第 62 卷 第 3 期 吉林大学学报(理学版) Vol. 62 No. 3
2024 年 5 月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2024

doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023278

复形的 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数

刘 妍 平
(西北师范大学 经济学院, 兰州 730070)

摘要: 设($\mathscr{L},\mathscr{A}$)是一给定的完备对偶对. 首先, 引入复形的 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数, 给出其刻画, 并证明复形的 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数不超过内射维数; 其次, 讨论复形的相对上同调和 Tate 上同调, 得到联系绝对、相对、Tate 上同调的长正合序列.

关键词: 对偶对; Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数; Tate 上同调; 长正合序列

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0521-08

Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-Injective Dimension of Complexes

LIU Yanping
(*College of Economics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Let ($\mathscr{L},\mathscr{A}$) be a fixed complete duality pair. Firstly, the author introduced the Gorenstein ($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-injective dimension of complexes, gave its characterization, and proved that Gorenstein ($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-injective dimension of complexes was not larger than injective dimension. Secondly, the author also discussed relative cohomology and Tate cohomology of complexes, and obtained the long exact sequence connecting absolute, relative and Tate cohomology.

Keywords: duality pair; Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-injective dimension; Tate cohomology; long exact sequence

目前, 关于 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模的研究得到广泛关注[1-5]. Asadollahi 等[3]定义并研究了复形的 Gorenstein 内射维数及其与内射维数之间的关系. 对有单位元的交换环 R, Holm 等[4]引入了 R-模的对偶对. 对偶对通常与纯性、完全余挠对等有密切关系, 因此在 Gorenstein 同调代数的研究中具有重要作用. Gillespie[5]证明了通过任意的完备对偶对可得到类似于 Gorenstein 同调代数的相对同调代数.

Tate 在研究有限群表示理论时, 注意到 $\mathbb{Z}[G]$-模 $\mathbb{Z}$ 有完全投射分解, 其中群 G 在 $\mathbb{Z}$ 上的作用是平凡的, 从而对有限群 G 和 $\mathbb{Z}[G]$-模 M 定义了 Tate 上同调[6]. Buchweitz[7]将 Tate 上同调推广到了 Gorenstein 环, 定义了关于两个变量的 Tate 上同调理论. 文献[8-9]分别从不同的角度对上述理论进行了研究. Avramov 等[10]借助完全分解将该理论推广到任意交换 Noether 环上具有有限 G-维数的有限生成模. Sather-Wagstaff 等[11]定义了 Abel 范畴中具有 Tate W-分解的对象与任意对象的 Tate 上同调. 文献[12-14]研究了广义 Tate 上同调, 得到了平衡性等相关性质. 本文考虑给定的完备对偶对($\mathscr{L},\mathscr{A}$), 首先, 研究复形的 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数, 给出其刻画, 并讨论复形内射维数和 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数之间的关系; 其次, 作为复形 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数的应用, 讨论一类广义 Tate 上同调.

收稿日期: 2023-07-05. **网络首发日期:** 2024-02-26.

作者简介: 刘妍平(1989—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事环的同调理论的研究, E-mail: xbsdlyp@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11861055)和甘肃省教育厅创新基金(批准号: 2021A-002).

网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20240223.1503.001.

1 预备知识

本文所有的环 R 均为有单位元的交换环. 如果对任意的整数 i, $d_i^X d_{i+1}^X=0$, 则称 R-模的序列

$$X: \cdots \to X_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}^X} X_i \xrightarrow{d_i^X} X_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}^X} \cdots$$

为复形. R-模 M 视为第0层次为 M、其余层次为0的复形. 定义复形 X 的第 i 个同调模为 $H_i(X)=Z_i^X/B_i^X$, 其中 $Z_i^X=\mathrm{Ker}\ d_i^X$ 为复形 X 的第 i 个循环, $B_i^X=\mathrm{Im}\ d_{i+1}^X$ 为复形 X 的第 i 个边缘. 记 $\sup X=\sup\{i \mid X_i\neq 0\}$, $\inf X=\inf\{i \mid X_i\neq 0\}$.

设 X 是 R-复形, u,v 是整数. 复形 X 在 u 层次的硬左切割 $\sqsubset_u X$ 和 X 在 v 层次的硬右切割 $X_{v\sqsupset}$ 分别为

$$\sqsubset_u X=0\to X_u\to X_{u-1}\to X_{u-2}\to\cdots,\qquad X_{v\sqsupset}=\cdots\to X_{v+2}\to X_{v+1}\to X_v\to 0.$$

复形 X 在 u 层次的软左切割 $\subset_u X$ 和 X 在 v 层次的软右切割 $X_{v\supset}$ 分别为

$$\subset_u X=0\to C_u^X\to X_{u-1}\to X_{u-2}\to\cdots,\qquad X_{v\supset}=\cdots\to X_{v+2}\to X_{v+1}\to Z_v^X\to 0,$$

其中 $C_u^X=\mathrm{Coker}(X_{u+1}\to X_u)$, $Z_v^X=\mathrm{Ker}(X_v\to X_{v-1})$.

R-复形同态 $\alpha: X\to Y$ 是指一族 R-模同态 $\alpha_i: X_i\to Y_i$, 且满足对任意的 $i\in\mathbb{Z}$, $d_i^Y\alpha_i-\alpha_{i-1}d_i^X=0$. 若一个复形同态导出同调的同构, 则该复形同态称为拟同构, 记复形的拟同构和同构分别为 $\simeq$ 和 $\cong$.

设 $\mathscr{A}$ 是一个 R-模的类, X 是 R-复形. 若对任意的 $A\in\mathscr{A}$, $\mathrm{Hom}_R(A,X)$ 是正合的, 则称复形 X 是 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{A},-)$ 正合的或 $\mathscr{A}$-零调的.

定义 1[5] 设 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{C}$ 是 R-模的类, 若下列条件成立:

1) $M\in\mathscr{M}$ 当且仅当 $M^+\in\mathscr{C}$;

2) $\mathscr{C}$ 关于直和因子与有限直和封闭.

则称 $(\mathscr{M},\mathscr{C})$ 是对偶对.

若 $\mathscr{M}$ 包含模 R, 且关于余积和扩张封闭, 则称对偶对 $(\mathscr{M},\mathscr{C})$ 是完全的. 若 $(\mathscr{C},\mathscr{M})$ 也是对偶对, 则称对偶对 $(\mathscr{M},\mathscr{C})$ 是对称的. 若 $(\mathscr{M},\mathscr{C})$ 是对称且完全的, 则称对偶对 $(\mathscr{M},\mathscr{C})$ 是完备对偶对.

定义 2[5] 设 $(\mathscr{L},\mathscr{A})$ 是全备对偶对, M 是 R-模. 如果 $M=Z_0 I$, 则称 M 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射的, 其中 I 是内射模的正合序列且对任意的 $A\in\mathscr{A}$, $\mathrm{Hom}_R(A,I)$ 正合. 记 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射模类为 $\mathscr{G}\mathscr{J}$.

定义 3[14] 设 $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 是 R-模范畴中的一个余挠对, X 是 R-模复形.

1) 若 X 是正合的且对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, $Z_n^X\in\mathscr{A}$, 则称 X 是 $\mathscr{A}$-复形.

2) 若 X 是正合的且对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, $Z_n^X\in\mathscr{B}$, 则称 X 是 $\mathscr{B}$-复形.

3) 若对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, $X_n\in\mathscr{A}$, 且对任意的 $B\in\mathscr{B}$, $\mathrm{Hom}_R(X,B)$ 是正合的, 则称 X 是 dg $\mathscr{A}$-复形.

4) 若对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, $X_n\in\mathscr{B}$, 且对任意的 $A\in\mathscr{A}$, $\mathrm{Hom}_R(A,X)$ 是正合的, 则称 X 是 dg $\mathscr{B}$-复形.

记 $\mathscr{A}$-复形的类为 $\widetilde{\mathscr{A}}$, $\mathscr{B}$-复形的类为 $\widetilde{\mathscr{B}}$, dg $\mathscr{A}$-复形的类为 dg $\widetilde{\mathscr{A}}$, dg $\mathscr{B}$-复形的类为 dg $\widetilde{\mathscr{B}}$. Gillespie[15] 证明了 $(\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{A}},\widetilde{\mathscr{B}})$ 和 $(\widetilde{\mathscr{A}},\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{B}})$ 是复形的余挠对, 称为诱导的余挠对.

2 复形的 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射维数的刻画

设 $(\mathscr{L},\mathscr{A})$ 是完备对偶对.

引理 1 $(\mathscr{W},\mathscr{G}\mathscr{J})$ 是完备遗传的余挠对, 其中 $\mathscr{W}={}^{\perp}\mathscr{G}\mathscr{J}$, 进而诱导的余挠对 $(\widetilde{\mathscr{W}},\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{G}\mathscr{J}})$ 和 $(\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{W}},\widetilde{\mathscr{G}\mathscr{J}})$ 也是完备遗传的, 且 $\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{W}}\cap\mathscr{E}=\widetilde{\mathscr{W}}$, $\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{G}\mathscr{J}}\cap\mathscr{E}=\widetilde{\mathscr{G}\mathscr{J}}$, 其中 $\mathscr{E}$ 是正合复形的类.

证明: 根据文献[5]中引理4.5和定理4.6知, $(\mathscr{W},\mathscr{G}\mathscr{J})$ 是完备遗传的余挠对, 其余证明由文献[15]中推论3.13和文献[16]中定理3.5可得.

定义 4 设 M 是 R-模复形, 复形的 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射维数 $\mathscr{G}\mathscr{J}$-$\dim_R M$ 定义为

$$\mathscr{G}\mathscr{J}\text{-}\dim_R M=\inf\{\sup\{-i \mid G_i\neq 0\} \mid G\cong M, \text{其中 } G\in \mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{G}\mathscr{J}}\}.$$

定义 5　设 M 是 R-模复形，复形的态射图 $M\xrightarrow{i}I\xrightarrow{v}T$ 是 M 的完备 $\mathscr{A}$-余分解．若复形的态射图 $M\xrightarrow{i}I\xrightarrow{v}T$ 满足下列条件：

1) i：$M\to I$ 是 M 的 dg-内射余分解；

2) T 是内射模的正合 $\mathscr{A}$-零调复形；

3) 对所有的 $i\ll 0$，v_i 是双射．

则称复形的态射图 $M\xrightarrow{i}I\xrightarrow{v}T$ 是 M 的完备 $\mathscr{A}$-余分解．

若对任意的 $i\in\mathbb{Z}$，v_i 是可裂的，则称该完备 $\mathscr{A}$-余分解是可裂的．

引理 2　1) $\mathscr{GJ}$ 是内射可解的，且关于直积与直和因子封闭；

2) 设 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是 R-模的短正合列，若 Y 和 Z 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模，则 X 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模当且仅当对任意的 $A\in\mathscr{A}$，$\mathrm{Ext}_R^1(A,X)=0$．

证明：1) 由($\mathscr{W}$,$\mathscr{GJ}$)是完备遗传的余挠对，其中 $\mathscr{W}={}^{\perp}\mathscr{GJ}$ 可得．

2) 充分性．因为 Z 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模，所以存在短正合序列 $0\to K\to L\to Z\to 0$，其中 L 是内射模，K 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模．考虑拉回图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 1)和中间列的正合性可知 H 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模．根据假设 $\mathrm{Ext}_R^1(L,X)=0$ 知，中间行是可裂正合的．因此由 1)可得 X 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模．

必要性．根据 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射模的定义易得．

定理 1　设 M 是 R-模复形，则对正整数 n，下列各结论等价：

1) $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M\leqslant n$；

2) $-\inf H(M)\leqslant n$，且对任意的 $X\simeq M$，$Z_{-n}(X)\in\mathscr{GJ}$，其中 $X\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{GJ}}$；

3) $-\inf H(M)\leqslant n$，且存在 M 的 dg-内射分解 $M\to I$，$Z_{-n}(I)\in\mathscr{GJ}$；

4) $-\inf H(M)\leqslant n$，且对 M 的任意 dg-内射分解 $M\to I'$，$Z_{-n}(I')\in\mathscr{GJ}$；

5) 对任意的 dg-内射分解 $M\to I$，存在 M 的完备 $\mathscr{A}$-余分解 $M\to I\xrightarrow{v}T$，使得对所有的 $i\leqslant -n$，$v_i=\mathrm{id}_{I_i}$；

6) 存在 M 的可裂完备 $\mathscr{A}$-余分解 $M\to I\xrightarrow{v}T$，使得对所有的 $i\leqslant -n$，$v_i=\mathrm{id}_{I_i}$．

进而，若 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M<\infty$，则 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M=\sup\{-\inf R\mathrm{Hom}_R(X,M)\mid X\in\mathscr{A}\}$．

证明：1)$\Leftrightarrow$2) 由文献[17]中定理 3.4 可得．2)$\Rightarrow$3) 显然．

3)$\Rightarrow$4)．设 $M\to I'$ 是 dg-内射分解．由文献[18]中命题 1.3.6 的对偶结论可知，存在内射模 E_{-n} 和 E'_{-n}，使得 $Z_{-n}(I)\oplus E'_{-n}\cong Z_{-n}(I')\oplus E_{-n}$．因此由引理 2 中 1)得 $Z_{-n}(I')\in\mathscr{GJ}$．

4)$\Rightarrow$5)．设 $M\to I$ 是 M 的 dg-内射分解，则 $Z_{-n}(I)\in\mathscr{GJ}$．因此存在 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{A},-)$-正合的正合序列 $\cdots\to E_1\to E_0\to Z_{-n}(I)\to 0$，其中每个 E_i 是内射的．记复形 $\cdots\to E_1\to E_0\to 0$ 为 X，则存在复形同态 η：$I_{-n\supset}\to\Sigma^{1-n}X$，使得下图可交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & I_{2-n} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{2-n}"'] & I_{1-n} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{1-n}"'] & Z_{-n}(I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & (\Sigma^{1-n}X)_{2-n} \arrow[r] & (\Sigma^{1-n}X)_{1-n} \arrow[r] & Z_{-n}(I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

设 T 为复形 $\cdots\to(\Sigma^{1-n}X)_{2-n}\to(\Sigma^{1-n}X)_{1-n}\to I_{-n}\to I_{-1-n}\to\cdots$，则 T 是正合 $\mathscr{A}$-零调复形. 令

$$v_i=\begin{cases}\eta_i, & i>-n,\\ \mathrm{id}_{I_i}, & i\leqslant -n,\end{cases}$$

则 $I\xrightarrow{v}T$ 是需证的复形同态.

5)⇒6). 由5)知，存在 M 的完备 $\mathscr{A}$-余分解 $M\to I\xrightarrow{v^{(1)}}T^{(1)}$，使得对所有的 $i\leqslant -n$，$v_i^{(1)}=\mathrm{id}_{I_i}$. 令 $T(2)=\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_{I_{\sqsubset_{1-n}}})$，则 $T^{(2)}$ 是可收缩复形，且对所有的 $i\leqslant -n$，$T_i^{(2)}=0$. 由文献[11]中事实1.5知 $T^{(2)}$ 是层次内射的正合复形，且对所有的 $i\in\mathbb{Z}$，$Z_i(T^{(2)})\in\mathscr{GI}$. 记自然同态 $I\to I_{\sqsubset_{1-n}}\to T^{(2)}$ 为 φ：$I\to T^{(2)}$. 对任意的 $i>-n$，φ_i 是可裂的且对任意的 $i\leqslant -n$，$\varphi_i=0$. 令 $T=T^{(1)}\oplus T^{(2)}$，v：$I\to T$，其中 $v_i=(v_i^{(1)}\varphi_i)$，则 v_i 是可裂单同态且对任意的 $i\leqslant -n$，v_i 是双射. 因此 $M\to I\xrightarrow{v}T$ 是可裂的完备 $\mathscr{A}$-余分解.

6)⇒2). 令 $M\xrightarrow{i}I\xrightarrow{v}T$ 是 M 的可裂完备 $\mathscr{A}$-余分解，且对所有的 $i\leqslant -n$，$v_i=\mathrm{id}_{I_i}$，则对所有的 $i\leqslant -n$，$Z_i(I)\cong Z_i(T)$，$H_i(I)\cong H_i(T)$. 因此 $Z_{-n}(I)\in\mathscr{GI}$，$-\inf H(M)=-\inf H(I)\leqslant -n$. 设 X 是 dg $\widetilde{\mathscr{GI}}$复形且 $M\simeq X$，则 $X\simeq I$，从而存在拟同构 μ：$X\to I$. 由假设可知 $-\inf H(X)=-\inf H(I)\leqslant -n$. 令 A 是一个 $\mathscr{A}$-模，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_R^1(A,Z_{-n}(X))&=H_{-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,Z_{-n}(X)))\cong H_{-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,\Sigma^n(\sqsubset_{-n}X)))\cong\\ &H_{-n-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,\sqsubset_{-n}X))\cong H_{-n-1}(\mathrm{Hom}_R(A,\sqsubset_{-n}X))\cong\\ &H_{-n-1}(\mathrm{Hom}_R(A,X))\cong H_{-n-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,X))\cong\\ &H_{-n-1}(\mathrm{Hom}_R(A,I))\cong H_{-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,\Sigma^n(\sqsubset_{-n}I)))\cong\\ &H_{-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,Z_{-n}(I)))=\mathrm{Ext}_R^1(A,Z_{-n}(I)),\end{aligned}$$

其中第一个和最后一个同构根据文献[19]中A.1.14.1可得，第二个和第四个同构根据文献[20]中引理3.5可得. 因为 $A\in\mathscr{W}$，$\sqsubset_{-n}X$ 是层次 $\mathscr{GI}$ 的上有界复形，故根据文献[15]中引理3.4得 $A\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{W}}$，$\sqsubset_{-n}X\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{GI}}$，根据文献[20]中引理3.5得

$$H_{-n-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,\sqsubset_{-n}X))\cong H_{-n-1}(\mathrm{Hom}_R(A,\sqsubset_{-n}X)).$$

因为 $X\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{GI}}$，故根据文献[20]中引理3.5得

$$H_{-n-1}(\mathrm{Hom}_R(A,X))\cong H_{-n-1}(R\mathrm{Hom}_R(A,X)).$$

又因为 $Z_{-n}(I)\in\mathscr{GI}$，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(A,Z_{-n}(I))=0$. 因此 $\mathrm{Ext}_R^1(A,Z_{-n}(X))=0$，进而 $Z_{-n}(X)\in\mathscr{A}^{\perp_1}$.

若 μ 是单的，则存在正合序列 $0\to X\xrightarrow{\mu}I\to L\to 0$，其中 L 是正合复形. 因为 $X,I\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{GI}}$，所以由引理1得 $L\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{GI}}$，则 $L\in\widetilde{\mathscr{GI}}$，$Z_{-n}(L)\in\mathscr{GI}$. 因此存在正合序列 $0\to Z_{-n}(X)\to Z_{-n}(I)\to Z_{-n}(L)\to 0$，其中 $Z_{-n}(L),Z_{-n}(I)\in\mathscr{GI}$. 由引理2中2)得 $Z_{-n}(X)\in\mathscr{GI}$. 若 μ 不是单的，则由引理1知，存在 X 的特殊$\widetilde{\mathscr{GI}}$-预包络 $X\to G$. 因此 $X\to G\oplus I$ 是单的拟同构，且 $G\oplus I\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{GI}}$，$Z_{-n}(G\oplus I)\cong Z_{-n}(G)\oplus Z_{-n}(I)$. 由上述证明可知 $Z_{-n}(G\oplus I)\in\mathscr{GI}$，从而 $Z_{-n}(I)\in\mathscr{GI}$. 所以2)得证.

设 M 正合，且 $X\in\mathscr{A}$，并存在下有界 dg-投射复形 P，使得 $P\simeq X$，则对任意的 $i\in\mathbb{Z}$，有

$$H_i(R\mathrm{Hom}_R(X,M))=H_i(\mathrm{Hom}_R(P,M))=0.$$

因此 $\sup\{-\inf R\mathrm{Hom}_R(X,M)\,|\,X\in\mathscr{A}\}=-\infty$，从而

$$\mathscr{GI}\text{-}\dim_R M=\sup\{-\inf R\mathrm{Hom}_R(X,M)\,|\,X\in\mathscr{A}\}=-\infty.$$

设 $\mathscr{GI}\text{-}\dim_R M=n$，$n$ 为整数，下面证明 $\sup\{-\inf R\mathrm{Hom}_R(X,M)\,|\,X\in\mathscr{A}\}\leqslant n$. 根据3)和引理2中1)，存在 dg-内射复形 I，使得 $M\simeq I$，且对任意的 $i\leqslant n$，$Z_i(I)\in\mathscr{GI}$. 若对任意的 $i\geqslant 1$ 和 $X\in\mathscr{A}$，有

$$\begin{aligned}H_{-n-i}(R\mathrm{Hom}_R(X,M))&=H_{-n-i}(\mathrm{Hom}_R(X,I))=H_{-1}(\mathrm{Hom}_R(X,\Sigma^{n+i-1}(\sqsubset_{-n-i+1}I)))=\\ &H_{-1}(R\mathrm{Hom}_R(X,Z_{-n-i+1}(I)))=\mathrm{Ext}_R^1(X,Z_{-n-i+1}(I))=0.\end{aligned}$$

则对任意的 $X\in\mathscr{A}$，$-\inf H(R\mathrm{Hom}_R(X,M))\leqslant n$.

设 $\sup\{-\inf H(R\mathrm{Hom}_R(X,M))\mid X\in\mathscr{A}\}<n$，因为 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M=n$，故由 5)知存在完备的 $\mathscr{A}$-余分解 $M\xrightarrow{i}I\xrightarrow{v}T$，使得对任意的 $i\leqslant -n$，$v_i=\mathrm{id}_{I_i}$．记 ε：$Z_{-n}(I)\to I_{-n}$，则 ε 是单射．由于 $Z_{-n}(I)=Z_{-n}(T)$，$I_{-n}=T_{-n}$，所以存在满射 q：$T_{1-n}\to Z_{-n}(I)$ 和 t：$I_{1-n}\to Z_{-n}(I)$，使得 $\delta^T_{1-n}=\varepsilon q$，$\delta^I_{1-n}=\varepsilon t$．又由假设 $H_{-n}(R\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},I))=0$ 知，$H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},I))=0$，因此存在正合序列

$$\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},I_{1-n})\to\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},I_{-n})\to\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},I_{-n-1}).$$

于是 t_*：$\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},I_{1-n})\to\mathrm{Hom}_R(T_{1-n},Z_{-n}(I))$是满射，从而存在 α：$T_{1-n}\to I_{1-n}$，使得 $q=t\alpha$．因为q 是满射，故 t 也是满射，因此$-\inf H(M)\leqslant n-1$．可见 q：$T_{1-n}\to Z_{-n}(I)$是特殊的 $\mathscr{A}$-预覆盖，故 t 也是特殊的 $\mathscr{A}$-预覆盖，于是可得 $Z_{1-n}(I)\in\mathscr{A}^{\perp_1}$．由引理 2 得 $Z_{1-n}(I)\in\mathscr{GJ}$，矛盾．因此

$$\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M=\sup\{-\inf H(R\mathrm{Hom}_R(X,M))\mid X\in\mathscr{A}\}.$$

注 1　1) 考虑交换 Noether 环上的完备对偶对$(\mathscr{F},\mathscr{J})$，其中 $\mathscr{F}$ 为平坦模类，$\mathscr{J}$ 为内射模类．此时 Gorenstein$(\mathscr{F},\mathscr{J})$-投射模为 Ding 投射模，Gorenstein$(\mathscr{F},\mathscr{J})$-内射模为 Ding 内射模．由定理 1 知这里的 Gorenstein$(\mathscr{F},\mathscr{J})$-内射维数恰是文献[21]中的 Ding 内射维数．

2) 设环 R 是 Krull 维数有限的交换 Noether 环，此时 Gorenstein$(\mathscr{F},\mathscr{J})$-内射模为 Gorenstein 内射模．由定理 1 知这里的 Gorenstein$(\mathscr{F},\mathscr{J})$-内射维数恰是文献[3]中的 Gorenstein 内射维数．

推论 1　设 M 是 R-模复形，则 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M\leqslant\mathrm{id}_R M$，当 $\mathrm{id}_R M<\infty$时等号成立．

证明：设 $\mathrm{id}_R M=n$，若 $n=\infty$，则显然 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M\leqslant\mathrm{id}_R M$．设 $n=-\infty$，则 M 是正合的．因此 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M\leqslant\mathrm{id}_R M=-\infty$．设 $H(M)\neq 0$，$\mathrm{id}_R M=n$，则对任意的 $i<-n$，$H_i(M)=0$，且存在 dg-内射分解 $M\to I$，使得 $Z_{-n}(I)$是内射的．特别地，$Z_{-n}(I)$是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射的．由定理 1 得 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M\leqslant n$．

若 $\mathrm{id}_R M=n<\infty$，反设 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R M=m<n$，则存在 dg-内射分解 $M\to I'$，使得对任意的 $i<-n$，$I'_i=0$．由定理 1 知，$Z_{-m}(I')\in\mathscr{GJ}$，对任意的 $i<-m$，$H_i(M)=0$．特别地，对任意的 $i<-m$，$H_i(I')=0$．所以存在正合序列 $0\to Z_{-m}(I')\to I'_{-m}\to\cdots\to I'_{-n}\to 0$．因为内射模属于${}^{\perp}\mathscr{GJ}$，所以对任意的$-n\leqslant i\leqslant -m$，$I'_i\in{}^{\perp}\mathscr{GJ}$，从而存在正合序列 $0\to Z_{-m}(I')\to I'_{-m}\to Z_{-m-1}(I')\to 0$，其中 $Z_{-m-1}(I')\in{}^{\perp}\mathscr{GJ}$，故 $0\to Z_{-m}(I')\to I'_{-m}\to Z_{-m-1}(I')\to 0$ 是可裂的．于是可知 $Z_{-m}(I')$是内射的，进而有 $n\leqslant m$，矛盾．表明 $m=n$．

根据定理 1 易得：

推论 2　设$(X_i)_{i\in I}$是一族 R-模复形，则 $\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R\left(\prod\limits_{i\in I}X_i\right)\leqslant\sup\{\mathscr{GJ}\text{-}\dim_R(X_i)\mid i\in I\}$．

3　相对 Tate 上同调

作为复形 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射维数的应用，下面讨论相对于完备 $\mathscr{A}$-余分解的 Tate 上同调．

引理 3　设 $M\xrightarrow{i}I\xrightarrow{v}T$ 和 $\widetilde{M}\xrightarrow{\tilde{i}}\widetilde{I}\xrightarrow{\tilde{v}}\widetilde{T}$ 分别是 M 和 $\widetilde{M}$ 的完备 $\mathscr{A}$-余分解，则对任意的复形同态 μ：$M\to\widetilde{M}$，存在同伦意义下的唯一的同态 $\bar{\mu}$，使得下图左边的方块同伦交换，且对 $\bar{\mu}$ 存在同伦意义下的唯一同态 $\hat{\mu}$，使得下图右边的方块同伦交换：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mu"'] & I \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\bar{\mu}"'] & T \arrow[d, "\hat{\mu}"'] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\tilde{i}"] & \widetilde{I} \arrow[r, "\tilde{v}"] & \widetilde{T}
\end{tikzcd}$$

若 $\mu=\mathrm{id}_M$，则 $\bar{\mu}$ 和 $\hat{\mu}$ 是同伦等价．

证明：类似文献[11]中引理 5.3 的对偶可证．

定义 6　设 N 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-内射维数有限的复形，且 $N\to I\xrightarrow{v}T$ 是 N 的完备 $\mathscr{A}$-余分解．对任意的复形 M 和任意的$n\in\mathbb{Z}$，$\widehat{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)=H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(M,T))$称为 n 次相对 Tate 上同调．对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，同态 $\mathrm{Hom}_R(M,v)$：$\mathrm{Hom}_R(M,I)\to\mathrm{Hom}_R(M,T)$诱导出 Abel 群同态 $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)\to\widehat{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)$．

注 2 1) 由引理 3 可知 $\hat{\mathrm{Ext}}_R^n(-,N)$是上同调函子，其与 N 的完备 $\mathscr{A}$-余分解的选取无关；

2) 若 N 有完备 $\mathscr{A}$-余分解 $N \to I \xrightarrow{v} T$，则 $I \xrightarrow{\mathrm{id}_I} I \xrightarrow{v} T$ 是 I 的完备 $\mathscr{A}$-余分解，且对任意的复形 M 和任意的 $i \in \mathbb{Z}$，$\hat{\mathrm{Ext}}_R^i(M,N) \cong \hat{\mathrm{Ext}}_R^i(M,I)$；

3) 若 $\mathscr{G}\mathscr{I}$-$\dim_R N \leqslant n$，则对任意的上有界复形 M 和 $i > n + \sup M$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,N) \to \hat{\mathrm{Ext}}_R^i(M,N)$是双射.

引理 4 设 $\mathscr{N}$：$0 \to N \to N' \to N'' \to 0$ 是具有有限 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数的复形的正合序列，则存在下列行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & N' \arrow[r] \arrow[d, "i'"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "i''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & I' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & I'' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] & T' \arrow[r] & T'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中各列是完备 $\mathscr{A}$-余分解.

证明：类似文献[11]中引理 5.5 的对偶可证.

命题 1 设 M 是 R-模复形，$\mathscr{N}$：$0 \to N \to N' \to N'' \to 0$ 是 R-模复形的正合列.

1) 若 M 具有有限 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数，则存在自然同态 $V^n(\mathscr{N},M)$，使得下列序列是正合的：

$$\cdots \to \hat{\mathrm{Ext}}_R^n(N',M) \to \hat{\mathrm{Ext}}_R^n(N,M) \xrightarrow{V^n(\mathscr{N},M)} \hat{\mathrm{Ext}}_R^{n+1}(N'',M) \to \cdots.$$

2) 若 N,N'和 N''具有有限 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-内射维数，则存在自然同态 $V^n(M,\mathscr{N})$，使得以下序列是正合的：$\cdots \to \hat{\mathrm{Ext}}_R^n(M,N') \to \hat{\mathrm{Ext}}_R^n(M,N'') \xrightarrow{V^n(M,\mathscr{N})} \hat{\mathrm{Ext}}_R^{n+1}(M,N) \to \cdots$.

证明：1) 由 N 的完备 $\mathscr{A}$-余分解 $N \to I \xrightarrow{v} T$ 可诱导出如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N'',I) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(N'',v)"'] & \mathrm{Hom}_R(N',I) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(N',v)"'] & \mathrm{Hom}_R(N,I) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(N,v)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N'',T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N',T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N,T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，T_n 和 I_n 都是内射的，所以该交换图是行正合的，其中下行导出的同调正合序列即为所证的长正合序列. 自然性显然.

2) 用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$作用引理 4 中的交换图，因为对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，T_n 和 I_n 都是内射的，所以可得如下行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,I) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(M,v)"'] & \mathrm{Hom}_R(M,I') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(M,v')"'] & \mathrm{Hom}_R(M,I'') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(M,v'')"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,T') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,T'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中下行导出的同调正合序列即为所证的长正合序列. 自然性显然.

引理 5 设 $N \xrightarrow{i} I \xrightarrow{v} T$ 是 R-模 N 的可裂完备 $\mathscr{A}$-余分解，则存在复形的可裂正合序列 $0 \to I \to \widetilde{T} \to \Sigma Y \to 0$，其中 $\widetilde{T} = _{\subset_1} T$，$Y$ 是 N 的真 $\mathscr{G}\mathscr{I}$-余分解.

证明：由假设存在非负整数 n，使得对任意的 $i \leqslant -n$，v_i 是双射. 令 $\widetilde{T} = _{\subset_1} T$，$\tilde{\beta}$：$I \to \widetilde{T}$ 是同态，则对任意的 $i \leqslant 0$，$\tilde{\beta}_i = v_i$，对任意的 $i > 0$，$\tilde{\beta}_i = 0$. 令 $Y = \Sigma^{-1}\mathrm{Coker}(\tilde{\beta})$，因为 $\mathrm{Coker}(v)$是层次内射复形，所以 $Y_0 = C_1(T) \in \mathscr{G}\mathscr{I}$，且对任意的 $-n \leqslant i \leqslant -1$，$Y_i$ 是内射的，对任意的 $i \leqslant -n-1$，$Y_i = 0$. 因此有复形正合列 $0 \to I \to \widetilde{T} \to \Sigma Y \to 0$，其中 $\widetilde{T} = _{\subset_1} T$，$Y$ 是 N 的真 $\mathscr{G}\mathscr{I}$-余分解.

引理 6 设 $N \xrightarrow{i} I \xrightarrow{v} T$ 和 $N' \xrightarrow{i'} I' \xrightarrow{v'} T'$ 分别是 R-模 N 和 N' 的可裂完备 $\mathscr{A}$-余分解，g：$N \to N'$ 是 R-模同态，则存在复形同态交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"'] & \widetilde{T} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & \Sigma Y \arrow[r] \arrow[d, "g^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & \widetilde{T}' \arrow[r] & \Sigma Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中各行如引理 5，$\overline{g}$ 和 g^* 由 g 提升得到，$\tilde{g}$ 由 g 的提升诱导得到.

证明：根据引理 3 可得复形同态的交换图：

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & I \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & T \arrow[d, "\hat{g}"'] \\
N' \arrow[r, "i'"] & I' \arrow[r, "v'"] & T'
\end{tikzcd}$$

则由 $\widetilde{T}$ 和 $\widetilde{T}$ 的定义可知，g 诱导出同态 $\tilde{g}$：$\widetilde{T}\to\widetilde{T}'$，使得下图可交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"'] & \widetilde{T} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & \Sigma Y \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & \widetilde{T}' \arrow[r] & \Sigma Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由 Y 和 Y'的定义可知 $\tilde{g}$ 诱导出同态 g^*，使得引理 6 中的图可交换.

由定义知 $\overline{g}$ 是 g 的提升，因为 $\widetilde{T}$ 和 $\widetilde{T}'$是正合的，所以 $\tilde{g}$ 是拟同构. 由诱导的长正合序列可知 g^* 是 g 的提升.

定义 7　设 R-模 N 有真 $\mathscr{GI}$-余分解 $N\to E$，对任意的 R-模 M，定义相对上同调群

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{GI}}(M,N)=H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(M,E)).$$

定理 2　设 R-模 N 具有有限 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-内射维数 n，则对任意的 R-模 M 存在长正合序列

$$0\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{GI}}(M,N)\to\mathrm{Ext}^1_R(M,N)\to\widehat{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N)\to\cdots\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{GI}}(M,N)\to\mathrm{Ext}^n_R(M,N)\to\widehat{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)\to 0.$$

证明：设 $\mathscr{GI}$-$\dim_R N\leqslant n<\infty$，则由定理 1 和引理 5 可知存在可裂的复形正合序列 $0\to I\to\widetilde{T}\to\Sigma Y\to 0$，其中 $\widetilde{T}=_{\subset_1}T$，$Y$ 是 N 的真 $\mathscr{GI}$-余分解. 设 M 是 R-模，用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$作用上述正合列可得复形的正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M,I)\to\mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T})\to\mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y)\to 0,$$

并诱导出正合序列

$$\cdots\to H_i(\mathrm{Hom}_R(M,I))\to H_i(\mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T}))\to H_i(\mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y))\to\cdots.$$

因此对任意的 $i\geqslant 0$，$H_{-i}(\mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y))\cong H_{-i-1}(\mathrm{Hom}_R(M,Y))=\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathscr{GI}}(M,N)$，对任意的 $i>n$，$H_{-i}(\mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y))=0$. 同时对任意的 $i\geqslant 1$，$H_{-i}(\mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T}))\cong\widehat{\mathrm{Ext}}^i_R(M,N)$，$H_0(\mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T}))=0$. 于是长正合序列得证.

该长正合序列关于 M 是自然的. 事实上，设 g：$M\to M'$是 R-模同态，用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$作用正合列 $0\to I\to\widetilde{T}\to\Sigma Y\to 0$ 得下列交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M',I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(M',\widetilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(M',\Sigma Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

诱导出所需长正合列的交换图.

该长正合序列关于 N 是自然的. 事实上，设 f：$N\to N'$是 R-模同态，用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$作用引理 6 中的交换图可得下列交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,I') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,\widetilde{T}') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,\Sigma Y') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

诱导出所需长正合列的交换图.

参 考 文 献

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(4): 611-633.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000: 239-268.

[3] ASADOLLAHI J, SALARIAN S. Gorenstein Injective Dimension for Complexes and Iwanaga-Gorenstein Rings [J]. Communications in Algebra, 2006, 34(8): 3009-3022.

[4] HOLM H, JØRGENSEN P. Cotorsion Pairs Induced by Duality Pairs [J]. Journal of Commutative Algebra, 2009, 1(4): 621-633.

[5] GILLESPIE J. Duality Pairs and Stable Module Categories [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2019, 223(8): 3425-3435.

[6] CARTAN H, EILENBERG S. Homological Algebra [M]. Princeton: Princeton University Press, 1956: 135.

[7] BUCHWEITZ R O. Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tate Cohomology over Gorenstein Rings [M]. Hannover: University of Hannover, 1986: 91.

[8] BENSON D J, CARLSON J F. Products in Negative Cohomology [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1992, 82(2): 107-129.

[9] MISLIN G. Tate Cohomology for Arbitrary Groups via Satellites [J]. Topology and Its Applications, 1994, 56(3): 293-300.

[10] AVRAMOV L L, MARTSINKOVSKY A. Absolute, Relative, and Tate Cohomology of Modules of Finite Gorenstein Dimension [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 2002, 85(2): 393-440.

[11] SATHER-WAGSTAFF S, SHARIF T, WHITE D. Tate Cohomology with Respect to Semidualizing Modules [J]. Journal of Algebra, 2010, 324(9): 2336-2368.

[12] HUANG C L, LIU K T. Remarks on Balance for Tate and Generalized Tate (Co)homology [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2020, 46(5): 1283-1305.

[13] LIU Y P. Relative Derived Categories [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2021, 47(Suppl 1): S119-S141.

[14] XING J M, ZHAO T W, LI Y X, et al. Tate Cohomology for Complexes with Finite Gorenstein AC-Injective Dimension [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2019, 45(1): 103-125.

[15] GILLESPIE J. The Flat Model Structure on Ch(R) [J]. Transaction of the American Mathematical Society, 2004, 356(8): 3369-3390.

[16] YANG G, LIU Z K. Cotorsion Pairs and Model Structures on Ch(R) [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2011, 54(3): 783-797.

[17] YANG X Y, DING N Q. On a Question of Gillespie [J]. Forum Mathematicum, 2015, 27(6): 3205-3231.

[18] VELICHE O. Gorenstein Projective Dimension for Complexes [J]. Transaction of the American Mathematical Society, 2006, 358(3): 1257-1283.

[19] CHRISTENSEN L W. Gorenstein Dimension [M]. Berlin: Springer, 2000: 165.

[20] HU J S, DING N Q. A Model Structure Approach to the Tate-Vogel Cohomology [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2016, 220(6): 2240-2264.

[21] WANG Z P, LIU Z K. Strongly Gorenstein Flat Dimensions of Complexes [J]. Communications in Algebra, 2016, 44(4): 1390-1410.

(责任编辑: 赵立芹)