

[17] BJÖRK T, KHAPKO M, MURGOCI A. On Time-Inconsistent Stochastic Control in Continuous Time [J]. Finance and Stochastics, 2017, 21(2): 331-360.

(责任编辑：赵立芹)