

单圈图的邻点全和可区别全染色

李志军, 文 飞

(兰州交通大学 应用数学研究所, 兰州 730070)

摘要: 用结构分析法完整刻画单圈图 U 的邻点全和可区别全染色, 并得到当 $U \cong C_n$ 且 $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ 时, $\text{ftndi}_\Sigma(U) = \Delta(U) + 2$; 其他情况下, $\text{ftndi}_\Sigma(U) = \Delta(U) + 1$. 表明邻点全和可区别全染色猜想在任意单圈图上都成立.

关键词: 单圈图; 正常全染色; 邻点全和可区别全染色; 邻点全和可区别全染色数

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0497-06

Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Unicyclic Graph

LI Zhijun, WEN Fei

(Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: By using structural analysis method, we completely characterized the neighbor full sum distinguishing total coloring of unicyclic graph U , and obtained that $\text{ftndi}_\Sigma(U) = \Delta(U) + 2$ when $U \cong C_n$ and $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, $\text{ftndi}_\Sigma(U) = \Delta(U) + 1$ in other cases. This result shows that the neighbor full sum distinguishing total coloring conjecture holds on any unicyclic graph.

Keywords: unicyclic graph; proper total coloring; neighbor full sum distinguishing total coloring; neighbor full sum distinguishing total chromatic number

1 引言及主要结果

本文考虑的图均为无向简单连通图, 设 $G = (V, E)$ 是一个简单图, 其中 $V(G)$ 表示 G 的顶点集, $E(G)$ 表示 G 的边集. 如果 G 不含孤立边, 则 G 称为正常图. 对任意的 $v \in V(G)$, 用 $d_G(v)$ (或 $d(v)$) 表示点 v 的度, $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度. 用 $N_G(v)$ (或 $N(v)$) 表示顶点 v 在 G 中所有邻点构成的集合.

图染色问题在计算机科学、通讯网络、交通运输等领域应用广泛. 目前, 关于图染色的研究已有很多结果, 例如: Karoński 等^[1]首次提出了图的邻和可区别边染色; 张忠辅等^[2]提出了图的邻点强可区别全染色的概念及相关问题; Przybyło 等^[3]提出了图的邻和可区别全染色; Piłśniak 等^[4]研究了一些特殊图的邻和可区别全染色数; Flandrin 等^[5]定义了图的邻点被扩展和可区别全染色, 研究了一些图类的邻点被扩展和可区别全染色数, 并在该染色的基础上提出了邻点全和可区别全染色. 崔福祥等^[6]研究了路、圈、星、轮、完全二部图、完全图以及树的邻点全和可区别全染色数, 并给出了图的邻点全和可区别全染色的概念.

定义 1^[6] 设 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 是图 G 的一个正常 k -全染色. 令 $\phi(v) = f(v) +$

收稿日期: 2023-08-28. 网络首发日期: 2024-05-09.

第一作者简介: 李志军(1998—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事图染色的研究, E-mail: lzj12282023@163.com. **通信作者简介:** 文 飞(1984—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事图染色和图谱理论的研究, E-mail: wenfei@ljztu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11961041; 12261055)和甘肃省自然科学基金(批准号: 21JR11RA135).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20240508.0957.001>.

$\sum_{v \in e} f(e) + \sum_{u \in N(v)} f(u)$, 其中 $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. 对任意的 $uv \in E(G)$, 若 $\phi(u) \neq \phi(v)$ 成立, 则称 f 是图 G 的一个邻点全和可区别 k -全染色, 简记为 k -NFSDTc. 将所用的最小颜色数 k 称为 G 的邻点全和可区别全染色数, 记作 $\text{ftndi}_\Sigma(G)$. 即

$$\text{ftndi}_\Sigma(G) = \min\{k \mid G \text{ 具有一个 } k\text{-邻点全和可区别全染色}\}.$$

特别地, 在图 G 的一个正常 k -全染色 f 下, 如果对任意的 $uv \in E(G)$, 若 $\phi(u) \neq \phi(v)$ 成立, 则称 u 和 v 在 f 下是邻点全和可区别全可染的.

崔福祥等^[6]基于一些特殊图类上邻点全和可区别全染色的研究, 给出如下猜想:

猜想 1^[6] 设 G 是一个正常图, 则 $\text{ftndi}_\Sigma(G) \leq \Delta(G) + 2$.

崔福祥等^[7]又研究了路与路、路与圈、圈与圈三类联图的邻点全和可区别全染色; 叶宏波等^[8]给出了路与路、路与圈的笛卡尔积图的邻点全和可区别全染色数.

通常将连通的无圈图称为树, 点数与边数相同的连通图称为单圈图, 将具有 $v \geq 3$ 个顶点的单圈图简记为 U . 赵新梅等^[9]给出了单圈图的邻强边染色; 贾秀卿等^[10]研究了单圈图的 $D(2)$ -点可区别边染色, 并给出了其确切的 $D(2)$ -点可区别边色数; 谭钧铭等^[11]用分析法与数学归纳法得到了单圈图的邻和可区别边色数. 基于上述研究结果, 本文用结构分析法结合数学归纳法完全刻画单圈图的邻点全和可区别全染色, 并得到如下结论:

定理 1 设 U 是 $v \geq 3$ 阶的单圈图, 则 $\text{ftndi}_\Sigma(U) = \begin{cases} \Delta(U) + 2, & U \cong C_n \text{ 且 } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ \Delta(U) + 1, & \text{其他.} \end{cases}$

定理 1 进一步说明猜想 1 在任意的单圈图上都成立.

2 引理及主要结果的证明

由定义 1 知, 图的邻点全和可区别全染色首先是一个正常全染色, 因此如下引理成立.

引理 1 设 G 是一个正常图, 则 $\text{ftndi}_\Sigma(G) \geq \Delta(G) + 1$.

引理 2^[6] 对圈 $C_n(n \geq 3)$, 有

$$\text{ftndi}_\Sigma(C_n) = \begin{cases} 4, & n \geq 4 \text{ 且 } n \not\equiv 0 \pmod{3}; \\ 3, & \text{其他.} \end{cases}$$

由定义 1 可知, 悬挂点 x 的全和是其邻点 y 的全和的一部分, 因此如下引理成立.

引理 3 对一个正常图 G , 若 x 是 G 的一个悬挂点, y 是 x 的邻点, 则 $\phi(x) \neq \phi(y)$.

n 阶圈图 C_n 的每个点上都添加一个悬挂边所得的图称为太阳图, 记为 $S_v(v \geq 3)$.

引理 4 设 $S_v(v \geq 6)$ 是太阳图, 则 $\text{ftndi}_\Sigma(S_v) = 4$.

证明: 设 $\mathcal{C} = v_1 v_2 \cdots v_n v_1 (n \geq 3)$ 为太阳图 S_v 上具有 n 个顶点的基本圈, 圈上每个点 v_i 关联的悬挂边为 $v_i x_i$, 其中悬挂点为 $x_i (1 \leq i \leq n)$. 由引理 1 可知, $\text{ftndi}_\Sigma(S_v) \geq 4$, 下证 S_v 有一个 4-NFSDTc. 令 f 为 $V(S_v) \cup E(S_v) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ 的一个映射.

当 $n=3$ 时, S_6 的 4-NFSDTc 如图 1 所示. 当 $n \geq 4$ 时, 对于 $v_k \in V(\mathcal{C}), v_k v_{k+1} \in E(\mathcal{C})$, 悬挂边为 $v_k x_k$, 下面分两种情形分别给出 S_v 的一个 4-邻点全和可区别全染色.

情形 1) 当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 染色方案如下: 若 $k \equiv 1 \pmod{2}$, 则令 $f(v_k) = 1, f(v_k x_k) = 3, f(v_k v_{k+1}) = 2$; 若 $k \equiv 0 \pmod{2}$, 则令 $f(v_k) = 3, f(v_k v_{k+1}) = 4, f(v_k x_k) = 1$; 对于悬挂点 x_i , 令 $f(x_i) = f(v_i v_{i+1})$, 其中 $1 \leq i, k \leq n$. 此时, $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ 为 18, 16 的循环, 即圈上的点都邻点全和可区别; 又由引理 3 可知, 悬挂点与其邻点全和可区别. 因此, f 是 S_v 的一个 4-NFSDTc.

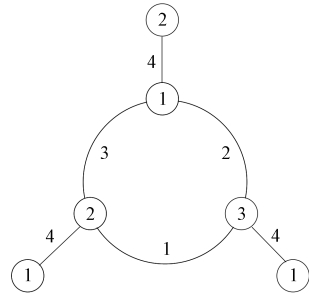


图 1 S_6 的 4-NFSDTc
Fig. 1 4-NFSDTc of S_6

情形 2) 当 $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 染色方案如下: 若 $k \equiv 1 \pmod{2}$, 则令 $f(v_k) = 1, f(v_k x_k) = 3, f(v_k v_{k+1}) = 2$; 若 $k \equiv 0 \pmod{2}$, 则令 $f(v_k) = 3, f(v_k v_{k+1}) = 4, f(v_k x_k) = 1$; 其中 $1 \leq k \leq n-2, f(v_{n-1}) = 3, f(v_{n-1} v_n) = 1, f(v_{n-1} x_{n-1}) = 4, f(v_n) = 2, f(v_n v_1) = 4, f(v_n x_n) = 3$, 对于悬挂点 x_i , 令 $f(x_i) = f(v_i v_{i+1})$, 其中 $1 \leq i \leq n$. 此时, $\phi(v_2), \dots, \phi(v_{n-2})$ 为 16, 18 的循环, $\phi(v_{n-1}) = 14, \phi(v_n) = 18, \phi(v_1) = 17$. 即圈上的点都邻点全和可区别; 又由引理 3 可知, 悬挂点与其邻点全和可区别. 因此, f 是 S_v 的一个 4-NFSDTC.

综上所述, $\text{ftndi}_\Sigma(S_v) = 4$.

注 1 在引理 4 的证明中:

1) 删去所有悬挂点后, 在染色 f 下, 当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 基本圈 \mathcal{C} 上点 v_1, v_2, \dots, v_n 的全和为 13, 11 的循环; 当 $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 基本圈 \mathcal{C} 上点 v_2, v_3, \dots, v_{n-2} 的全和为 11, 13 的循环, v_{n-1}, v_n, v_1 的全和为 9, 11, 12, 此时圈上所有 2 度点之间是邻点全和可区别全可染的;

2) 删去任意一个悬挂点后, 在染色 f 下, 2 度点的全和可能为 9, 11, 12, 13, 而 3 度点的全和为 14, 16, 17, 18. 故圈上所有 2 度点与 3 度点之间是邻点全和可区别全可染的.

太阳图删去一些悬挂点得到的图称为破太阳图, 记为 $S'_v (\nu \geq 3)$. 显然, 任意一个破太阳图 S'_v 都是某个太阳图 S_ω 的子图, 其中 $\nu < \omega$.

引理 5 设 $S'_v (\nu \geq 3)$ 是一个破太阳图, 则 $\text{ftndi}_\Sigma(S'_v) = 4$.

证明: 设 S_ω 是 S'_v 的 2 度点添加悬挂边所得的太阳图. 显然, S'_v 是 S_ω 的一个子图. 由引理 4 可知, S_ω 有一个 4-NFSDTC f . 由注 1 可知, $f' = f|_{S'_v}$ 为 S'_v 的一个 4-NFSDTC, 故结论成立.

引理 6(组合零点定理)^[12] 设 F 为任一域, $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上的多项式.

设 $\deg(P) = \sum_{i=1}^n k_i$, 其中 k_i 为非负整数, 并且 P 中 $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ 的系数非零. 若 $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq F$ 且 $|S_i| > k_i (1 \leq i \leq n)$, 则存在 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$, 使得 $P(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0$.

引理 7 设 G 是 $n \geq 3$ 阶的连通图, v 是 G 的一个悬挂点, v 的邻点为 w 且 w 仅有一个非悬挂邻点, 记为 u . 若 $G' = G - v$ 且 G' 有一个 $(\Delta(G') + 1)$ -NFSDTC, 则 G 存在一个由 f' 所延拓的 $(\Delta(G) + 1)$ -正常全染色 f ; 进一步, 若 f 满足 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同的取值, 则 f 为 G 的一个 $(\Delta(G) + 1)$ -NFSDTC.

证明: 由已知 $G' = G - v$, 所以 $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. 又因为 G' 有一个 $(\Delta(G') + 1)$ -NFSDTC f' , 从而 G' 有一个 $(\Delta(G) + 1)$ -NFSDTC, 不妨记为 f . 由于 v 是 G 的一个悬挂点, 所以 f 也是 G 的一个由 f' 所延拓的 $(\Delta(G) + 1)$ -正常全染色.

在上述 f 下, 注意到 G 中属于 G' 的任意两个相邻点都是邻点全和可区别全可染的. 对于 v 和 w , 由引理 3 知, $\phi_G(v) \neq \phi_G(w)$. 若将 f 扩展为 G 的一个 $(\Delta(G) + 1)$ -NFSDTC, 只需证 $\phi_G(w) \neq \phi_G(u)$. 由 G' 和 G 的关系可知:

$$\phi_G(u) = \phi_{G'}(u), \quad \phi_G(w) = \phi_{G'}(w) + f(wv) + f(v).$$

于是,

$$\phi_G(w) - \phi_G(u) = f(wv) + f(v) + (\phi_{G'}(w) - \phi_{G'}(u)),$$

其中 $\phi_{G'}(w) - \phi_{G'}(u) \neq 0$. 因为 G' 是 $(\Delta(G) + 1)$ -邻点全和可区别全可染的, 其中 $\Delta(G) \geq 3$, 又因为 $d_G(w) \leq \Delta(G)$, 所以 $f(wv)$ 至少有一种色可染, $f(v)$ 至少存在两种色可染. 由于 f 为 G 的一个正常全染色, 因此 $f(v) \neq f(wv)$, 从而 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同的取值. 进一步, 根据引理 6 可知, $\phi_G(w) \neq \phi_G(u)$, 从而 G 在 f 下是 $(\Delta(G) + 1)$ -邻点全和可区别全可染的. 因此, 由引理 1 可知, f 为 G 的一个 $(\Delta(G) + 1)$ -NFSDTC. 证毕.

下面用符号 $[a, b]$ 表示非负整数集 $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b\}$, 其中 a 和 b 都是整数且 $0 \leq a < b$. 令 $d_G(v, H) = \max\{d_G(v, x) \mid v \in V(G) \setminus V(H), x \in V(H)\}$ 为点 v 到 H 的最大距离, 其中 H 是 G 的子图. $C_f(u)$ 表示在染色 f 下 u 点所染的颜色与其关联边的颜色组成的集合.

下面证明定理 1. 设 U 是 $\nu \geq 3$ 阶的单圈图, 若 $U \cong C_n$, 则由引理 2 可知结论成立. 否则, 记

$\mathcal{C} = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 为单圈图 U 上的基本圈, 下面根据 U 的最大度分两种情形讨论.

情形 1) $\Delta(U) = 3$.

① 悬挂点的邻点不在基本圈 \mathcal{C} 上.

对 U 的阶 ν 做归纳. 当 $\nu = 5$ 时的单圈图及其染色如图 2 所示, 可知结论成立. 假设对阶数小于 ν 且 $\Delta(U) = 3$ 的单圈图结论成立, 下面考虑阶数等于 ν 时结论成立.

设 U 与 \mathcal{C} 上顶点距离最大的一个悬挂点为 v , v 的邻点为 w 且 w 的非悬挂点的邻点为 u , 其中 $d_U(w) \geq 2, d_U(u) \geq 2$. 令 $U' = U - v$, 由归纳假设, U' 有一个 4 -NFSDTC f' . 显然, f' 是 U' 的一个正常全染色, 定义 U 的染色 $f: f(v) = f'(v), v \in V(U'); f(e) = f'(e), e \in E(U')$. 由引理 7 可知, 只需证明 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同的取值时, 即可证明结论成立.

当 $d_U(w) = d_U(u) = 2$ 时, $d_{U'}(w) = d_U(w) - 1 = 1$, 令 $I = [1, 4] \setminus C_{f'}(w)$, 则 $|I| = 2$. 令 $f(wv) \in I, f(v) \in [1, 4] \setminus \{f(wv), f(w)\}$. 由于 f 是 U 的一个正常全染色, $f(v) \neq f(wv), f(v) \neq f(w)$, 所以 $f(v)$ 有两个不同的值可取, 故 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同的取值. 当 $d_U(w) = 2, d_U(u) = 3$ 时, 类似可证.

当 $d_U(w) = d_U(u) = 3$ 时, $d_{U'}(w) = d_U(w) - 1 = 2$, 令 $I = [1, 4] \setminus C_{f'}(w)$, 则 $|I| = 1$. 令 $f(wv) \in I, f(v) \in [1, 4] \setminus \{f(wv), f(w)\}$. 由于 f 是 U 的一个正常全染色, $f(v) \neq f(wv), f(v) \neq f(w)$, 所以 $f(v)$ 有两个不同的值可取, 故 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同的取值. 当 $d_U(w) = 3, d_U(u) = 2$ 时, 类似可证.

② 悬挂点的邻点在基本圈 \mathcal{C} 上.

若 \mathcal{C} 的每个点都有悬挂边, 则 U 为太阳图. 由引理 4 知, U 有一个 4 -NFSDTC f . 反之, 若 \mathcal{C} 上至少有一个点没有悬挂边, 则 U 为破太阳图. 由引理 5 知, U 有一个 4 -NFSDTC f .

情形 2) $\Delta(U) \geq 4$.

① 悬挂点的邻点不在基本圈 \mathcal{C} 上.

对 U 的阶 ν 使用数学归纳法. 当 $\nu = 6$ 时, U 如图 3 所示, 给出 U 的一个 $(\Delta(U) + 1)$ -NFSDTC.

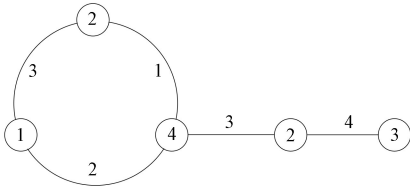


图 2 $\nu = 5$ 且 $\Delta = 3$ 时的单圈图及其染色

Fig. 2 Unicyclic graph with $\nu = 5, \Delta = 3$ and its coloring

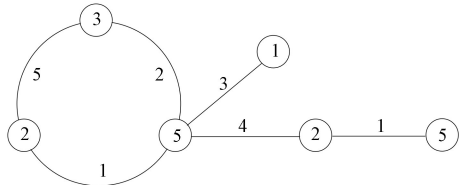


图 3 $\nu = 6$ 且 $\Delta = 4$ 时的单圈图及其染色

Fig. 3 Unicyclic graph with $\nu = 6, \Delta = 4$ and its coloring

当 $\nu \geq 7$ 时, 假设对满足条件的 $(\nu - 1)$ 阶单圈图, 有 $(\Delta(U) + 1)$ -NFSDTC. 下面考虑满足条件的 ν 阶单圈图.

选取 U 与 \mathcal{C} 上顶点距离最大的一个悬挂点 v , 且 v 的邻点 w 不在圈上, 而 w 仅有一个非悬挂邻点 u , 如图 4 所示.

令 $U' = U - v$, 由归纳假设知, $\text{ftndi}_\Sigma(U') = \Delta(U') + 1$. 令 f' 是 U' 的一个 $(\Delta(U') + 1)$ -NFSDTC. 定义 U 的染色 $f: f(v) = f'(v), v \in V(U'); f(e) = f'(e), e \in E(U')$. 由引理 7 可知, 只需证明 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同的取值, 即可证明结论成立. 下面根据最大度顶点是否相邻分两种情形讨论.

(i) U 中不存在两个相邻的最大度点.

当 $d_U(u) \leq d_U(w)$ 时, 由于 $d_U(w) = d_U(w) - 1 \leq \Delta(U) - 1$ 且 U 中不存在两个相邻的最大度点,

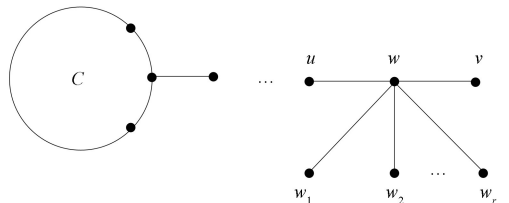


图 4 悬挂点的邻点不在基本圈上

Fig. 4 Neighbors of pendant vertex out of basic cycle

令 $I = [1, \Delta(U) + 1] \setminus C_f(w)$, 则 $|I| \geq 1$. 令 $f(wv) \in I, f(v) \in [1, \Delta(U) + 1] \setminus \{f(wv), f(w)\}$. 由于 f 是 U 的一个正常全染色, $f(v) \neq f(wv), f(v) \neq f(w)$, 所以 $f(v)$ 至少有两个不同的值可取, 故 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同取值.

当 $d_U(u) = d_U(w) + 1$ 时, 由于 U 中不存在两个相邻的最大度点, 所以 $d_U(u) = d_U(w) < \Delta(U)$, 即 $\Delta(U') = \Delta(U)$, 故有 $d_U(w) = d_U(w) - 1 < \Delta(U) - 1$. 令 $I = [1, \Delta(U) + 1] \setminus C_f(w)$, 则 $|I| \geq 2$. 令 $f(wv) \in I, f(v) \in [1, \Delta(U) + 1] \setminus \{f(wv), f(w)\}$. 由于 f 是 U 的一个正常全染色, $f(v) \neq f(wv), f(v) \neq f(w)$, 所以 $f(v)$ 至少有两个不同的值可取, 故 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同取值.

当 $d_U(u) \geq d_U(w) + 2$ 时, $d_U(w) \leq d_U(u) - 2 \leq \Delta(U) - 2$. 令 $I = [1, \Delta(U) + 1] \setminus C_f(w)$, 则 $|I| \geq 2$. 令 $f(wv) \in I, f(v) \in [1, \Delta(U) + 1] \setminus \{f(wv), f(w)\}$, 由于 f 是 U 的一个正常全染色, $f(v) \neq f(wv), f(v) \neq f(w)$, 所以 $f(v)$ 至少有两个不同的值可取, 故 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同取值.

(ii) U 中存在两个相邻的最大度顶点.

当 $d_U(u) \leq d_U(w)$ 时, 如情形(i)类似可证. 当 $d_U(u) = d_U(w) + 1$ 时, 由于 U 中存在两个相邻的最大度顶点, 所以 $d_U(u) = d_U(w) \leq \Delta(U)$. 若 $d_U(u) = d_U(w) = \Delta(U), d_U(w) = \Delta(U) - 1$, 令 $I = [1, \Delta(U) + 1] \setminus C_f(w)$, 则 $|I| = 1$. 若 $d_U(u) = d_U(w) \leq \Delta(U) - 1, d_U(w) = d_U(w) - 1 \leq \Delta(U) - 1$, 令 $I = [1, \Delta(U) + 1] \setminus C_f(w)$, 则 $|I| \geq 2$.

令 $f(wv) \in I, f(v) \in [1, \Delta(U) + 1] \setminus \{f(wv), f(w)\}$. 由于 f 是 U 的一个正常全染色, $f(v) \neq f(wv), f(v) \neq f(w)$, 所以 $f(v)$ 至少有两个不同的值可取, 故 $f(v) + f(wv)$ 至少有两个不同取值.

当 $d_U(u) \geq d_U(w) + 2$ 时, 如情形(i)类似可证.

② 悬挂点的邻点在基本圈 \mathcal{C} 上.

对 U 的阶 ν 使用数学归纳法. 当 $\nu = 5$ 时, U 如图 5 所示, 给出 U 的一个 $(\Delta(U) + 1)$ -NFSDTC.

当 $\nu \geq 6$ 时, 假设对满足条件的 $\nu - 1$ 阶单圈图, 有 $(\Delta(U) + 1)$ -NFSDTC. 下面考虑满足条件的 ν 阶单圈图.

令 $N_U(w) = \{v_1, v_2, w_1, w_2, \dots, w_r \mid 1 \leq r \leq \Delta(U) - 2\}$, 设 $d_U(v_j) \geq 2$, 其中 $j = 1, 2; d_U(w_i) = 1$, 其中 $i = 1, 2, \dots, r$. 如图 6 所示.

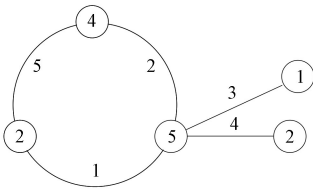


图 5 $\nu = 5$ 且 $\Delta = 4$ 时的单圈图及其染色

Fig. 5 Unicyclic graph with $\nu = 5, \Delta = 4$ and its coloring

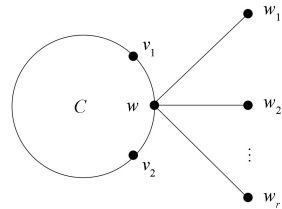


图 6 悬挂点的邻点在基本圈上

Fig. 6 Neighbors of pendant vertex on basic cycle

令 $U' = U - w_r$, 由归纳假设知, $\text{ftndis}_2(U') = \Delta(U') + 1, \Delta(U') \leq \Delta(U)$. 设 f' 是 U' 的一个 $(\Delta(U') + 1)$ -NFSDTC. 若将 f' 拓展为 U 的一个 $(\Delta(U) + 1)$ -NFSDTC f , 基于 f' , 为保证 f 是正常的, 则需给边 $w w_r$ 和点 w_r 正常着色. 由于 $f(w w_r) \neq f'(w), f(w w_r) \neq f'(v_1 w), f(w w_r) \neq f'(v_2 w), f(w w_r) \neq f'(w w_i) (1 \leq i \leq r - 1, r \leq \Delta - 2)$, 边 $w w_r$ 至多有 $\Delta(U)$ 种禁用色. 下面考虑点 w 的非悬挂邻点 v_1 和 v_2 的全和是否相等, 分两种情形讨论.

(i) $\phi_f(v_1) = \phi_f(v_2)$.

由于边 $w w_r$ 至多有 $\Delta(U)$ 种禁用色, 所以 $f(w w_r)$ 至少存在一种可用色, 而 $f(w_r)$ 可用 $[1, \Delta(U) + 1] \setminus \{f(w w_r), f(w)\}$ 种色去染, 又因 f 是 U 的一个正常全染色, $f(w_r) \neq f(w w_r), f(w_r) \neq f(w)$, 所以 $f(w_r)$ 至少有两个不同的值可取, 故 $f(w w_r) + f(w_r)$ 至少有两个不同的值可取. 由引理 7 可知结论成立.

(ii) $\phi_f(v_1) \neq \phi_f(v_2)$.

由引理 6 和引理 7 可知, 要使 $\phi(w) \neq \phi(v_1)$ 且 $\phi(w) \neq \phi(v_2)$, 则 $f(\omega w_r) + f(w_r)$ 至少有 3 个不同的值可取. 对边 ωw_r 和点 w_r 正常染色, $f(\omega w_r)$ 至少存在一种可用色, 而 $f(w_r)$ 可用 $[1, \Delta(U) + 1] \setminus \{f(\omega w_r), f(w)\}$ 种色去染, 由于 $\Delta(U) \geq 4$ 且 f 是 U 的一个正常全染色, $f(w_r) \neq f(\omega w_r)$, $f(w_r) \neq f(w)$, 所以 $f(w_r)$ 至少有 3 个不同的值可取, 从而 $f(\omega w_r) + f(w_r)$ 至少有 3 个不同的值可取. 即点 w 与其邻点在 f 下是邻点全和可区别全可染的. 定理 1 证毕.

参 考 文 献

- [1] KAROŃSKI M, LUCZAK T, THOMASON A. Edge Weights and Vertex Colours [J]. *Journal of Combinatorial Theory: Series B*, 2004, 91(1): 151-157.
- [2] 张忠辅, 程辉, 姚兵, 等. 图的邻点强可区别的全染色 [J]. *中国科学 A 辑: 数学*, 2007, 37(9): 1073-1082. (ZHANG Z F, CHENG H, YAO B, et al. Adjacent Vertex Strongly Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. *Scientia Sinica (A: Mathematica)*, 2007, 37(9): 1073-1082.)
- [3] PRZYBYŁO J, WOŹNIAK M. On a 1, 2 Conjecture [J]. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2010, 12(1): 101-108.
- [4] PILŚNIAK M, WOŹNIAK M. On the Total-Neighbor-Distinguishing Index by Sums [J]. *Graphs and Combinatorics*, 2015, 31(3): 771-782.
- [5] FLANDRIN E, LI H, MARCZYK A, et al. A Note on Neighbor Expanded Sum Distinguishing Index [J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2017, 37(1): 29-37.
- [6] 崔福祥, 杨超, 叶宏波, 等. 图的邻点全和可区别全染色 [J]. *运筹学学报*, 2023, 27(1): 149-158. (CUI F X, YANG C, YE H B, et al. Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. *Operations Research Transactions*, 2023, 27(1): 149-158.)
- [7] 崔福祥, 杨超, 叶宏波, 等. 联图的邻点全和可区别全染色 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2022, 60(1): 44-52. (CUI F X, YANG C, YE H B, et al. Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Join Graphs [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2022, 60(1): 44-52.)
- [8] 叶宏波, 杨超, 殷志祥, 等. 两类笛卡尔乘积图的邻点全和可区别全染色 [J]. *上海工程技术大学学报*, 2022, 36(1): 91-97. (YE H B, YANG C, YIN Z X, et al. Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Two Types of Cartesian Product Graphs [J]. *Journal of Shanghai University of Engineering Science*, 2022, 36(1): 91-97.)
- [9] 赵新梅, 陈祥恩. 单圈图的邻强边染色 [J]. *兰州交通大学学报(自然科学版)*, 2005, 24(6): 138-140. (ZHAO X M, CHEN X E. On the Adjacent Strong Edge Coloring of Monocycle Graph [J]. *Journal of Lanzhou Jiaotong University (Natural Sciences)*, 2005, 24(6): 138-140.)
- [10] 贾秀卿, 李沐春. 单圈图的 $D(2)$ -点可区别边染色 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2021, 59(4): 807-815. (JIA X Q, LI M C. $D(2)$ -Vertex-Distinguishing Edge Coloring of Unicyclic Graphs [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2021, 59(4): 807-815.)
- [11] 谭钧铭, 强会英, 王洪申. 单圈图的邻和可区别边染色 [J]. *山东大学学报(理学版)*, 2022, 57(2): 78-83. (TAN J M, QIANG H Y, WANG H S. Neighbor Sum Distinguishing Edge Coloring of Unicyclic Graphs [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2022, 57(2): 78-83.)
- [12] ALON N. Combinatorial Nullstellensatz [J]. *Combinatorics, Probability and Computing*, 1999, 8(1/2): 7-29.

(责任编辑: 赵立芹)