

梯度 Ricci-Yamabe 孤立子的一些刚性结果

李云超, 刘建成

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 应用散度定理及一些 Riemann 流形上的重要不等式, 并结合几何分析的方法研究紧致梯度 Ricci-Yamabe 孤立子的刚性问题, 在适当的条件下得到非平凡紧致梯度 Ricci-Yamabe 孤立子与欧氏球面等距的刚性结果. 此外, 在数量曲率为正的假设下, 证明满足 $L^{n/2}$ -积分拥挤条件的 n ($4 \leq n \leq 6$) 维紧致梯度收缩 Ricci-Yamabe 孤立子一定是 Einstein 流形.

关键词: 梯度 Ricci-Yamabe 孤立子; 刚性; 积分拥挤条件; 数量曲率

中图分类号: O186.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0586-07

Some Rigidity Results of Gradient Ricci-Yamabe Solitons

LI Yunchao, LIU Jiancheng

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: By using the divergence theorem and some important inequalities on Riemannian manifolds, combined with the method of geometric analysis, we studied rigidity problems of compact gradient Ricci-Yamabe solitons, and obtained rigidity result of the nontrivial compact gradient Ricci-Yamabe solitons being equidistant from Euclidean sphere under appropriate conditions. In addition, under the assumption of positive scalar curvature, we proved that n ($4 \leq n \leq 6$) dimensional compact gradient shrinking Ricci-Yamabe solitons that satisfied $L^{n/2}$ integral pinched condition must be Einstein manifolds.

Keywords: gradient Ricci-Yamabe soliton; rigidity; integral pinched condition; scalar curvature

1 引言及主要结果

Hamilton^[1] 创建了 Ricci 流理论, 并提出了可用其作为破解庞加莱猜想的解析方法, 而 Ricci 孤立子即为 Ricci 流的自相似解. Pigola 等^[2] 提出了近 Ricci 孤立子的概念, 并研究了梯度近 Ricci 孤立子的刚性, 即得到了其与 S^n 或 \mathbb{R}^n 等距的结果. Catino^[3] 证明了满足 $L^{n/2}$ -积分拥挤条件的 n ($4 \leq n \leq 6$) 维紧致梯度收缩 Ricci 孤立子等距于欧氏球面 S^n 的商. Dwivedi^[4] 基于近 Ricci 孤立子, 引入了近 Ricci-Bourguignon 孤立子的概念, 并给出了它与欧氏球面 S^n 等距的条件, 得到了一些刚性结果, 这些结果推广了之前近 Ricci 孤立子的部分相应结果. 特别地, 梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子也称为梯度 ρ -Einstein 孤立子^[4]. 文献^[5] 证明了非平凡紧致梯度 ρ -Einstein 孤立子等距于欧氏球面 S^n ; Huang^[6] 证明了紧致梯度收缩 ρ -Einstein 孤立子在积分拥挤条件下的一些刚性结果. Güler 等^[7] 首次给出了

收稿日期: 2023-07-26. 网络首发日期: 2024-02-23.

第一作者简介: 李云超(1998—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事微分几何的研究, E-mail: 2898774673@qq.com. **通信作者简介:** 刘建成(1968—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事微分几何的研究, E-mail: liujc@nwnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12161078).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240221.1637.003>.

Ricci-Yamabe 流的概念, 从而引入了近 Ricci-Yamabe 孤立子.

设 (M^n, \mathbf{g}) 为 n 维 Riemann 流形, 若存在 $\lambda \in C^\infty(M)$ 及 $\mathbf{V} \in \mathcal{X}(M)$, 使得

$$\mathcal{L}_V \mathbf{g} + 2\alpha \mathbf{Ric} = (2\lambda - \beta R) \mathbf{g},$$

则 (M^n, \mathbf{g}) 称为近 Ricci-Yamabe 孤立子^[8], 记为 $(M^n, \mathbf{g}, \mathbf{V}, \lambda, \alpha, \beta)$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, \mathbf{Ric} 表示 M^n 的 Ricci 曲率张量, R 表示数量曲率, $\mathcal{L}_V \mathbf{g}$ 表示度量 \mathbf{g} 沿 \mathbf{V} 方向的李导数. \mathbf{V} 称为孤立子场, λ 称为孤立子函数. 若孤立子场 \mathbf{V} 可表示为一个光滑函数 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的梯度, 即 $\mathbf{V} = \nabla f$, 则 M^n 称为梯度近 Ricci-Yamabe 孤立子, 简记为 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$. 此时孤立子方程变为

$$\nabla^2 f + \alpha \mathbf{Ric} = \left(\lambda - \frac{1}{2} \beta R \right) \mathbf{g}. \tag{1}$$

特别地, 若 λ 为常值函数, 则 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 即为梯度 Ricci-Yamabe 孤立子. 当 $\lambda > 0$ ($\lambda = 0$ 或 $\lambda < 0$) 时, $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 称为收缩(稳定或扩张)的梯度 Ricci-Yamabe 孤立子. 此外, 当 f 为常数时, 则称孤立子是平凡的.

近年来, 对近 Ricci-Yamabe 孤立子的研究备受关注, 其中文献[8]分别证明了具有非平凡共形向量场的紧致近 Ricci-Yamabe 孤立子和具有非负数量曲率且势向量场为非平凡共形向量场的完备梯度近 Ricci-Yamabe 孤立子等距于欧氏球面 S^n . 特别地, 文献[8]还证明了具有常数量曲率的非平凡紧致梯度近 Ricci-Yamabe 孤立子等距于欧氏球面 S^n . 显然, 该结论对梯度 Ricci-Yamabe 孤立子也成立. 本文探讨梯度 Ricci-Yamabe 孤立子具有常数量曲率的充分条件, 得到如下结果.

定理 1 设 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 是 n ($n \geq 3$) 维非平凡紧致梯度 Ricci-Yamabe 孤立子, 若 $\alpha \notin \{0, -n\beta/2\}$, 则 M^n 有常数量曲率, 进而 M^n 等距于欧氏球面 S^n .

文献[3]证明了 n ($4 \leq n \leq 6$) 维紧致梯度收缩 Ricci 孤立子在积分拼接条件

$$\sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)}} \lambda V(M)^{2/n} + \left(\int_M \left| \mathbf{W} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n-2)}} \mathbf{Ric} \lrcorner \mathbf{g} \right|^{n/2} dv_g \right)^{2/n} < \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}} Y(M, [\mathbf{g}])$$

下等距于欧氏球面 S^n 的商, 其中 \lrcorner 表示 Kulkarni-Nomizu 积. 文献[6]在上述相同积分拼接条件下得到了 n ($4 \leq n \leq 6$) 维紧致梯度收缩 ρ -Einstein 孤立子等距于欧氏球面 S^n 的商的结果. 受此启发, 本文在 Ricci-Yamabe 孤立子上考虑类似的问题, 得到如下结果.

定理 2 设 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 是具有正数量曲率的 n ($4 \leq n \leq 6$) 维紧致梯度收缩 Ricci-Yamabe 孤立子, 其中 $\alpha > 0, \beta \geq 0$, 若

$$\sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8\alpha^2(n-2)}} \lambda V(M)^{2/n} + \left(\int_M \left| \mathbf{W} \right|^2 + \frac{8}{n(n-2)} \left| \mathbf{Ric} \right|^2 \right)^{n/4} dv_g < \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}} Y(M, [\mathbf{g}]), \tag{2}$$

则 (M^n, \mathbf{g}) 是 Einstein 流形.

2 预备知识及引理

约定本文出现的重复指标均理解为对该指标从 1 到 n 求和, 并省略求和符号. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 Riemann 流形 (M^n, \mathbf{g}) 的局部标准正交标架场, 并记标架下 Riemann 曲率张量的分量为 R_{ijkl} . 于是, Ricci 曲率张量 \mathbf{Ric} 的分量表示为

$$R_{ik} = \text{Ric}(e_i, e_k) = g^{jl} R_{ijkl},$$

数量曲率 R 表示为

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{ik} g^{jl} R_{ijkl},$$

无迹 Ricci 曲率张量 $\mathring{\mathbf{Ric}}$ 定义^[9]为

$$\mathring{\mathbf{Ric}} = \mathbf{Ric} - \frac{R}{n} \mathbf{g},$$

其分量表示为

$$\mathring{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}, \tag{3}$$

从无迹 Ricci 曲率张量的定义可见, (M^n, \mathbf{g}) 是 Einstein 流形当且仅当 $\mathring{\mathbf{Ric}}$ 恒为 0.

先后缩并第二 Bianchi 恒等式 $(R_{hilj,k} + R_{hijk,l} + R_{hikl,j} = 0)$ 中的指标 h, l 和指标 i, j , 可得

$$R_{ik,i} = \frac{1}{2}R_{,k}, \tag{4}$$

再结合无迹 Ricci 曲率张量的定义式(3)可得

$$R_{jkil,l} = \mathring{R}_{ij,k} - \mathring{R}_{ik,j} + \frac{R_{,k}}{n}g_{ij} - \frac{R_{,j}}{n}g_{ik}, \tag{5}$$

$$\mathring{R}_{ik,i} = \frac{n-2}{2n}R_{,k}. \tag{6}$$

Weyl 共形曲率张量 \mathbf{W} 定义^[10]为

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{7}$$

将式(7)与无迹 Ricci 张量的定义式(3)结合有

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(\mathring{R}_{ik}g_{jl} + \mathring{R}_{jl}g_{ik} - \mathring{R}_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{jk}g_{il}) + \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \tag{8}$$

设 u 是 Riemann 流形 (M^n, \mathbf{g}) ($n \geq 3$) 上任意局部的 Lipschitz 函数, F 是其上的任意光滑函数, 则 M^n 上加权 Laplace 算子 Δ_F 定义^[9]为

$$\Delta_F u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla F \rangle = e^F \operatorname{div}(e^{-F} \nabla u).$$

(M^n, \mathbf{g}) 的 Yamabe 不变量 $Y(M, [\mathbf{g}])$ 定义^[3]为

$$Y(M, [\mathbf{g}]) = \frac{4(n-1)}{n-2} \inf_{u \in W^{1,2}(M)} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R u^2 dv_g}{\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{(n-2)/n}}.$$

由文献[6]可知在数量曲率为正的假设下, Ricci-Yamabe 孤立子的 Yamabe 不变量 $Y(M, [\mathbf{g}]) > 0$. 因此, 在 Ricci-Yamabe 孤立子上, 对任意 $u \in W^{1,2}(M)$, 成立如下 Yamabe-Sobolev 不等式:

$$\frac{n-2}{4(n-1)} Y(M, [\mathbf{g}]) \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{(n-2)/n} \leq \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R u^2 dv_g. \tag{9}$$

引理 1^[8] 设 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ ($n \geq 3$) 是非平凡紧致梯度 Ricci-Yamabe 孤立子, 其中 $\alpha \neq 0$, 若 M^n 有常数量曲率, 则 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 等距于欧氏球面 S^n .

引理 2 若 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 是梯度 Ricci-Yamabe 孤立子, 则下列各式成立:

$$2\Delta f + (2\alpha + n\beta)R = 2n\lambda, \tag{10}$$

$$\mathring{R}_{ij} = \left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta R}{2\alpha} - \frac{R}{n} \right) g_{ij} - \frac{1}{\alpha} f_{,ij}, \tag{11}$$

$$a\mathring{R}_{ij,k} - a\mathring{R}_{ik,j} = R_{jkil}f_{,l} - \left(\frac{\beta}{2}R_{,k} + \frac{\alpha}{n}R_{,k} \right) g_{ij} + \left(\frac{\beta}{2}R_{,j} + \frac{\alpha}{n}R_{,j} \right) g_{ik}, \tag{12}$$

$$\frac{\alpha}{2}R_{,ij} = \frac{(1-n)\beta}{2}R_{,ij} + \mathring{R}_{il,j}f_{,l} + \mathring{R}_{il}f_{,jl} + \frac{R_{,j}}{n}f_{,i} + \frac{R}{n}f_{,ji}. \tag{13}$$

证明: 对式(1)求迹即可得式(10). 根据式(1)及无迹 Ricci 张量的定义即证得式(11). 为证式(12), 由式(1)易见 $f_{,ijk} + \alpha R_{ij,k} = -\frac{\beta}{2}R_{,k}g_{ij}$, 应用 Ricci 恒等式得

$$f_{,ikj} - f_{,ijk} = R_{jkil}f_{,l} = -\frac{\beta}{2}R_{,j}g_{ik} - aR_{ik,j} + \frac{\beta}{2}R_{,k}g_{ij} + \alpha R_{ij,k},$$

再结合无迹 Ricci 张量的定义即证得式(12).

根据式(1)和 Ricci 恒等式得

$$\alpha R_{ik,i} = -\frac{\beta}{2}R_{,k} - (\Delta f)_k - R_{kl}f_{,l}. \tag{14}$$

将式(10)代入式(14)所得结果再结合式(4)进行简单计算, 得

$$\frac{\alpha}{2}R_{,k} = \frac{(1-n)\beta}{2}R_{,k} + R_{kl}f_{,l}. \tag{15}$$

对式(15)两边再次求协变微分, 得

$$\frac{\alpha}{2}R_{,kj} = \frac{(1-n)\beta}{2}R_{,kj} + R_{kl,j}f_{,l} + R_{kl}f_{,lj}.$$

由无迹 Ricci 张量的定义即证得式(13). 证毕.

引理 3 若 $(M^n, \mathbf{g}, \nabla f, \lambda, \alpha, \beta)$ 是 $n(n \geq 4)$ 维梯度 Ricci-Yamabe 孤立子, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_f |\mathbf{Ric}|^2 &= |\nabla \mathbf{Ric}|^2 + \frac{(2-n)\beta}{2\alpha} \mathring{R}_{ij}R_{,ij} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij,l}f_{,l} - 2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{kl}W_{jkil} + \\ &\frac{4}{n-2} \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl} + 2\left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta R}{2\alpha} - \frac{R}{n} + \frac{R}{n(n-1)}\right) |\mathbf{Ric}|^2. \end{aligned} \tag{16}$$

证明: 根据加权 Laplace 算子的定义直接计算, 得

$$\frac{1}{2}\Delta_f |\mathbf{Ric}|^2 = \frac{1}{2}\Delta |\mathbf{Ric}|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla |\mathbf{Ric}|^2, \nabla f \rangle = |\nabla \mathbf{Ric}|^2 + \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij,kk} - \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij,k}f_{,k}. \tag{17}$$

对式(17)右端第二项应用式(12)有

$$\begin{aligned} \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij,kk} &= \mathring{R}_{ij}\left(\mathring{R}_{ik,j} + \frac{1}{\alpha}R_{jkil}f_{,l} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{2}R_{,k} + \frac{\alpha}{n}R_{,k}\right)g_{ij} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{2}R_{,j} + \frac{\alpha}{n}R_{,j}\right)g_{ik}\right)_k = \\ &\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ik,jk} + \frac{1}{\alpha}\mathring{R}_{ij}R_{jkil}f_{,l} + \frac{1}{\alpha}\mathring{R}_{ij}R_{jkil}f_{,lk} + \frac{\beta}{2\alpha}\mathring{R}_{jk}R_{,jk} + \frac{1}{n}\mathring{R}_{jk}R_{,jk}. \end{aligned} \tag{18}$$

进一步, 对式(18)右端第一项应用 Ricci 恒等式, 得

$$\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ik,jk} = \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ik,kj} + \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{kl}R_{kijl} + \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{il}R_{kjkl}. \tag{19}$$

结合式(5), 式(18)右端第二项即为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}\mathring{R}_{ij}R_{jkil,k}f_{,l} &= \frac{1}{\alpha}\left(\mathring{R}_{ij}\left(\mathring{R}_{ji,l} + \frac{R_{,l}}{n}g_{ji} - \mathring{R}_{jl,i} - \frac{R_{,i}}{n}g_{jl}\right)f_{,l}\right) = \\ &\frac{1}{\alpha}\left(\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ji,l}f_{,l} - \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jl,i}f_{,l} - \frac{1}{n}\mathring{R}_{il}R_{,i}f_{,l}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

将式(19), (20)代入式(18), 并结合式(6)和式(11)得

$$\begin{aligned} \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij,kk} &= \frac{1}{2}\mathring{R}_{ij}R_{,ij} + \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl} + \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij} \frac{R}{n} - 2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{lk}R_{jkil} + \\ &\frac{1}{\alpha}\left(\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ji,l}f_{,l} - \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jl,i}f_{,l} - \frac{1}{n}R_{,i}\mathring{R}_{il}f_{,l}\right) + \\ &\left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta R}{2\alpha} - \frac{R}{n}\right) |\mathbf{Ric}|^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\mathring{R}_{jk}R_{,jk}. \end{aligned} \tag{21}$$

将式(13)代入式(21)右端第一项, 再将所得结果代入式(17), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_f |\mathbf{Ric}|^2 &= |\nabla \mathbf{Ric}|^2 + \frac{(2-n)\beta}{2\alpha} \mathring{R}_{ij}R_{,ij} + 2\left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta R}{2\alpha} - \frac{R}{n}\right) |\mathbf{Ric}|^2 - \\ &2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{lk}R_{jkil} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ij,l}f_{,l}. \end{aligned} \tag{22}$$

最后, 将式(8)和式(22)结合即完成证明.

引理 4^[3] 设 (M^n, \mathbf{g}) 是 $n(n \geq 4)$ 维 Riemann 流形, 则

$$\left| -W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{2}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk} \right| \leq \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left(|\mathbf{W}|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{Ric}|^2.$$

3 主要结果的证明

3.1 定理 1 的证明

由梯度 Ricci-Yamabe 孤立子方程可知

$$f_{,ij} + \alpha R_{ij} = \left(\lambda - \frac{1}{2} \beta R\right) g_{ij}, \tag{23}$$

由 Ricci 恒等式有

$$\Delta(f_{,i}) = (\Delta f)_i + R_{ij} f_{,j}. \tag{24}$$

对式(24)左边结合式(23)可得

$$\Delta(f_{,i}) = (f_{,ij})_j = \left(-\alpha R_{ij} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \beta R\right) g_{ij}\right)_j = -\frac{1}{2} \alpha R_{,i} - \frac{1}{2} \beta R_{,i}, \tag{25}$$

对式(24)右边第一项结合式(10)可得

$$(\Delta f)_i = \left(-\frac{1}{2} (2\alpha + n\beta) R + n\lambda\right)_i = \left(-\alpha - \frac{1}{2} n\beta\right) R_{,i}, \tag{26}$$

将式(25), (26)代入式(24)得

$$\left(-\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta\right) R_{,i} = \left(-\alpha - \frac{1}{2} n\beta\right) R_{,i} + R_{ij} f_{,j}. \tag{27}$$

对式(27)两边求协变导数即有

$$\left(-\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta\right) R_{,i;l} = \left(-\alpha - \frac{1}{2} n\beta\right) R_{,i;l} + R_{ij,l} f_{,j} + R_{ij} f_{,j;l},$$

再求迹得

$$\frac{1}{2} (\alpha + (n-1)\beta) \Delta R = \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{R}{n} \Delta f,$$

即

$$\frac{n}{2} (\alpha + (n-1)\beta) \Delta R = \frac{n}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + R \Delta f. \tag{28}$$

对式(28)在 M^n 上积分并使用散度定理, 有

$$\int_M R \Delta f dv_g = \int_M \frac{n}{2} (\alpha + (n-1)\beta) \Delta R dv_g - \frac{n}{2} \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dv_g = \frac{n}{2} \int_M R \Delta f dv_g. \tag{29}$$

由于 $n \geq 3$, 故式(29)成立当且仅当

$$\int_M R \Delta f dv_g = 0. \tag{30}$$

结合式(10), 式(30)即为

$$\int_M R \Delta f dv_g = \int_M R \left(-\frac{1}{2} (2\alpha + n\beta) R + n\lambda\right) dv_g = 0,$$

改写成

$$-\frac{2\alpha + n\beta}{2} \int_M R \left(R - \frac{2n\lambda}{2\alpha + n\beta} n\lambda\right) dv_g = 0. \tag{31}$$

另一方面, 将式(10)在 M^n 上积分并使用散度定理, 得

$$-\frac{2\alpha + n\beta}{2} \int_M \left(R - \frac{2n\lambda}{2\alpha + n\beta} n\lambda\right) dv_g = 0. \tag{32}$$

由于假设 $\alpha \neq -\frac{n\beta}{2}$, 故由式(31), (32)有

$$\int_M \left(R - \frac{2n\lambda}{2\alpha + n\beta}\right)^2 dv_g = 0,$$

因此 $R = \frac{2n\lambda}{2\alpha + n\beta}$, 即数量曲率为常数, 再由引理 1 可知 M^n 等距于 S^n . 定理 1 证毕.

3.2 定理 2 的证明

将式(10)在 M^n 上积分并结合式(9), 可得

$$\lambda V(M)^{2/n} = \frac{2\alpha + n\beta}{2n} V(M)^{(2-n)/n} \int_M R dv_g \geq \frac{2\alpha + n\beta}{2n} Y(M, [\mathbf{g}]) \geq \frac{\alpha}{n} Y(M, [\mathbf{g}]),$$

其中 $V(M) = \int_M dv_g$. 因此当 $n \geq 7$ 时, 积分拥挤条件式(2)不成立.

由式(16)及 Kato 不等式 $|\nabla \mathbf{Ric}|^2 \geq |\nabla |\mathbf{Ric}||^2$ 知,

$$0 \geq -\frac{1}{2}\Delta_f |\mathbf{Ric}|^2 + |\nabla |\mathbf{Ric}||^2 + \frac{(2-n)\beta}{2\alpha} \mathring{R}_{ij} R_{,ij} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{ij, f, l} - 2\mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{kl} W_{jkil} + \frac{4}{n-2} \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{ij} + 2\left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta R}{2\alpha} - \frac{R}{n} + \frac{R}{n(n-1)}\right) |\mathbf{Ric}|^2. \tag{33}$$

对式(33)应用引理 4 并在 M^n 上积分, 再注意到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_M \Delta_f |\mathbf{Ric}|^2 dv_g &= -\frac{1}{2} \int_M (\Delta |\mathbf{Ric}|^2 - \langle \nabla |\mathbf{Ric}|^2, \nabla f \rangle) dv_g = \\ &= -\frac{1}{2} \int_M (\Delta |\mathbf{Ric}|^2 - (\operatorname{div}(|\mathbf{Ric}|^2 \nabla f) - |\mathbf{Ric}|^2 \Delta f)) dv_g = \\ &= -\frac{1}{2} \int_M |\mathbf{Ric}|^2 \Delta f dv_g, \\ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_M \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{ij, f, l} dv_g &= \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \int_M \langle \nabla |\mathbf{Ric}|^2, \nabla f \rangle dv_g = \\ &= \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \int_M (\operatorname{div}(|\mathbf{Ric}|^2 \nabla f) - |\mathbf{Ric}|^2 \Delta f) dv_g = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right) \int_M |\mathbf{Ric}|^2 \Delta f dv_g, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} 0 \geq & -\frac{1}{2\alpha} \int_M |\mathbf{Ric}|^2 \Delta f dv_g + \int_M |\nabla |\mathbf{Ric}||^2 dv_g + \frac{(2-n)\beta}{2\alpha} \int_M \mathring{R}_{ij} R_{,ij} dv_g - \\ & \sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} \int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2\right)^{1/2} |\mathbf{Ric}|^2 dv_g + \\ & \frac{2\lambda}{\alpha} \int_M |\mathbf{Ric}|^2 dv_g + \left(-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)}\right) \int_M R |\mathbf{Ric}|^2 dv_g. \end{aligned} \tag{34}$$

将式(34)右端第三项与式(6)相结合, 得

$$\frac{(2-n)\beta}{2\alpha} \int_M \mathring{R}_{ij} R_{,ij} dv_g = \frac{(n-2)^2 \beta}{4\alpha n} \int_M |\nabla R|^2 dv_g, \tag{35}$$

再将式(10)代入式(34), 并结合式(35), 式(34)变为

$$\begin{aligned} 0 \geq & -\frac{n-4}{2\alpha} \lambda \int_M |\mathbf{Ric}|^2 dv_g + \int_M |\nabla |\mathbf{Ric}||^2 dv_g + \frac{(n-2)^2 \beta}{4\alpha n} \int_M |\nabla R|^2 dv_g - \\ & \sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} \int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2\right)^{1/2} |\mathbf{Ric}|^2 dv_g + \\ & \left(\frac{2\alpha + n\beta}{4\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)}\right) \int_M R |\mathbf{Ric}|^2 dv_g. \end{aligned} \tag{36}$$

对式(36)右端第一、第二、第四项分别有如下估计. 首先根据式(9)得

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla |\mathbf{Ric}||^2 dv_g &\geq \frac{n-2}{4(n-1)} Y(M, [g]) \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g\right)^{(n-2)/n} - \\ &= \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R |\mathbf{Ric}|^2 dv_g. \end{aligned} \tag{37}$$

应用 Hölder 不等式有

$$\int_M |\mathbf{Ric}|^2 dv_g \leq V(M)^{2/n} \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g\right)^{(n-2)/n}. \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2\right)^{1/2} |\mathbf{Ric}|^2 dv_g &\leq \\ &= \left(\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2\right)^{n/4} dv_g\right)^{2/n} \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g\right)^{(n-2)/n}. \end{aligned} \tag{39}$$

将式(37)~(39)代入式(36), 得

$$\begin{aligned}
0 \geq & -\frac{n-4}{2\alpha}V(M)^{2/n} \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g \right)^{(n-2)/n} + \frac{n-2}{4(n-1)}Y(M, [\mathbf{g}]) \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g \right)^{(n-2)/n} - \\
& \sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} \left(\int_M \left(|\mathbf{W}|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2 \right)^{n/4} dv_g \right)^{2/n} \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g \right)^{(n-2)/n} + \\
& \left(-\frac{n-2}{4(n-1)} + \frac{2\alpha+n\beta}{4\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} \right) \times \\
& \left(\int_M R |\mathbf{Ric}|^2 dv_g \right) + \frac{(n-2)^2\beta}{4\alpha n} \int_M |\nabla R|^2 dv_g. \tag{40}
\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}
-\frac{n-2}{4(n-1)} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{2} &= \frac{(n-4)^2}{4n(n-1)} \geq 0, \\
\frac{n\beta}{4\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} &\geq 0.
\end{aligned}$$

由定理 2 假设条件及式(40)可得

$$\begin{aligned}
0 \geq & \left[-\frac{n-4}{2\alpha}V(M)^{2/n} + \frac{n-2}{4(n-1)}Y(M, [\mathbf{g}]) - \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} \left(\int_M \left(|\mathbf{W}|^2 + \frac{8}{n(n-2)} |\mathbf{Ric}|^2 \right)^{n/4} dv_g \right)^{2/n} \right] \left(\int_M |\mathbf{Ric}|^{2n/(n-2)} dv_g \right)^{(n-2)/n}. \tag{41}
\end{aligned}$$

最后由式(41)再结合条件式(2)知 $|\mathbf{Ric}|=0$, 即 (M^n, \mathbf{g}) 是 Einstein 流形. 定理 2 得证.

参 考 文 献

[1] HAMILTON R S. Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature [J]. Journal of Differential Geometry, 1982, 17(2): 255-306.

[2] PIGOLA S, RIGOLI M, RIMOLDI M, et al. Ricci almost Solitons [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 2011, 10(4): 757-799.

[3] CATINO G. Integral Pinched Shrinking Ricci Solitons [J]. Advances in Mathematics, 2016, 303: 279-294.

[4] DWIVEDI S. Some Results on Ricci-Bourguignon Solitons and almost Solitons [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2021, 64(3): 591-604.

[5] SHAIKH A A, MONDAL C K, MANDAL P. Compact Gradient ρ -Einstein Soliton Is Isometric to the Euclidean Sphere [J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2021, 52: 335-339.

[6] HUANG G Y. Integral Pinched Gradient Shrinking ρ -Einstein Solitons [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 451(2): 1045-1055.

[7] GÜLER S, CRASMAREANU M. Ricci-Yamabe Maps for Riemannian Flows and Their Volume Variation and Volume Entropy [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2019, 43(5): 2631-2641.

[8] KHATRI M, ZOSANGZUALA C, SINGH J P. Isometries on almost Ricci-Yamabe Solitons [J]. Arabian Journal of Mathematics, 2023, 12: 127-138.

[9] CHU Y W, ZHOU J D, WANG X. Rigidity of Complete Generic Shrinking Ricci Solitons [J]. Journal of Geometry and Physics, 2018, 124: 255-263.

[10] BESSE A L. Einstein Manifolds [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987: 1-516.

(责任编辑: 赵立芹)